APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES DE INTRODUCCIÓN AL ALGEBRA DEL INSTITUTO PEDAGÓGICO RURAL "GERVASIO RUBIO"

Autor:
Carlos Julio Gámez Sánchez.
Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Instituto Pedagógico Rural Gervasio Rubio (UPEL-IPRGR)

RESUMEN

La presente investigación tuvo como propósito identificar las dificultades en el proceso demostrativo para a partir de ellas formular estrategias para el abordaje adecuado y desarrollo eficiente de dicho tema. Para ello se diseñaron una serie de procedimientos metodológicos orientados al descubrimiento de las estructuras personales de los estudiantes, con el fin de determinar cuáles son esas estructuras, técnicas y procedimientos más utilizados en las demostraciones matemáticas. Para esto se tomó en cuenta el lenguaje escrito y verbal que desarrollan los estudiantes al momento de enfrentarse a una demostración matemática. En tal sentido lo que aquí se pretendió fue focalizar el trabajo de campo a través de la observación e interpretación del fenómeno en un caso seleccionado para tal fin. Para recolectar la información a fin de lograr los objetivos de la investigación se aplicaron, la encuesta y la aplicación de dos test, que permitieron recoger la información necesaria para determinar las dificultades que poseen los estudiantes para desarrollar demostraciones matemáticas. Dichos resultados permitieron evidenciar que la mayor debilidad que presentan los estudiantes al enfrentarse a una demostración matemática se encuentra en el hecho de interpretar adecuadamente los procesos involucrados en el razonamiento matemático, siendo el punto más álgido el uso de los principios lógicos y la argumentación teórica.

Palabras Claves: Demostración matemática, dificultades, estrategias.

ABSTRACT

The present research was identifying difficulties in the demonstration process from them to formulate strategies for the proper approach and efficient development of this topic. For this purpose, a series of methodological procedures aimed at the discovery of personal structures of students, were designed in order to determine what are those structures, techniques and procedures used in mathematical demonstrations. For this was taken into account the written and verbal language that students develop when faced with a mathematical proof. So what was intended here was to focus the field work through observation and interpretation of the phenomenon in a case selected for this purpose. To collect information in order to achieve the objectives of the research were applied, the survey and the application of two tests, allowing to obtain the necessary information for determine the difficulties that students have to develop mathematical demonstrations. These results allowed to reveal that the biggest weakness which the students present to confront a mathematical proof lies in the fact to properly interpret the processes involved in the mathematical reasoning, being the height the use of logical principles and theoretical argumentation.

Key words: Mathematical proof, difficulties and strategies.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años el ser humano se ha sometido a múltiples cambios que de alguna forma le han permitido desenvolverse en su contexto social, es por ello, que la educación debería ser partícipe de esos cambios, logrando así desarrollar en el ser humano nuevas aptitudes que le permitan adaptarse a su contexto. A partir de las disciplinas actuales, es posible reconocer la unidad y complejidad humana organizando cocimientos dispersos en las ciencias de la naturaleza.

Es por ello, que desde tiempo atrás las ciencias en especial las matemáticas han formado parte indispensable de muchos estudiantes en distintas áreas de conocimiento, en tal sentido se puede deducir que las matemáticas forman parte importante en la formación del conocimiento. Sin embargo, lo que se quiere lograr con las matemáticas es descubrir y comunicar ciertas verdades, verdades que son presentadas en muchos casos como absolutas e irrefutables y donde las demostraciones matemáticas son procedimientos propios del quehacer matemático, que permiten analizar, estructurar y comprender una proposición matemática. La presente investigación pretende interrogar la realidad, indagando sobre las diversas formas de interacción comunicativa que se dan en el aula de clase al momento de aprender demostraciones matemáticas, así como determinar algunas de las dificultades que presentan los alumnos al momento de hacer uso de alguna definición matemática.

El trabajo estuvo orientado, a determinar las dificultades que tienen los estudiantes para aprender demostraciones, así como a identificar las dificultades que generan las propias demostraciones y los errores en la compresión de la naturaleza de la demostración. Por tal motivo, una demostración matemática puede tener varios significados entre ellos, basarse en conocimientos previos, probar su verdad, empezar por una hipótesis para llegar a una tesis, es un razonamiento o procedimiento, es una cuestión lógica, entre otros. Y estos significados pueden generar en el aprendizaje del estudiante un conflicto al momento de enfrentarse a una demostración matemática, debido a que con exactitud no se sabe que es lo que quiere lograr al momento de realizar una demostración, es por ello que la asignatura de introducción al algebra debería centrarse en desarrollar un logicismo, formalismo e intuicionismo de las matemáticas a través de los diversos contenidos que en ella se presentan, en este caso la investigación se centró en los contenidos de relaciones binarias y funciones, ya que el propósito de estos temas es proporcionar al futuro docente un conjunto de experiencias de aprendizaje que le permitan profundizar cognoscitiva y conceptualmente algunos conceptos matemáticos adquiridos en los niveles educativos anteriores. Para así, Iniciarse en la comprensión del significado de conceptos matemáticos abstractos, y adquirir métodos de trabajos adecuados y cónsonos con el espíritu actual de la matemática. Al mismo tiempo de razonar en forma válida acerca de hechos matemáticos con el uso adecuado de la terminología y simbología propias de la matemática actual y prepararse para su desempeño exitoso en cursos posteriores.

De acuerdo con esto, Delgado, (1990) plantea "que para la total comprensión y correcto empleo de las expresiones algebraicas resultantes a un proceso o de una formulación de un modelo matemático es indispensable saber interpretarlas. De ahí la necesidad de saber trasladar al lenguaje común todas las operaciones que indican los signos y que deben efectuarse mediante cantidades expresadas en letras" (p.8). Además, es importante resaltar que el álgebra es el más común de los lenguajes matemáticos, y que ella permite expresar por medio de letras y signos una regla o proposición representativa de una situación real.

