

LENIS Y. SANTAFÉ R.

INTERPRETACIÓN Y APLICACIÓN DEL MODELO DE VAN HIELE EN EL MARCO DEL CONSTRUCTO TEÓRICO HUMANS WITH MEDIA CON GEOGEBRA, DE LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO: CASO TRASLACIONES Y ROTACIONES

Lenis Y. Santafé R.
Universidad de Pamplona
Colombia
lenis.santaf7@gmail.com

Resumen

El estudio del proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de las transformaciones en el plano es un tema de gran interés en la media académica. La investigación que se presenta pretendió hacer contribuciones al proceso de aprendizaje a partir de contextos significativos, mediante la aplicación de la estructura del modelo de Van Hiele y el constructo teórico de Humans with Media con actividades específicas sobre las transformaciones en el plano utilizando el software GeoGebra. Este estudio permitió que se establecieran conexiones con otros temas relacionados, que conlleven al estudiante a adquirir más y mejores formas de razonamiento geométrico. Los informantes clave están constituidos por veinte estudiantes de la IE Provincial San José del grado 10°; se constituyó como una investigación cualitativa, enmarcada dentro del paradigma interpretativo, cuyo modo de pensamiento es la fenomenología y el tipo de diseño estudio de caso. Los instrumentos que se emplearon en la recolección de la información fueron de observación directa; se utilizaron registros abiertos mediante diarios de campo y la encuesta semiestructurada. A partir de los resultados obtenidos se pudo consolidar, la lista de descriptores específicos del modelo de Van hiele para las transformaciones en el plano, caso traslación y rotación.

Palabras Clave: Proceso de Aprendizaje, Modelo de Van Hiele, Humans with Media, Transformaciones en el plano.

INTERPRETATION AND APPLICATION OF THE VAN HIELE MODEL IN THE FRAMEWORK OF THE THEORETICAL CONSTRUCT HUMANS WITH MEDIA WITH GEOGEBRA, OF THE TRANSFORMATIONS ON THE PLANE: CASE TRANSLATIONS AND ROTATIONS

Abstract

A topic of great interest in the teaching and learning process for students of the academic mid-level Education is the concept of the transformations on the plane. The research that is presented intended to make contributions to the learning process from significant contexts, by applying the structure of the Van Hiele model and the theoretical construct of Humans with Media with specific activities on the plane transformations using GeoGebra software. This study allowed to establish connections with other related topics, which lead the student to acquire more and better forms of geometric reasoning. The key informants are constituted by twenty students from the High School Provincial San José of the 10th grade; it was constituted as a qualitative research, framed within the interpretative paradigm, whose mode of thought is the phenomenology and the design type is the case study. The instruments used in the collection of the information were direct observation; open records were used by field journals and the semi-structured survey. From the results obtained it was possible to consolidate the list of specific descriptors of the Van ice model for transformations on the plane, case translation and rotation.

Keywords: Learning Process, Van Hiele Model, Humans with Media, Transformations on the plane.

Introducción

Las dificultades en la educación matemática se constituyen como una problemática a nivel mundial como lo demuestran los resultados de las evaluaciones internacionales Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) y el Informe del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes, Program for International Student Assessment (PISA), en donde según el informe ejecutivo de resultados, Singapur encabeza el estudio Pisa 2015 de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE), que evalúa el rendimiento en ciencias, matemáticas y lectura de más de medio millón de alumnos. Respecto a la prueba de matemáticas -evaluación de las capacidades de formular e interpretar esta 'ciencia formal' en diferentes contextos- los mejores países son Singapur, China, Taipéi, Japón, las ciudades de Pekín y Shanghái, y las provincias de Jiangsu y Guandong; Corea del Sur, Suiza, Estonia y Canadá. Colombia ocupó el puesto 61, por debajo de México, Costa Rica, Chile, Uruguay y Argentina.

En esta evaluación, se detectó que solo 12 de los países participantes mejoraron su rendimiento en ciencias en la última década, pese a que se elevó el gasto por cada alumno de primaria y secundaria en casi un 20 por ciento desde el 2006. Los países que consiguieron mejorar sus puntuaciones incluyen sistemas educativos de alto rendimiento, como Singapur y China, pero también otros de bajo rendimiento, como Perú y Colombia.

Resulta oportuno señalar entonces que, en el contexto colombiano esta situación es similar, según el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES, 2017) el examen de Estado de la educación media Saber11.º lo deben presentar los estudiantes que estén finalizando el grado undécimo, con el fin de obtener resultados oficiales que les permitan ingresar a la educación superior; los resultados se presentan en un puntaje global de cero a quinientos puntos, que establece un promedio ponderado para Matemáticas, Lectura Crítica, Ciencias Naturales, Ciencias Sociales y Ciudadanas (3 de ponderación), e Inglés (1 de ponderación). En la aplicación 2017 se muestra una notable mejora en los resultados de los estudiantes comparado con los obtenidos en los años de 2014 y 2015.

Según el reporte del ICFES, de las 5 áreas que evalúa el examen, los estudiantes han mejorado en: Lectura Crítica al pasar de un promedio de 49.7 en 2015 a 52.6 en 2016, seguida por, Ciencias Naturales, que pasó de 50.1 a 52.6 e Inglés con un incremento de 50.4 a 51.9; pero en matemáticas

no se observa ningún avance significativo de 50.1 a 50.8 siendo la prueba que más estudiantes agrupa en el segundo nivel de desempeño, que son las clasificaciones de los estudiantes en cuatro categorías que describen cualitativamente el resultado obtenido.