Este enfoque deja claro que se trata de buscar un aprendizaje significativo de las demostraciones matemáticas en el área del Álgebra, útil para la comunidad universitaria y cuyo aporte sea el de identificar las características formales de una demostración analizando las diversas demostraciones algebraicas en distintos contextos de modo que el futuro docente pueda abordar con mayor propiedad el estudio de los programas y elaborar estrategias de enseñanza-aprendizaje en este campo. De acuerdo con esto, el resultado de la presente investigación sentará las bases que servirán para comprender y hacer las recomendaciones necesarias para el aprendizaje de las demostraciones matemáticas en los contenidos de relaciones binarias y funciones.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

El saber matemático pone en manifiesto los conocimientos terminados y cristalizados en teorías, al tiempo que se pone entre paréntesis la actividad matemática y solo toma en consideración el fruto final de esta actividad, por tal motivo y como lo plantea Gascón (2002) "existen modelos matemáticos que pretenden reducir todo el conocimiento matemático a lo que puede deducirse de un conjunto finito de proposiciones trivialmente verdaderos (axiomas) y que pueden enunciarse utilizando únicamente términos perfectamente conocidos". (p.5)

Sin embargo, la adquisición del conocimiento matemático va paralela al desarrollo del pensamiento lógico, y el eje central en torno al cual gira ésta adquisición y desarrollo es la resolución de problemas. Es importante resaltar que ese conocimiento avanza mediante la comprensión de los conceptos, el estudio de las propiedades y estructuras que las relacionan y el contenido lógico de los razonamientos que utiliza.

No obstante, como lo menciona Hilton en Solow (1992) "La incapacidad para comunicar demostraciones de una manera comprensible ha sido perjudicial para los estudiantes y profesores en todas las ramas de las matemáticas." (p.7) Todos aquellos que han tenido la experiencia de enseñar matemáticas y la mayoría de aquellos que han tratado de aprenderlas, deben coincidir seguramente en que entender una demostración matemática es una traba para la mayoría de los estudiantes. Muchos de ellos tratan de saltar este obstáculo evadiéndolo, confiando en la indulgencia del profesor para que no incluya demostraciones en los exámenes. Esta confabulación entre estudiantes y profesores evita algunas de las consecuencias desagradables, tanto para el alumno como para el profesor, producidas por la falta de dominio del tema por parte del estudiante, pero esto no modifica el hecho de que un elemento clave de las matemáticas, probablemente su característica más notable, no ha entrado en el repertorio del estudiante.
Es por ello, que en las matemáticas universitarias se espera que los alumnos alcancen el grado de madurez necesario, en el manejo del lenguaje formal y de los pasos lógicos deductivos, que les permitan por ejemplo seguir, interpretar y desarrollar demostraciones que no sean excesivamente complicadas, plantear conjeturas, además de analizar procesos lógicos y obtener conclusiones, generalizaciones, etcétera.

En la actualidad, todos sabemos que las matemáticas constituyen un tema de fundamental importancia debido a su papel universal en la vida contemporánea. Para que se utilicen eficazmente las matemáticas, sus métodos deben entenderse adecuadamente, lo que apunta a un sistema de enseñanza donde los estudiantes no han tenido suficientes oportunidades para experimentar, aplicar, ejemplificar o consolidar los conceptos (definiciones teóricas), en contextos significativos y de relevancia para ellos, sin embargo la falta de un método adecuado para comunicar demostraciones de una manera entendible ha sido perjudicial para los estudiantes y profesores en todas las ramas de las matemáticas. Los resultados han sido estudiantes frustrados, profesores frustrados y, frecuentemente, cursos de bajo nivel que sólo permiten que los estudiantes vean parte del programa, o examen sencillo que los protege a los estudiantes de las consecuencias de esta deficiencia. Por lo tanto, se podría concluir que a menudo, la demostración existe para el alumno como un ritual, un discurso que debe repetir o cuyo estilo debe imitar si se le pide probar un enunciado, más que como una herramienta explicativa basada en un sistema común de validación construido y aceptado por el y su grupo. (Balacheff, 1982).

Asimismo, se deberán formular estrategias de aprendizaje que estimulen en los estudiantes un logicismo, formalismo y un intuicionismo en el saber matemático. Con el fin de estimular un carácter formativo básico en el desarrollo de las capacidades, habilidades y destrezas en la resolución de demostraciones matemáticas.

En general, la enseñanza y el aprendizaje de las demostraciones matemáticas durante mucho tiempo no se ha ajustado a las necesidades que la sociedad universitaria requiere, ya que los estudiantes aprenden a operar expresiones algebraicas sin que estas tengan ningún significado para ellos, o también que las puedan relacionar con procesos de modelación, o que les sirvan de acercamiento a formar pensamiento matemático de tipo inductivo-deductivo, argumentativo, conjetural o demostrativo, de allí que los estudiantes de introducción al algebra del IPRGR no se escapan de esta realidad y cabe la pregunta: ¿Cómo aprenden y que aprenden los estudiantes de introducción al algebra de la Universidad Experimental Libertador "Gervasio Rubio", en cuanto a las demostraciones matemáticas en el caso de Relaciones binarias y Funciones?.

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Objetivo General:

Diseñar estrategias de aprendizaje para el desarrollo de demostraciones matemáticas en el área de introducción al algebra en los contenidos de relaciones binarias y funciones.

Objetivos Específicos:

1.- Diagnosticar las dificultades que poseen los estudiantes de introducción al algebra al momento de enfrentarse a una demostración matemáticas y las estrategias que se han propuesto para el aprendizaje de las demostraciones.

2.-Determinar los errores más comunes cometidos por los estudiantes al momento de realizar una demostración en estos contenidos.

3.- Proponer estrategias de aprendizaje en las demostraciones matemáticas en los contenidos de relaciones binarias y funciones.

MARCO TEÓRICO

A continuación, se hace un esbozo de las principales teorías que sirvieron de sustento a la investigación. Se consideraron las teorías cuyas características básicas son las de vincular los factores y elementos constitutivos de un proceso didáctico, tales como: los objetivos, los contenidos, las actividades programadas, los recursos empleados, la evaluación, las relaciones sociales existentes en el aula y en la escuela, etc. El propósito de tal revisión fue constituir una alternativa, y al mismo tiempo diseñar un modelo, para el mejoramiento del proceso de enseñanza-aprendizaje, fundamentalmente el vinculado con la aprehensión de las técnicas de demostración. Entre ellas tenemos: Las teorías de la enseñanza que surgen por la necesidad de explicar y fundamentar científicamente el proceso didáctico.

Una de estas teorías fue la del ***aprendizaje significativo***, diseñada por David Ausubel, en la cual plantea que el aprendizaje depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información, para ello parte del constructo "estructura cognitiva", el cual representa al conjunto de conceptos e ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento.

Por esta razón, es de vital importancia conocer la estructura cognitiva del alumno; ya que no sólo se trata de saber la cantidad de información que posee, sino también conocer el grado de estabilidad de los conceptos y proposiciones que maneja. La propuesta de Ausubel (1983), ofrece el marco para el diseño de herramientas metacognitivas lo cual permitirá una mejor orientación de la labor docente, tomando en cuenta que los educandos tienen una serie de experiencias y conocimientos que afectan su aprendizaje y pueden ser aprovechados para su beneficio.

La característica más importante del aprendizaje significativo es que produce una interacción entre los conocimientos más relevantes de la estructura cognitiva y las nuevas informaciones. De aquí que la teoría de la enseñanza de Ausubel se enfoca más a la consideración de contenidos con sentido, ya que, constituye el mejor mecanismo para lograr la adquisición de la información existente, el sentido lógico y el sentido psicológico, con el que designa al mecanismo cognitivo mediante el cual el alumno, utilizando aprendizajes anteriores, es capaz de adquirir nuevos conocimientos, lo anterior es definido por Ausubel como subsunción, que se manifiesta como:

- Subsunción derivativa, cuando el nuevo contenido se ha inferido o derivado de un concepto previamente aprendido.

- Subsunción correlativa, que constituye el caso más común en la escuela, ocurre cuando el nuevo contenido es una modificación del conocimiento previo.

Es importante recalcar que el aprendizaje significativo no es la "simple conexión" de la información nueva con la ya existente en la estructura cognoscitiva del que aprende, sino que también, involucra la modificación y evolución de la nueva información y de la estructura cognoscitiva envuelta en el aprendizaje. Es por esto, que Ausubel distingue tres tipos de aprendizaje significativo:

Aprendizaje De Representaciones: Es el aprendizaje más elemental del cual dependen los demás tipos de aprendizaje. Consiste en la atribución de significados a determinados símbolos. Aprendizaje De Conceptos: Según Ausubel (1983) "Los conceptos se definen como objetos, eventos, situaciones o propiedades de que posee atributos de criterios comunes y que se designan mediante algún símbolo o signos".(p.61). Por esta razón, los conceptos son adquiridos a través de dos procesos. Formación y asimilación. Aprendizaje de proposiciones: Este tipo de aprendizaje va más allá de la simple asimilación de lo que representan las palabras, combinadas o aisladas, puesto que exige captar el significado de las ideas expresadas en forma de proposiciones.

En resumen, a lo largo de esta investigación la esencia de la teoría del aprendizaje significativo permitió fundamentar que los nuevos significados son adquiridos a través de la interacción de los nuevos conocimientos con los conceptos o proposiciones previas, existentes en la estructura cognitiva del que aprende y de esta interacción resultara un producto en el que no solo la nueva información adquiere un nuevo significado sino también el subsunsor adquiere significados adicionales.

Otra de las teorías de la enseñanza es la concebida por Jerome, Bruner (1960, 1966), llamada teoría del aprendizaje por descubrimiento. Para Bruner, el desarrollo intelectual del alumno depende directamente de que éste domine ciertas técnicas. En este dominio deben considerarse como determinantes dos factores: la maduración y la integración. La maduración le permite al alumno involucrarse al mundo de estímulos desde las dimensiones de acción, imagen y lenguaje simbólico, donde estas se van perfeccionando de manera progresiva. Mientras que la integración consiste en el empleo de grandes unidades de información para la resolución de problemas.

Sin embargo, en el proceso de desarrollo del que aprende, existe una estrecha analogía entre el enfoque de Piaget y el planteamiento de Bruner, pues éste último considera la presencia de tres formas en el desarrollo cognitivo del ser, tales formas son: La forma enativa, que consiste en realizar la representación de sucesos pasados, por medio de la respuesta motriz, La forma icónica, que depende tanto de respuestas motrices, como del desarrollo de imágenes representativas y secuenciadas de una determinada habilidad, La forma simbólica, misma que tiene en el lenguaje, su expresión más objetiva, pues el lenguaje es un instrumento de cognición, a la vez que un medio para representar y transformar la experiencia del mundo.

Bruner considera, pues, al lenguaje como el instrumento para superar el concepto de hombre natural y defiende la posibilidad de la enseñanza de cualquier cosa a un alumno, bajo la condición de que la enseñanza se realice en el lenguaje del propio alumno, lo que impone una exigencia al docente que imparte asignaturas caracterizadas por un alto nivel de abstracción, entre ellas el algebra. Teniendo en cuenta que los contenidos a enseñar deben ser percibidos por el alumno como un aprendizaje importante y significativo, sin olvidar que la forma de presentar el material de enseñanza al alumno está dada de manera heurística e hipotética por:

- La potencia intelectual. Capacidad de construcción y organización racional de los elementos de un problema.

- Las motivaciones intrínseca y extrínseca. El alumno se recompensa con los efectos de sus propios descubrimientos.