En el Departamento Norte de Santander, se encuentran 40 municipios, agrupados en seis subregiones, uno de ellos es el municipio de Pamplona, nudo estratégico, vial y centro del oriente colombiano, reconocida como la ciudad fundadora de ciudades. En esta localidad se encuentra ubicada la Institución Educativa Colegio Provincial San José, que está compuesta por 5 sedes: Central, Rafael Faría, La Salle, La Mistral y Santa Cruz, no muy distantes entre sí. Las dos primeras ofrecen los niveles de educación básica secundaria y media y los tres restantes ofrecen los niveles de preescolar y básica primaria; la sede Santa Cruz, con la Metodología Escuela Nueva. Las cinco sedes están ubicadas en el casco urbano, permitiendo el acceso a todos los niños, niñas y jóvenes de la ciudad.

Ahora bien, a partir del diagnóstico situacional, con base en los resultados de las Pruebas SABER 2017-2018, se observa las deficiencias y debilidades de los estudiantes en las diferentes áreas del conocimiento, siendo matemáticas la que nos interesa para este trabajo.

De acuerdo a la ubicación, las características y problemáticas específicas del entorno y de los sujetos informantes clave con los que se desarrolló este proyecto de investigación, se realizó un seguimiento detallado del proceso de aprendizaje de un tema en particular en matemáticas, las transformaciones en el plano, caso rotaciones y traslaciones en alumnos de décimo grado de la Media Académica de este colegio, bajo el constructo teórico de Humans with Media utilizando el software GeoGebra, que a su vez servirá como referente para dinamizar las prácticas pedagógicas en otras áreas de este entorno educativo rural, que se interroguen por estas debilidades en el contexto educativo de desempeño y que permita generar algunos aportes para el mejoramiento de la calidad de estos procesos en los estudiantes.

Las evidencias y conclusiones que aportó este estudio y las relaciones y cuestiones que ponga de manifiesto, apoyados y contrastados con los de otros estudios, pueden ayudar a construir explicaciones, sobre la caracterización e interpretación de los tipos de razonamiento geométrico utilizados por los estudiantes a partir del análisis de sus actuaciones durante la resolución de tareas de matemáticas.

LENIS Y. SANTAFÉ R.

Este trabajo de investigación buscó destacar los principios y las condiciones que rigen el aprendizaje escolar, en su proceso de razonamiento geométrico, que implica la utilización de estrategias y procedimientos que abordan tanto a los tipos de aprendizaje que se producen en el aula, como a las características y rasgos psicológicos propios del estudiante que pone en juego cuando aprende; la finalidad es clarificar las maneras de llevar a cabo el aprendizaje de las transformaciones en el plano, caracterizando e interpretando las formas de razonamiento que usan los estudiantes al realizar actividades matemáticas que se les proponen en un entorno virtual.

A partir de lo anterior se plantearon algunos interrogantes y cuestionamientos al respecto, que fueron los hilos conductores de este estudio: ¿qué conceptos subyacen a las transformaciones en el plano y son necesarios para la comprensión del modelo de Van Hiele y sus respectivos niveles? ¿La Teoría de Humans with Media propicia la comprensión del modelo de Van Hiele? ¿Cómo se realiza el proceso de aprendizaje en los estudiantes? ¿Cómo aprenden los estudiantes el tema de las transformaciones en el plano cuando cursan 10° grado? ¿Qué características tiene ese proceso de aprendizaje? ¿Cómo es el proceso de razonamiento de los estudiantes sobre las transformaciones en el plano? ¿El software GeoGebra favorece el proceso de aprendizaje de las transformaciones en el plano?

A partir de estos cuestionamientos surgió el objetivo principal de esta investigación a saber, Generar elementos teóricos que contribuyan a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele sustentado en el aprendizaje significativo y el constructo Humans with Media con el uso de GeoGebra sobre las transformaciones en el plano, en estudiantes de la media académica de la Institución Educativa Provincial San José.

Para conseguir este gran propósito se debieron seguir las siguientes acciones: Identificar las perspectivas teóricas que fundamentan el proceso de aprendizaje de las transformaciones en el plano; Interpretar las concepciones de los estudiantes de la Institución Educativa Provincial San José sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las transformaciones en el plano; Caracterizar elementos del desarrollo del proceso de aprendizaje de los estudiantes en situaciones matemáticas escolares enmarcadas en el constructo teórico Humans with Media el caso de GeoGebra del tema de transformaciones en el plano, caso traslaciones y rotaciones; Analizar desde la óptica de los niveles de Van Hiele la evolución del razonamiento de los estudiantes en el contexto del aprendizaje de las transformaciones en el

plano a partir del uso de GeoGebra; Interpretar el proceso de aprendizaje desde la estructura de los niveles de Van Hiele del tópico geométrico de las transformaciones en el plano, caso traslaciones y rotaciones utilizando GeoGebra.

Marco Teórico

Teniendo en cuenta el interés por alcanzar los objetivos planteados, se conformó fundamentaron tres ejes centrales: el contenido matemático de las transformaciones en el plano, el proceso de aprendizaje, la teoría del aprendizaje significativo y la teoría Humans-with-Media; y la actividad de los estudiantes desde la óptica del modelo de Van Hiele.