- El aprendizaje y la heurística del descubrimiento. Sólo se aprende realmente a través de la solución de problemas y el interés-esfuerzo por descubrir.

- La memoria. El alumno retiene con mayor facilidad lo aprendido si él mismo organiza sus materiales y procesos respectivos.

En definitiva, lo que se buscó con esta teoría es un aporte para vincular los factores y elementos constitutivos de un proceso didáctico, tales como los objetivos, contenidos y actividades programadas. Y además analizar el dominio de los factores de maduración e integración que le permiten al estudiante tener un perfeccionamiento de manera progresiva a través de la acción, la imagen, y el lenguaje simbólico.

Por otra parte, en esta investigación se analizaron y compararon las nociones que proponen algunos modelos teóricos para estudiar los procesos de aprendizaje, con el fin de identificar las semejanzas, diferencias y complementariedades de estos modelos con el proceso de aprendizaje en las demostraciones en el área de álgebra lo que llevo a profundizar más acerca de cómo se aprende y que aprenden los estudiantes en esta área, y al mismo tiempo se espera que sea de interés para los docentes (presentes y futuros) que todavía desean aprender a comprenderlas. dichas teorías son:

Teoría de los campos conceptuales: Diseñada por Gerardo Vergnaud (1990), y se caracteriza por ser una de las teorías que más nociones cognitivas ha introducido en el campo de las matemáticas como lo son: las nociones de esquemas, invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto), concepto, campo conceptual, sentido de un conocimiento.

1.- La noción de esquema: Se define como una totalidad organizada que permite generar una clase de conductas diferentes en función a las características particulares de cada una de las situaciones de la clase a la cual se dirige. Esta noción admite unos componentes que son elementos que sirven de base a las competencias matemáticas. Dichos componentes son:

- Los invariantes operatorios, que están constituidos por los conceptos y teoremas en acto que conducen a reconocer y recoger información sobre la situación a tratar.

- Las inferencias o razonamientos, que permiten a partir de los invariantes operatorios calcular las reglas y avances. Donde dichas reglas de acción generan una serie de acciones en el sujeto.

En fin, esta noción incorpora elementos actuarios (técnicas o modos de actuar) y elementos tecnológicos-teóricos implícitos (conocimientos en acto).

2.- La noción de concepto: Un concepto es considerado como un conjunto de invariantes utilizables en una acción, donde se debe tener presente el uso de significantes explícitos como: palabras, enunciados, símbolos y signos. Desde la conceptualización didáctica y psicológica de las matemáticas

3.- La noción de campo conceptual: Vernaug describe un campo conceptual como un conjunto de situaciones. Pero resalta que junto a estas situaciones se deben considerar también los conceptos y teoremas que están involucrados en la solución de tales situaciones y dichos conceptos y teoremas que intervienen en esa solución se califican de "matemáticos".

4.- La noción de sentido: Se define como una situación que relaciona al sujeto con las situaciones y los significados. Es decir, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación que involucra sus conductas y su organización.

5.- La noción de concepción: Esta noción pone evidencia la diversidad de un objeto matemático, con el fin de diferenciar las representaciones y sus modos de tratamiento, además de la adaptación a distintas clases de problemas.

Teoría basada en problemas (ABP): Esta teoría se caracteriza porque el aprendizaje está centrado en el estudiante, cuyo fin es desarrollar una serie de habilidades y competencias indispensables en el entorno profesional actual y además que este aprendizaje sea significativo. Dicho proceso se desarrolla en base a grupos pequeños de trabajo, y cuyo objetivo es desencadenar el aprendizaje autodirigido de sus alumnos. En donde el rol del profesor se convierte en el de un facilitador del aprendizaje. De acuerdo a esto, Barrows (1986) mencionado en Morales y Landa define al ABP como "un método de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto de partida para la adquisición e integración de los nuevos conocimientos" (p.4), cuyas características fundamentales son:

1.- El aprendizaje está centrado en el alumno: Lo que se busca en el ABP es que cada estudiante personalice su aprendizaje, concentrándose en las áreas de conocimiento o entendimiento y persiguiendo sus áreas de interés.
2.- El aprendizaje se produce en grupos pequeños de estudiantes: Al implementar el ABP se busca el trabajo en grupo de estudiantes, lo cual permitirá adquirir práctica en el trabajo intenso y efectivo, con una variedad de diferentes personas.

3.- Los profesores son facilitadores o guías: En McMaster el facilitador del grupo se denominaba tutor. El rol del tutor se puede entender mejor en términos de comunicación metacognitiva.

4.- Los problemas forman el foco de organización y estímulo para el aprendizaje: El problema representa el desafío que los estudiantes enfrentarán en la práctica y proporciona la relevancia y la motivación para el aprendizaje.

Lo que se buscó con esta teoría fue fundamentar y analizar el proceso de formación y aplicación del ABP en el proceso de enseñanza-aprendizaje, para así fomentar en el estudiante el estudio independiente y el trabajo en equipo mediante un aprendizaje activo y significativo guiado por el docente. Abordando los aspectos de la técnica del A.B.P. e identificando las condiciones de ejecución de cada una y las necesidades propias requeridas. Ya que, el A.B.P. es considerado como una variable de la técnica de resolución de problemas y de la resolución de casos. Teniendo en cuenta que durante este aprendizaje autodirigido, los estudiantes trabajan juntos, discuten, comparan, revisan y debaten permanentemente lo que han aprendido.

MARCO METODOLÓGICO

Esta experiencia es un estudio de casos que pretende interrogar la realidad, conocer las diversas formas de interacción comunicativa que se dan en el aula de clase al momento de aprender demostraciones matemáticas, así como determinar algunas de las dificultades que presentan los alumnos al momento de hacer uso de algunas definiciones matemáticas. En tal sentido lo que aquí se pretendió fue focalizar el trabajo de campo a través de la observación e interpretación del fenómeno en un caso seleccionado para tal fin. Buscando descubrir lo significativo, lo importante y lo más relevante de cómo hacer y entender demostraciones matemáticas en el ámbito educativo, específicamente se pretendió dar un aporte acerca del aprendizaje de la demostración matemática en estudiantes de Introducción al Álgebra de la especialidad de Matemática del IPRGR.