Aspectos matemáticos del concepto de transformación geométrica

Para los autores Santana, Gutiérrez, Herrera y Abreu (2013) una transformación geométrica se define como:

Si tenemos una función biyectiva que asigna a cada punto de un plano otro punto de ese plano, a un punto del espacio otro punto del espacio, entonces en ambos casos tenemos una transformación, lo cual nos indica que en general una transformación es toda correspondencia biunívoca entre puntos del plano o del espacio. (p. 15)

La noción de transformación se encuentra muy relacionada con el concepto matemático de función como se puede apreciar en esta definición: Sean A y B dos conjuntos. Una función de A en B es una regla que a cada elemento de A asocia un único elemento de B.

Las transformaciones en el plano son herramientas muy útiles para resolver problemas que originalmente se presentan de forma compleja; en ellas se identifican algunos elementos para su tratamiento, (ver gráfico 1) como son los elementos característicos, que definen la correspondencia entre las figura original y homóloga de una transformación. Los elementos dobles que son los homólogos de sí mismos en una transformación; producto de transformaciones, los que se obtienen por la aplicación sucesiva de dos o más transformaciones parciales en un orden determinado.

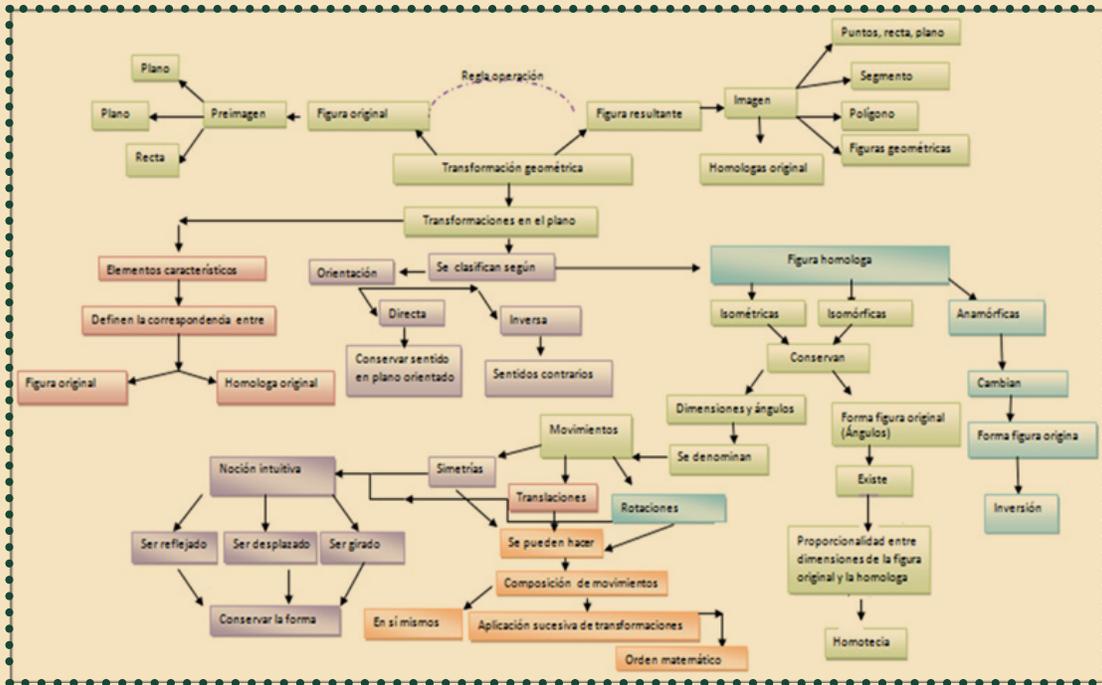


Gráfico1. Aspectos matemáticos del concepto de transformación en el plano.

Elaboración propia del autor.

Las Transformaciones en el Plano como Objeto de Enseñanza y de Aprendizaje

Para Montes (2012) el concepto matemático de traslación y rotación inscrito dentro del ámbito del proceso de enseñanza y aprendizaje conlleva una serie de requerimientos que van desde el abordaje para su utilización en el lenguaje común, pasando por el uso del término en situaciones “parecidas”, hasta los que puede tener cuando, además de lo cotidiano, se le utiliza en el currículo escolar como referente para la particularización en el manejo de imágenes, cantidades, figuras, etcétera. Más allá de tratar de establecer diferencias gramaticales relacionadas con sus significados netamente subjetivos se busca hacer énfasis en los significantes inherentes a las conceptualizaciones del lenguaje matemático.

Actitudes para el aprendizaje de las matemáticas. La actitud positiva hacia el aprendizaje de la matemática es el motor que mueve toda conducta, y que permite provocar cambios tanto a nivel escolar como en la vida en general; es el elemento principal para aumentar el desempeño en el aula. Hace parte de la motivación, que según Tapia (citado en González, 2016), es un factor relevante que conlleva el éxito en cualquier área. Este autor afirma que: “querer aprender y saber son las condiciones personales básicas que permiten la adquisición de nuevos conocimientos y la aplicación de lo aprendido de forma efectiva cuando se necesita”, p. 11. Según lo anterior, se requiere la buena disposición y el interés para obtener el aprendizaje, teniendo en cuenta el rol del docente a través de la estimulación utilizando herramientas tecnológicas hacia las acciones logradas por el estudiante.

Aprendizaje significativo. Se toma como referente teórico la teoría de Ausubel (citado en Ruíz., Martínez, y otros, 2012) la cual se inscribe en el marco de las teorías cognitivas, y cuyo eje central gira en torno al aprendizaje que ocurre en el ambiente escolar, bajo un marco instruccional de carácter formal. Según este autor el proceso de aprendizaje significativo “reside en que ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo no arbitrario, sino sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe, señaladamente con algún aspecto esencial de su estructura de conocimientos...”

El aprendizaje se podrá establecer como significativo si, al relacionarse con los conocimientos previos del estudiante, se interrelaciona, adquiere significado y puede incorporarse a las estructuras de conocimiento. Para este autor cualquier experiencia de aprendizaje, enmarcada en una situación escolar, puede ser abordada a partir de dos ejes, uno vertical (referido al estudiante), que puede clasificarse en la categoría de memorización o de repetición, o bien en la categoría de aprendizaje significativo.

Aprendizaje de las transformaciones en el plano. El aprendizaje de las transformaciones en el plano, se constituye como uno de los ejes centrales de este estudio, y la forma como se desarrolla es una de nuestras inquietudes principales. Según algunos autores como Escrivá, Beltrán-Meneu, Gutiérrez, Jaime; (2016), este proceso se desarrolla bajo el marco de un aprendizaje memorístico que presenta características propias de esta tendencia, entre las cuales se puede mencionar: la incorporación no sustantiva, arbitraria y verbalista de los nuevos conocimientos de transformaciones en el plano en la estructura cognitiva de los estudiantes; poco o ningún esfuerzo por

LENIS Y. SANTAFÉ R.

integrar los nuevos conocimientos de movimientos rígidos en el plano con conceptos ya existentes en la estructura cognitiva; presencia de un aprendizaje no relacionado con experiencias concretas, con hechos u objetos reales, entre otros.

Constructo teórico Humans-with-Media

Este constructo teórico está soportado en dos ideas centrales: la cognición no es un trabajo individual sino más bien de naturaleza colectiva; y que la construcción del conocimiento incluye herramientas, dispositivos, artefactos y medios con los cuales el conocimiento es producido (Borba & Villareal, 2010). Dentro de esta teoría no se concibe la separación entre los medios y las personas, pues los medios son componentes del sujeto epistémico, no son simples auxiliares ni complementos, sino una parte esencial y constitutiva de éste. Para estos investigadores, los medios son tan relevantes y de fundamental importancia, puesto que el uso de diversos tipos de medios conduce a la generación de diferentes tipos conocimiento de acuerdo a los grupos donde se desarrollen y al entorno donde se presente.

Para Levy (citado por Borba, 2012), la historia de los medios siempre estará entrelazada con la historia de la propia humanidad; en Humans-with-Media se presta especial atención a cómo a través de la modelación, la visualización, la Educación On-line y la experimentación se construye en conocimiento matemático escolar. Particularmente, en dicho constructo se muestra una perspectiva de la modelación con un enfoque pedagógico que está en sinergia con el uso de las tecnologías de la información y la comunicación, para nuestro caso la utilización del software GeoGebra.

La experimentación con tecnología, aunado con la modelación se convierte en un ambiente en el que se promueve la formulación de conjeturas su discusión y prueba (Borba, 2012). De esa manera, estos investigadores resaltan que, en el planteamiento de problemas, en estrecha relación con la modelación, va mucho más allá de la formulación de un problema matemático; ello implica que son los estudiantes quienes deben elegir, en asesoría con sus profesores, el tema o fenómeno de estudio el cual puede estar fuera del ámbito matemático.

Descripción inicial de los niveles de Van Hiele para las transformaciones en el plano

Se desarrollan los primeros cuatro niveles de razonamiento, en los descriptores generales de los niveles de Van Hiele teniendo en cuenta los contenidos matemáticos a tratar.

Nivel 1 de Visualización y Reconocimiento: Los estudiantes razonan sobre conceptos geométricos básicos, de tal manera que reconocen sus propiedades y elementos físicos globales sin considerar explícitamente las características de sus componentes, se perciben las formas y las figuras como un todo global. No se reconocen ni se relacionan las partes y elementos componentes de las figuras. No se involucran las propiedades particulares y determinantes de las figuras. Se puede producir una copia de cada figura particular o reconocerla.

Nivel 2 o de Análisis: Los estudiantes razonan sobre conceptos geométricos a través de la observación y la experimentación, además comienzan a establecer las propiedades matemáticas necesarias del concepto. Las demostraciones en este nivel son empíricas, llevadas a cabo por los estudiantes mediante la verificación en ejemplos. En este nivel se pueden relacionar y analizar las partes y propiedades particulares de las figuras, pero no se determinan relaciones entre distintas familias y grupos de figuras. Se establecen experimentalmente las propiedades de las figuras.

Nivel 3 o Deducción informal. Los estudiantes razonan sobre la manera de ordenar lógicamente las propiedades de los conceptos. Además, pueden formular definiciones abstractas y distinguir las propiedades suficientes y necesarias al determinar un concepto. Se comprenden demostraciones deductivas y se adaptan a otra análoga. Hay un nivel de relación y comprensión de las definiciones iniciales que describen las interrelaciones con sus partes constituyentes.

Nivel 4 o de Deducción formal: Los estudiantes razonan formalmente en el contexto de la estructura axiomática de las matemáticas (términos indefinidos, axiomas, definiciones, teoremas, etc.). Es decir, pueden comprender y construir demostraciones formales (no memorizadas). También, es posible la comprensión por parte de los estudiantes de poder obtener resultados desde distintas premisas o mediante diferentes formas de demostración. En esta etapa se pueden desarrollar y organizar

LENIS Y. SANTAFÉ R.

secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra, no existe ni se reconoce la necesidad del rigor en los razonamientos.