La muestra es de carácter intencional, debido a que fue seleccionada con un criterio de tipo cualitativo y no cuantitativo, ya que, lo que se buscaba en la investigación es profundizar acerca de las dificultades que poseen los estudiantes de matemáticas al momento de enfrentarse a una demostración matemática en los contenidos de relaciones binarias y funciones. A partir del estudio de un grupo específico. Por lo que estuvo conformada por un grupo de estudiantes de la especialidad de matemática cursantes de la asignatura Introducción al Álgebra de la UPEL –IPRGR.

Para recolectar información a fin de lograr los objetivos de la investigación se llevaron a cabo, la encuesta y la aplicación de 2 test, que permitieron recolectar la información necesaria para determinar las dificultades que poseen los estudiantes para resolver demostraciones matemáticas.

La encuesta estuvo dirigida al grupo de alumnos seleccionados, la cual constó de preguntas abiertas y de selección, el propósito de este instrumento fue la obtención de información que permitió identificar las dificultades que poseen los estudiantes al momento de enfrentarse a una demostración matemática, y además de determinar las dificultades que tienen dichos estudiantes al momento de hacer uso adecuado de una definición, un teorema o una técnica matemática
Los test estuvieron dirigidos al grupo de alumnos seleccionados, que consistieron en una serie de preguntas y demostraciones, relacionadas con los temas de relaciones binarias y funciones, cuyo fin fue detectar las dificultades que presentan los alumnos al momento de realizar una demostración y detectar algunos errores cometidos al momento de realizar una demostración.
Es por ello, que, Debido a la falta de metodologías para aprender demostraciones matemáticas, se implantaron una serie de procedimientos metodológicos orientados al descubrimiento de las estructuras personales de los estudiantes, con el fin de determinar cuales son esas estructuras, técnicas y procedimientos más utilizados en las demostraciones matemáticas. Para esto se tomo en cuenta el lenguaje escrito y verbal que desarrollan los estudiantes al momento de enfrentarse a una demostración matemática.

La primera fase de la investigación, consistió en observar los estados de conocimientos ligados al escenario de una demostración matemática, estos estados permitirán identificar los problemas más comunes presentados por los estudiantes al momento de enfrentarse a una demostración, Una siguiente fase de la investigación, consistió en identificar si existen estrategias para el aprendizaje de demostraciones matemáticas en el área de educación. Y una última consistió en una reordenación y retroalimentación de información de definiciones ya elaboradas en los alumnos, para luego así clasificar y explicar las diversas técnicas que se utilizan en el desarrollo de las demostraciones. De acuerdo con esto, lo que se busca es un nivel de comprensión para leer, comunicar y entender una demostración matemática que antes no era conocida para ellos.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Una primera fase consistió en el análisis de las encuestas, cuyo propósito fue identificar las dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse a una demostración matemática, dicha encuesta responde al primer objetivo específico planteado en la investigación. Esta encuesta, como se realizó y diseñó con el fin de categorizar las dificultades que presentan los alumnos al momento de enfrentarse a una demostración matemática. Dichas dificultades se muestran a continuación en un cuadro que compendia los errores más comunes que comenten los

estudiantes al momento de enfrentarse a una demostración matemática. (Cuadro de dificultades)

Cuadro de dificultades que presentan los alumnos al momento de enfrentarse a una demostración

Cuestión	*Categorías*
"Demostrar" para los alumnos significa:	- Presentación detallada de un teorema - Identificar pasos - Deducir - Probar la verdad - Partir de una hipótesis para llegar a una tesis -Comprobar la veracidad de una proposición -Encontrar la validez de un razonamiento
La finalidad de una demostración para los estudiantes es:	-Aprender a justificar la existencialidad o la realidad de lo supuesto. - Comprobación de la veracidad de ciertos teoremas. - Deducir algo. - Verificar la veracidad o falsedad de ciertas proposiciones matemáticas. - Comprobar la suposición por medio de una hipótesis y tesis. - Seguir un orden. - Determinar por razones lógicas un teorema.
Las dificultades más comunes presentadas por los alumnos al momento de demostrar son: Los alumnos no comprenden una demostración debido a:	- Identificar una hipótesis y tesis. - Justificar pasos. -Comprender el significado de la demostración. -Comprender los conceptos matemáticos pertinentes al momento de demostrar. -Poco conocimiento al momento de demostrar. - Falta de costumbre. -Mal uso de razonamientos deductivos-lógicos. - La no comprensión de la hipótesis y tesis. - Uso erróneo de términos y simbología matemática - Falta de un método entendible - No conocer teoremas y definiciones pertinentes al momento de realizar una demostración -Debilidades en la justificación.
Dificultades que se detectan en los alumnos al momento de realizar una demostración matemática	-Desconocimientos de métodos. -Desconocimientos de artificios matemáticos. -Falta de argumentación teórica e incomprensión de la misma. -Mal dominio del lenguaje matemático. -Falta de comprensión en el enunciado -Identificación errónea de la hipótesis y tesis. - La racionalidad del pensamiento.
La importancia de las demostraciones para la formación docente son:	-Dan fortaleza a los conocimientos expresados en forma de teoremas. -Proporcionan una vía lógica para atacar teoremas y lemas que pueden ser confusos. -Libertad de pensar libremente -Fortalecimiento de teorías matemáticas -Sustentación de verdades matemáticas. -Desarrollo del pensamiento crítico. -Aprender a razonar.