Puede suceder que los estudiantes aparenten un nivel superior al que realmente poseen porque han aprendido procedimientos rutinarios propios del nivel superior, aunque realmente no los comprendan. Por esto es fundamental, que el investigador y el profesor, permanentemente, indaguen a sus estudiantes durante el desarrollo de las tareas, sobre lo que están haciendo con el fin de verificar si se están aplicando o no procesos rutinarios.

El modelo en su segunda parte, también propone cinco fases de enseñanza que guían y orientan al docente en el diseño de experiencias de aprendizaje adecuadas para el progreso del estudiante en su aprendizaje y en sus niveles de razonamiento en Geometría. Las fases están asociadas a cada nivel de razonamiento, es decir, para cada uno, el profesor diseña la instrucción teniendo en cuenta las fases desde la primera hasta la última.

Fase 1: Discernimiento o de Información e Indagación. El profesor dialoga con los estudiantes y les informa del tema que van a desarrollar, los objetivos de estudio y las actividades que planea desarrollar. También, es el momento para que el docente se entere de los conocimientos previos que tienen los estudiantes que son pertinentes para el desarrollo del nuevo.

Fase 2: Orientación dirigida. En esta fase el profesor presenta gradualmente el material compuesto de tareas cortas que generen respuestas específicas, que ha preparado cuidadosamente para que los estudiantes exploren el nuevo tema de estudio. La exploración incluye que los estudiantes descubran y aprendan las posibles relaciones o componentes básicos que deben formar.

Fase 3: Explicitación. Es en esta etapa donde se realiza un afianzamiento del tópico que se está estudiando, el cual incluye el manejo adecuado del lenguaje técnico, características, propiedades, relaciones que se han observado y analizado.

Fase 4: Orientación libre. El docente debe preparar tareas que sean novedosas, diferentes a las que ha propuesto antes (con muchos pasos e incluso más complejas), que tengan diferentes vías de resolución, que le permitan a los estudiantes establecer relaciones entre los objetos que están estudiando.

Fase 5: Integración. Los estudiantes, con ayuda del profesor, realizan un resumen de todo lo aprendido, lo que les permitirá tener una visión global de los objetos y relaciones en relación al tema de estudio.

Métodos

El fundamento epistemológico para este trabajo de investigación, se ubicó dentro del enfoque interpretativo, el cual se centra en el estudio de los significados de las acciones humanas y de la vida social, que para el caso se construyó con base en los documentos escritos que se obtengan con los diferentes instrumentos de recolección aplicados en el trabajo de campo. En esta perspectiva se buscaron las nociones de comprensión, significado y acción de una situación, (que corresponde al proceso de aprendizaje bajo la estructura del modelo de Van Hiele en el marco del constructo Humans with Media), comprenderla a través de la visión de los sujetos, estudiar sus creencias, intenciones, motivaciones y otras características del proceso educativo no observables directamente ni susceptibles de experimentación;

Por eso, no existe una sola verdad, sino que surge como una configuración de los diversos significados que las personas le dan a las situaciones en las cuales se encuentra. La realidad social es así, una realidad construida con base en los marcos de referencia de los actores, Martínez (citado en Peña, 2018).

El modo de pensamiento abordado es la Fenomenología, la cual tuvo su origen en las tradiciones filosófica y psicológica y destaca el énfasis sobre lo individual y sobre la experiencia subjetiva, puesto que el interés principal circunda sobre el proceso de aprendizaje que desarrolla cada uno de los sujetos informantes clave (los veinte estudiantes); La fenomenología se preocupa por la comprensión de los actores sociales y por ello de la realidad subjetiva, comprende los fenómenos a partir del sentido que adquieren las cosas para los actores sociales en el marco de su proyecto del mundo, intenta no partir de supuesto previo alguno; los autores que aluden a ella, definen la investigación de la siguiente manera: la investigación en fenomenología es el estudio de la experiencia vital, de la cotidianidad y del mundo de vida Van Manen, Rodríguez, Gil y García (citados en Ortega, Nocetti y Ortiz, 2015).

Respecto a los estudiantes involucrados, intentar hacer un seguimiento para efectuar una caracterización e interpretación de sus razonamientos desde la teoría de Van Hiele y el constructo teórico de Humans with Media,

LENIS Y. SANTAFÉ R.

con miras a efectuar y mantener un amplio campo de aspectos a observar en este sentido, profundizando de este modo en nuestra comprensión del fenómeno, nos llevó a restringir el estudio al caso de un grupo de veinte estudiantes. Según López (2013), un estudio de caso es la investigación empírica de un fenómeno del cual se desea aprender dentro de su contexto real cotidiano; así mismo indica que, el estudio de caso es especialmente útil cuando los límites o bordes entre fenómenos y contexto no son del todo evidentes, por lo cual se requieren múltiples fuentes de evidencia.

En este sentido, para este estudio, se trata de un estudio de caso múltiple, orientado a apreciar, indagar, e interpretar en la profundidad de los hechos particulares (situaciones sociales, trama de relaciones, interacciones, incidentes críticos, etc.) que suceden en el aula de clases, y cómo los estudiantes construyen sus conocimientos y desarrollan su proceso de aprendizaje de las transformaciones en el plano, caso traslaciones y rotaciones, en el marco del aprendizaje significativo y del Modelo de Van Hiele apoyados en el uso del software GeoGebra.