En un mismo orden de ideas, una segunda fase consistió en el diseño y elaboración de los test1 y test2 cuyos propósitos son:

1.-Determinar las dificultades que tienen los estudiantes para la transferencia de los sustentos teóricos, relacionados con un teorema o una técnica matemática.

2.-Determinar los errores más comunes cometidos por los estudiantes al momento de realizar una demostración en estos contenidos. Los cuales responden a los objetivos específicos 1 y 2.

Análisis:

ITEM	PROPÓSITO	DIMENSIÓN	INDICADOR
1.1	*Comprender conceptos pertinentes para lograr resolver de forma exitosa la demostración. *Expresar de forma matemática algunos conceptos pertinentes que se involucran en dicha demostración.	Dificultades en el Aprendizaje de las Demostraciones	* Manejo de la simbología. * Comprensión de conceptos.

RESULTADO: De acuerdo con los resultados obtenidos, se observó que un alto porcentaje de los estudiantes utilizan y manejan adecuadamente la simbología involucrada en la demostración, más sin embargo no alcanzaron definir con precisión y correctamente los conceptos pertinentes envueltos en dicha demostración. Por ejemplo: Ante el concepto de Unión algunos estudiantes responden que la simbología utilizada es AUB y lo definen como: “Consiste en unir dos o más elementos”, “Es la combinación de dos conjuntos”, “Es la formación de un conjunto a partir de dos conjuntos diferentes”, “Es cuando se unen los elementos de dos o más conjuntos”. De allí, que manifiestan algún conocimiento o manejo de la simbología matemática empleada en la demostración, pero no logran una comprensión de los conceptos involucrados.

ITEM	PROPÓSITO	DIMENSIÓN	INDICADOR
2.2	* Vincular elementos en un mismo conjunto y según sea el tipo de conexión o relación determinar si es de equivalencia. * Verificar el adecuado dominio y manejo de los distintos conceptos. *Aplicar algunos procedimientos lógicos matemáticos en relación a dicha temática	Dificultades en el Aprendizaje de las Demostraciones	* Manejo de la simbología. *Argumentación teórica

De acuerdo con la información aportada por los estudiantes referente a este ítem se pudieron considerar los siguientes aspectos relevantes:

Proceso de definir: Referente al manejo de conceptos pertinentes para demostrar que tipo de relación estaban trabajando, gran parte de los estudiantes mostraron tener éxito en el

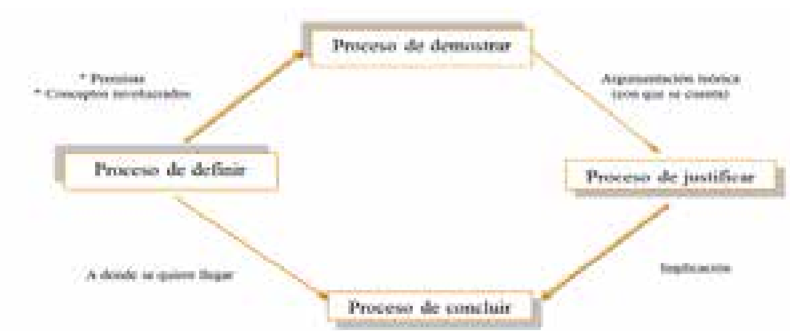
proceso de identificación y definición de que es lo que deseaban demostrar, mientras que otros mostraron tener ciertas dudas o confusiones con este proceso.

Proceso de demostrar: Una minoría de estudiantes mostraron serias dificultades en el uso y manejo de simbología matemática. Al mismo tiempo se pudo observar que a aquellos estudiantes que no mostraron tener clara la definición se les dificultó identificar cuáles eran las herramientas que poseían para lograr el desarrollo de la demostración, de allí que los estudiantes mostraron no tener muy claro de dónde partir en tal proceso.

Proceso de justificar: Los estudiantes mostraron serias dificultades al momento de argumentar teóricamente lo que planteaban en el proceso demostrativo. Es importante resaltar que aquellos estudiantes que tuvieron dificultades en el proceso de definir y demostrar no lograron justificar ninguno de los pasos del trabajo que realizaron.

Proceso concluir: Los estudiantes mostraron no tener claro cuál era el fin de realizar los procesos anteriores mencionados, esto evidencia que los estudiantes pueden presentar dificultades al momento de identificar cual es la finalidad de realizar una demostración, es decir evidencian no tener claro hacia donde se quiere llegar con tal proceso.

En conclusión, de acuerdo a la información obtenida en los procesos anteriores es importante resaltar que debe existir una vinculación de tales procesos, tal y como se muestra en el esquema siguiente:



ITEM	PROPÓSITO	DIMENSIÓN	INDICADOR
3.3	Verificar si los estudiantes desarrollaban un trabajo creativo y muestran nuevas habilidades matemáticas que le permitan construir o reconstruir una teoría matemática dentro del pensamiento lógico deductivo esto con el fin de que les ayude a enfrentarse a una demostración matemática nueva.	Teorías de Enseñanza Aprendizaje de Demostración. Dificultades en el Aprendizaje de las Demostraciones	* Razonamiento matemático * Argumentación teórica

De acuerdo con lo plasmado por los estudiantes, se observó que en su totalidad todos presentan ciertas dificultades al momento de desarrollar habilidades matemáticas que les permitan construir o reconstruir una proposición matemática dentro del pensamiento lógico deductivo, esto se debe al conflicto que presentan al momento de argumentar, comprender, analizar y hacer uso adecuado de la simbología empleada en cualquier razonamiento matemático. Para concluir se observó:

Según las respuestas aportadas por los estudiantes se evidenció que la mayor dificultad que estos presentaban al resolver dicha pregunta se centra en no comprender conceptos pertinentes para lograr resolver de forma exitosa la demostración, esta dificultad arrastra consigo otras dificultades en los estudiantes, entre ellas se pudo observar el alto nivel de no comprensión del enunciado, además, el no manejo de definiciones y la no aplicación correcta de las definiciones, esto se debe a que si el alumno no comprende lo que quiere lograr, entonces los procedimientos realizados pueden ser errados.