Los sujetos informantes clave para este estudio se encuentran ubicados en la Institución Educativa Provincial San José; institución de carácter oficial, perteneciente a la zona urbana del municipio. El grupo de estudiantes, son de 10° grado, curso en el cual se orienta el tema de las transformaciones en el plano según lo estipulado por el Ministerio de Educación Nacional, en los Estándares Básicos de Competencias (2006) y en la segunda versión de los Derechos Básicos de Aprendizaje (2017). Estos jóvenes poseen edades entre los 15 y 16 años, y se encuentran dentro de lo que se denomina el período de adolescencia tardía; el tipo de pensamiento que surge en esta época, se caracteriza por ser un pensamiento hipotético-deductivo que le permite al sujeto llegar a deducciones a partir de hipótesis enunciadas verbalmente; y que son, según Piaget (1970) citado en Arias, Merino y otros (2017), las más adecuadas para interactuar e interpretar la realidad objetiva.

Ahora bien, la calidad, pertinencia y validez de los resultados de una investigación dependen del proceso de recolección de la información. En esta etapa del estudio, las personas involucradas en la situación analizada (los veinte estudiantes de la Institución Educativa Provincial San José), se convirtieron en los verdaderos protagonistas del proceso investigativo; los actores nos permitieron escuchar con su propia voz y en sus propias palabras, las narraciones y relatos a través de los cuales se expresaban sus conocimientos, sus actitudes, sus prácticas sociales, sus concepciones, sus

sueños y frustraciones, las inequidades y exclusiones de las que han sido objeto, así como también sus expectativas, fortalezas y potencialidades en el proceso de aprendizaje de la matemática, específicamente en el tema geométrico de las transformaciones en el plano utilizando el software GeoGebra.

Los datos cualitativos fueron recogidos de varias maneras, de acuerdo a la forma como se percibe e interpreta la realidad: a través de observaciones, por medio de las cuales se hicieron descripciones detalladas de situaciones propias del proceso de aprendizaje de los estudiantes en el tema de transformaciones en el plano, de sus comportamientos observados en el desarrollo de las actividades propuestas y a través de los medios de grabaciones de audio; también de acuerdo a la perspectiva de los demás participantes en la investigación, por medio de narraciones que hicieron los estudiantes sobre sus experiencias concretas, creencias, concepciones y comportamientos dentro del proceso de aprendizaje de las matemáticas, específicamente en el caso de las entrevistas (cuestionario inicial y entrevista semiestructurada).

Los instrumentos diseñados para este estudio intentaron recoger la "complejidad cognitiva" de la caracterización de las formas de razonamiento de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas significativas de transformaciones en el plano desde la óptica de los niveles de Van Hiele en el marco del constructo teórico de Humans with Media. Hemos tenido en cuenta diferentes fuentes con el fin de confrontar la información obtenida como lo sugieren diversos autores como Alzás y Casa (2017) cuando plantean llevar a efecto la triangulación de la información, es decir, la confrontación de la información obtenida de fuentes distintas y en situaciones variadas.

Para este estudio, los instrumentos que se emplearon en la recolección de la información en primer lugar, serán instrumentos de observación directa, con una lista de control que pretende registrar el nivel de desarrollo presentado por los estudiantes en su contexto de aprendizaje. Así mismo, se utilizaron registros abiertos mediante diarios de campo, con los que se busca recolectar información cualitativa de las interacciones y demás elementos que indiquen los procesos mentales que abordan los aprendices en determinados momentos, así como las consideraciones de desarrollo y crecimiento personal expresados por los sujetos de investigación en un permanente diálogo.

LENIS Y. SANTAFÉ R.

Así mismo, se utilizó la entrevista con pregunta semiestructurada, que de acuerdo con Martínez (2011), parte de una pauta o guía de preguntas con los temas o elementos claves que se quieren investigar o profundizar de una exploración previa con el informante. Las mismas preguntas pueden ser planteadas de diferente manera o varios informantes si es el caso, esto implica que no hay secuencia en el orden de la pregunta y depende mucho de las respuestas dadas. Es un instrumento que nos permitió explorar en detalle el mundo personal de los estudiantes entrevistados, hacer de ellos el centro del proceso, y crear el ambiente apropiado para que surgiera una narración de su pasado y su presente, que facilitó la recolección de la información que no había podido ser captada con los métodos de observación directa. El marco de realización es de este tipo de entrevistas fue abierto y en un ambiente de cordialidad, para ello existió la relación de empatía con el informante.

Para efectos de la triangulación que hemos hablado, varias han sido las fuentes de información que planeamos obtener: entrevista inicial (mediante cuestionarios), entrevistas semiestructuradas, grabaciones de audio y observaciones de clase, que fueron los medios establecidos para extraer los datos requeridos de los sujetos informantes clave dentro de la comunidad de análisis, los estudiantes de 10° de la IE Provincial San José como los conocedores del fenómeno proceso de aprendizaje de las transformaciones en el plano utilizando el software GeoGebra, por lo cual puede considerarse que sus opiniones son representativas del conocimiento cultural compartido por el grupo estudiado, Bonilla y Rodríguez (citados en Monje, 2011).