También se evidenció que la mayor dificultad está en la no comprensión del enunciado, esto se debe a que el alumno lee y resuelve el problema matemático que se le presenta y no se detiene a pensar o releer el enunciado para saber con exactitud qué es lo que quiere lograr, otras de las dificultades observadas aquí es la no comprensión de conceptos básicos para la aplicación de las mismas, es por ello que al momento de justificar los pasos cometidos, muchos de los estudiantes tienen una concepción errada de lo que se quiere aplicar.

Los alumnos cometen errores al momento de hacer uso adecuado de la simbología matemática. Esto trae como consecuencia la no comprensión de los conceptos y el no manejo de las definiciones pertinentes para el logro de sus objetivos. Por tal motivo, se puede afirmar que el fracaso de algunos estudiantes al momento de realizar una demostración obedece a los aspectos ya señalados. También se evidencia que la mayor dificultad radica en no comprender conceptos para la resolución de dichos problemas.

Estas cuatro preguntas muestran que las dificultades más comunes cometidas por los alumnos al momento de demostrar son:

1.- No comprender conceptos pertinentes.

2.- No manejar definiciones.

3.- No comprender el significado de la demostración, ni el enunciado.

4.- Uso erróneo de las simbologías.

5.- Dificultades en el traslado del concepto teórico a su representación simbólica.

6.- Uso inadecuado de la justificación

Apoyado en los resultados de los instrumentos y reconocidas las dificultades que presentan los estudiantes al momento de abordar una demostración, se presenta a continuación una serie de estrategias para abordar los temas de relaciones binarias y funciones; las cuales pretenden enlazar adecuadamente los procesos de definir, demostrar, justificar y concluir. En ellos se abordan de un modo poco usual los elementos vinculados con la argumentación teórica y el razonamiento matemático.

Modelo simplificado de los procesos y dificultades implicadas en la comprensión de la demostración.

Proceso	***Dificultades***	***Operaciones implicadas***	***Conocimientos***	***Resultado según cuadro de variables.***
Definición	Simbología	1.- Identificar la simbología utilizada en la demostración. 2.- Reconocer el uso de esta simbología. 3.-Saber trasladar el sustento teórico a lenguaje simbólico.	1.- Significado y uso de simbología matemática. 2.- Uso de conectivos lógicos. (Combinatorios, argumentativos y organizativos). 3.- Lenguaje matemático. 4.- Relación lógica entre proposiciones. 5.- Tipos de operadores lógicos.	**Manejo De Simbología**

	Errores conceptuales	1.- Identificar conceptos involucrados. 2.- Reconocer el valor epistémico del enunciado. 3.- Saber integrar conceptos involucrados. 4.-Comprensión del enunciado.	1.- Temática en cuestión. 2.- Asimilación y relación con los conocimientos previos al tema. 3.- Búsqueda de significado basado en la realización de varias acciones u operaciones involucradas en el concepto. 4.-Significado esencial que constituye la definición. 5.- Identificación de las características definitorias y las reglas que componen el enunciado.	**Comprensión De Conceptos**
Demostrar	Identificación de elementos de una demostración	1.- Identificar la hipótesis y tesis. 2.- Comprender el significado de la hipótesis y tesis. 3.- Saber trasladar del lenguaje común al lenguaje simbólico dichos elementos.	1.- Simbología matemática. 2.- Métodos de demostración. 3.- Conocimientos previos o conceptos de anclaje pertinentes. 4.- Utilidad de conectivos lógicos para formar proposiciones compuestas.	**Comprensión Del enunciado**

	Desconocimientos de métodos demostrativos.	1.- Reconocer los métodos de demostración 2.- Comprender los conceptos matemáticos involucrados. 3.- Comprender el enunciado.	1.- Conocimientos de los diferentes métodos de demostración matemática. (Directos e indirectos).	**Aplicación de teorías básicas**
	Comprender el Significado de la demostración	1.- Reconocer los elementos que constituye la demostración. 2.- Comprender los conceptos que involucra dicha demostración. 3.- Reconocer la simbología involucrada. 4.- Identificar algunos teoremas o lemas que puedan estar relacionados con la demostración. 5.- Reconocer y analizar las premisas de la demostración.	1.- Métodos de demostración. 2.- Conocimientos previos del tema que se esta tratando. 3.- Manejo de simbología y conectivos lógicos. 4.- Uso de razonamientos deductivos lógicos.	**Uso de principios lógicos**

	Conocimientos matemáticas	1.- Desarrollar destrezas de resolución de problemas. 2.- Formulación de conjeturas. 3.-Conversión y tratamientos de representaciones de los objetos matemáticos. 4.- Expresar en lenguaje algebraico el enunciado.	1.- Capacidad de razonar. 2.- Reflexión sobre procedimientos de pensamientos propios sobre el acto demostrativo. 3.- Uso de lenguaje simbólico para generalizar situaciones. 4.- Uso de letras para expresar números generalizados.	**Habilidades matemáticas**

Justificar	Debilidades en la justificación	1.- Comprender los conceptos matemáticos involucrados. 2.- Reconocer los teoremas y definiciones pertinentes que involucra la demostración. 3.- Reconocer la simbología involucrada. 4.- Comprender el significado del enunciado. 5.- Identificar los elementos que constituyen una demostración matemática. 6.-Desarrollar habilidades matemáticas.	1.-Uso de principios lógicos. 2.- Conocimientos de los temas relacionados con la demostración. 3.- Lógica simbólica. 4.-Teorías, axiomas, teoremas, lemas o conceptos involucrados en la demostración. 5.- Conocimientos sobre las siguientes nociones: explicación, argumentación, razonamiento y verificación. 6.- Razonamientos válidos. 7.- Formulación de propiedades y relaciones entre los objetos y/o conceptos que componen la demostración.	**Argumentación teórica.**