Criterios y Procedimientos de Análisis de los Datos

Un primer análisis, que llamaremos “informal”, surgió durante la recogida de la información. Como fruto de las reflexiones diarias del investigador, se elaboró un primer listado de ideas, conjeturas, intuiciones y preguntas sobre lo que se preveía y sobre lo que se estaba produciendo en el aula de clase. El análisis más “formal” se hizo una vez se terminó la aplicación de las actividades con los estudiantes y se transcribieron las observaciones de clase, se editaron las grabaciones de audio, se transcribieron las entrevistas semiestructuradas (pre y postsesión); y, en general, se organizó la información recolectada, momento en el cual se focalizó el estudio específico de la información.

Como se ha mencionado, hemos utilizado el método de triangulación que de acuerdo a Alzás, Casa y otros (2016), consiste en utilizar diferentes técnicas de una misma metodología de modo que permita evaluar de manera similar los resultados obtenidos, verificando así los hallazgos de forma cualitativa. Se considera como un control cruzado que emplea diferentes fuentes, instrumentos o técnicas para la recolección de datos. Para el caso de este estudio, se aplicó la triangulación metodológica, en la que se reunieron los datos obtenidos a través de los diferentes instrumentos de recolección de la información aplicados (observación, entrevista inicial y semiestructurada, grabaciones de audio y producciones escritas), sobre la misma situación (el proceso de aprendizaje de las transformaciones en el plano utilizando el software GeoGebra) efectuados desde diversas perspectivas para compararlos, contrastarlos, y complementarlos.

En relación con la entrevista inicial, en la primera parte (cuestionario I y II) se realizó un análisis descriptivo por bloques de preguntas; de este apartado obtuvimos una primera aproximación acerca de la forma como los estudiantes se comportan ante diversas tareas matemáticas planteadas sobre transformaciones en el plano, sobre el uso del software GeoGebra y ante el planteamiento de problemas contextualizados; en relación al gusto por las matemáticas, a la concepción que tienen los estudiantes sobre las matemáticas, y sobre las prácticas de enseñanza de los maestros, del tema de estudio, y el proceso de aprendizaje.

Con base en los resultados obtenidos en el análisis de dicho instrumento (entrevista inicial) hemos realizado una integración de los mismos con el fin de obtener el desarrollo cognitivo y comportamental de los estudiantes. En relación a las entrevistas semiestructuradas (pre y postsesión), después de realizada la transcripción completa de las mismas, el proceso de tratamiento analítico siguió, en la práctica, los siguientes pasos:

- 1.** Lectura de las transcripciones, delimitando o subrayando los fragmentos textuales que se referían a cada uno de los tres componentes del contenido de desarrollo cognitivo y comportamental del estudiante (matemático, didáctico y actitudinal). Al margen se iban haciendo anotaciones (códigos), para indicar a cuál de los aspectos de cada componente correspondía cada fragmento transcrito.

- 2.** Una vez hecha la codificación en las transcripciones, se procedió a juntar todos los fragmentos que se referían a un mismo componente; para tal fin, se utilizaron cuadros de ordenamiento de información.

LENIS Y. SANTAFÉ R.

3. Con el material reunido, se procedió a interpretarlo componente a componente para finalmente, interpretar y caracterizar elementos del desarrollo comportamental y cognitivo de los estudiantes durante la experiencia, utilizando los diferentes momentos del instrumento entrevista semiestructurada, en la presesión y en la postsesión

La construcción a partir de los datos cualitativos inició con un fraccionamiento del universo de análisis en subconjuntos de datos ordenados, que se realizó de acuerdo a las respuestas relativas a cada tema, en grupos, identificando las fuentes de información y se organizaron en matrices, para luego recomponerlos inductivamente en categorías que reflejen una visión totalizante de la situación estudiada Bonilla y Rodríguez (citado en Monje, 2011), el proceso de aprendizaje de las transformaciones en el plano, caso traslaciones y rotaciones utilizando el software GeoGebra.

En este estudio en particular, el análisis inductivo permitió generar a partir de las seis categorías deductivas iniciales (Motivación escolar, Concepción de los estudiantes sobre las matemáticas, Enseñanza de las matemáticas, Proceso de aprendizaje, Aprendizaje de las transformaciones en el plano y Uso de software de geometría), 22 categorías inductivas con sus códigos correspondientes, se buscó en los datos patrones de regularidad en las respuestas; se definieron a partir de estas regularidades unas categorías iniciales que fueron asignadas a los conjuntos de datos; se determinó la relación entre los datos y la agrupación entre ellos, para revisar la homogeneidad interna de las categorías; se verificó que las categorías fueran mutuamente excluyentes, independientes entre sí; se hizo revisión del sistema de categorías por expertos que dieron su opinión y aportes al respecto; se verificó la condición de que las categorías reflejaran la experiencia realizada tal y como es percibida por los estudiantes, para revisar la validez del sistema de categorías con los estudiantes.

En esta investigación la credibilidad está presente en varios aspectos: la transferibilidad: la información que se recolectó no fue de ninguna manera generalizable, fue muy particular, pero la suficiente para obtener los datos descriptivos, pues permitió vislumbrar las posibles situaciones propias del proceso de aprendizaje de las transformaciones en el plano; otro aspecto es la dependencia: la información recolectada con los estudiantes entrevistados, se relaciona entre sí manteniendo una estabilidad en éstos; la confirmabilidad es otro elemento que certifica la existencia de los datos para cada interpretación, a través de transcripciones, registros de audio, apuntes

y consentimientos informados; y, por último la triangulación: que se realizó por fuentes, es decir, comprendió fuentes de las mismas características, distintos informantes para la recolección de la información con el fin de obtener diversas visiones para el propósito de la validación de este estudio.