Concluir	Interpretar adecuadamente los procesos involucrados en el razonamiento matemático.	1.- Identificar la hipótesis y tesis. 2.- Comprender el enunciado. 3.- Conocer cuáles son las características que aporta la hipótesis y tesis. 4.- Identificar el problema por demostrar. 5.- Conocer en simbología matemática que es lo que se busca con este proceso.	1.- Simbología matemática. 2.- Conceptos involucrados en la demostración. 3.- elementos que constituyen una demostración. 4.- Métodos de demostración. 5.- Capacidad interpretativa en los resultados obtenidos durante este proceso.	**Razonamiento matemático.**

Fuente: Gámez (2017)

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Una vez culminada la fase de investigación se pueden hacer algunas consideraciones referentes al proceso de aprendizaje de las demostraciones matemáticas:

1.- Las debilidades observadas al momento de responder el instrumento 1, permiten concluir que la mayor falencia se encuentra en el proceso definir donde están involucrados: el manejo de conceptos y el manejo de simbología.

2.- Existe inconsistencia en el traslado de lo conceptual a lo simbólico.

3.- Al analizar los resultados de los instrumentos 1 y 2 se observó que uno de los problemas que se presentan con mayor recurrencia se centra al momento de justificar el hecho demostrativo, lo que refleja dificultades en el aprendizaje de las demostraciones involucradas con la argumentación teórica y la no comprensión de conceptos.

4.- Los resultados alcanzados en la investigación permiten evidenciar que el no poder definir con claridad un concepto matemático puede implicar dificultades al momento de expresar o definir en simbología matemática dicho concepto.

5.- El desarrollar habilidades matemáticas que les permitan a los estudiantes construir o reconstruir una proposición matemática dentro del pensamiento lógico deductivo, es una de las dificultades evidenciadas debido al conflicto que presentan los estudiantes al momento de argumentar, comprender, analizar y hacer uso adecuado de la simbología empleada en cualquier razonamiento matemático.

6.- Al detectar cuáles fueron las dificultades que tenían los estudiantes al momento de realizar demostraciones matemáticas se encontró que debe existir una vinculación entre los procesos de: definir, demostrar, justificar y concluir.

7.- En el proceso de aprendizaje de una demostración matemática para construir ideas , adquirir destrezas y actitudes en las demostraciones y desarrollar herramientas de trabajo , es importante tener presente el proceso de definir, ya que si no se utiliza adecuadamente la lógica, las definiciones de los objetos y de las relaciones matemáticas, las hipótesis y tesis para demostrar, el lenguaje algebraico para expresar o generalizar situaciones, conjeturas y establecer patrones numéricos, puede llevar a los estudiantes a tener ciertas debilidades o dificultades al momento de realizar una demostración matemática.

8.- La debilidad mayor que presentan los estudiantes al enfrentarse a una demostración matemática se encuentra en el hecho de interpretar adecuadamente los procesos involucrados en el razonamiento matemático, siendo el punto más álgido el uso de los principios lógicos y la argumentación teórica.

9.- Apoyado en los resultados de los instrumentos 1 y 2 se diseñaron estrategias que tienen como finalidad allanar el camino para el abordaje de los temas de relaciones binarias y funciones de la asignatura de introducción al Álgebra de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rural "Gervasio Rubio".

10.- La experiencia de investigación deja abierto el camino para desarrollar nuevos trabajos que conlleven a introducir mejoras en el proceso de enseñanza- aprendizaje de las demostraciones matemáticas en los temas señalados, por lo que se sugiere incentivar al cuerpo docente a efectuar trabajos de investigación correlacionados con esta línea.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

LIBROS

Ausubel y otros. (1983). Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo. (2ª. Ed.) México: Trillas.
Delgado, A. (1990). Antecedentes del álgebra elemental. México. Trillas.
Dugarte, J. (1998). Contribución del pensamiento matemático: pensamiento matemático al alcance de todos. Facultad de humanidades y educación. Aprobado. Mérida.
Fetisov. (1980). Demostraciones en geometría. México. Limusa
Gutiérrez, A. (1991). Didáctica de las matemáticas. Síntesis editorial. Madrid.
Polya, G. (1965). Como plantear y resolver problemas. Trillas. México.
Solow, D. (1992). Como entender y hacer demostraciones matemáticas. México. Limusa.

ARTÍCULOS
Gonzalez, M. (2003). Posibilidades de la demostración en el aprendizaje motor. Revista Digital - Buenos Aires - Año 9 - N° 62 - Julio de 2003.
Vergnaud, G. (1990) La teoría de los campos conceptuales, en Recherches en Didáctique des Mathématiques, Vol. 10, nº 2, 3, pp. 133-17

TRABAJOS ACADÉMICOS
Ardila, A. (1998).De la aritmética al Álgebra. Trabajo de grado de licenciatura publicado, Universidad de Panamá. Panamá.
Morales y Landa. Aprendizaje Basado en Problemas. Pontificia Universidad Católica del Perú, Departamento de Ciencias, Sección Química, Lima, Perú.
Rico, P. (2005). Elementos teóricos y metodológicos para la investigación educativa, Unidad 164 de la Universidad Pedagógica Nacional, Zitácuaro, Michoacán, México.
Vicario, V. (1998). Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y las funciones de la demostración. Tesis Doctoral. Universidad de Granada Ross.

FUENTES ELECTRÓNICAS
Azcárate, C. (2001). Definiciones, demostraciones ¿Por qué?, ¿Cuándo?, ¿Cómo?.[Tesis en línea]. Disponible: www.guiasensenanzasmedias.es/verpdf.asp?area=mates&archivo=GR107 [Consultada: 2008, mayo 17]
Gascon, J. (2002). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. [Artículo en Línea] Disponible en: www.redalyc.org/articulo.oa?id=33540202. [Consulta: 2017, enero 7]