Resultados y Discusión

Los estudiantes participantes en este estudio, fueron seleccionados por el profesor titular del curso, quien bajo su criterio escogió a los veinte jóvenes tomando como referencia su desempeño académico, dentro del cual se abarcó desde el nivel alto hasta el nivel bajo de su desarrollo cognitivo. La metodología usada para el análisis de sus actuaciones se convierte en un punto de partida fructífero en la formación de estudiantes de secundaria, en la medida que presenta las características de replicabilidad que hace que pueda ser utilizada en otras investigaciones, lo cual constituye una aportación para futuros estudios en el campo.

En relación con los objetivos de la investigación se pudo constatar que:

- El estudiante se cuestione sobre algunas de sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

- El estudiante reflexione sobre sus actitudes positivas, negativas y de cambio en las creencias sobre el aprendizaje y la enseñanza de las transformaciones en el plano y de la matemática en general utilizando tecnología.

- El estudiante se muestre receptivo ante nuevos planteamientos que surgen de propuestas externas (diseños curriculares) apoyados en el uso de software especializado y estar deseoso de saber cómo desarrollarlas en las prácticas reales.

La entrevista inicial y las entrevistas semiestructuradas a los estudiantes mostraron que esta técnica posee características únicas como instrumentos de obtención de información sobre el estudiante, ya que:

- Hacen hincapié en el aprendizaje del estudiante y en el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

LENIS Y. SANTAFÉ R.

- Permiten reflexionar sobre la práctica de aprendizaje de los estudiantes apoyados en tecnología.
- Permiten la revisión del diseño y la promulgación de nuevas acciones, tendientes al mejoramiento de la calidad del aprendizaje de las matemáticas.
- Permiten que el estudiante organice de manera secuencial los resultados de la ejecución de las actividades de aprendizaje de las matemáticas utilizando el software GeoGebra.
- Permiten examinar el aprendizaje y la enseñanza de las transformaciones en el plano como un todo integrado y obtener una mayor comprensión del desarrollo del proceso de aprendizaje de este tópico específico con el uso de herramientas tecnológicas.

En general se concluye que el proceso llevado a cabo ha resultado ser una vía importante para iniciar un desarrollo del proceso de aprendizaje con los estudiantes participantes que, con seguridad, será continuado de manera orientada y autónoma. El modo en que se propicia la reflexión de los estudiantes y la movilización de sus ideas sobre las matemáticas, sobre el tema de estudio, su enseñanza y aprendizaje, el uso del software GeoGebra, sus características y necesidades y, sobre todo, la propia consciencia y decisión sobre su proceso de desarrollo cognitivo, avalan que los alumnos se han implicado en la investigación y lo hayan hecho en un proceso personal para el desarrollo de su aprendizaje.

Uno de los resultados del análisis de la actuación de los estudiantes ha permitido confirmar que son varios los factores que inciden en el desarrollo cognitivo y en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, especialmente de la geometría, y que dependen exclusivamente del desempeño del profesor. Esta actuación, está determinada por sus creencias y concepciones, que son, en últimas, las que determinan las condiciones propicias para que se dé un proceso de enseñanza y de aprendizaje utilizando el software GeoGebra con resultados favorables.

Ahora bien, dentro de la actuación de los estudiantes, se encuentra un elemento fundamental referente a las estrategias didácticas para el aprendizaje de las matemáticas, específicamente en el campo de la geometría, las cuales se constituyen en herramientas poderosas que permiten desarrollar pensamiento y razonamiento de alto nivel, a través

de la interrelación de los nuevos conocimientos con los ya adquiridos o conocimientos previos que posee el estudiante (aprendizaje significativo), y su aplicación en diferentes contextos utilizando el software GeoGebra, para lograr una mejor comprensión de la idea que se comienza a desarrollar y así, a través de esta interacción, el sujeto logre una apropiación del conocimiento.

Se concluye entonces que, esta estrategia de trabajo sea utilizada para introducir los contenidos y durante todo su desarrollo, donde se recurre primordialmente al reconocimiento a través de la visualización, al análisis, y a la clasificación (niveles de razonamiento de Van Hiele) del objeto matemático a partir de su definición, características y propiedades, conducentes a la demostración y verificación de su validez.

Dentro de esta alternativa didáctica de trabajo, se realizan construcciones geométricas orientadas sobre el tópico de estudio (la traslación de figuras, la rotación de figuras planas y la composición entre los dos movimientos) utilizando el software GeoGebra, éstas se efectúan periódicamente al desarrollar el concepto, se profundiza en ellas, explorando las propiedades de las mismas o determinando sus elementos característicos, y efectuando el análisis de los argumentos que sostienen tales construcciones geométricas.

Puede señalarse que sí se aplican los conceptos geométricos del tópico de estudio a la resolución de problemas, dentro de los cuales se distinguen los de reconocimiento (para reforzar el aprendizaje del concepto), los de análisis (para profundizar en el aprendizaje del concepto) y los de aplicación y clasificación (utilizando algoritmos ya conocidos, y bajo la verificación y demostración de hipótesis). Se observa una tendencia a relacionar los contenidos geométricos del tema de estudio con otras áreas, y a relacionarlos con diferentes aspectos propios de la realidad en que se desarrolla el estudiante, hecho que resulta muy apropiado y de gran provecho para desarrollar procesos de aprendizaje de la geometría sobre transformaciones en el plano.

Por su parte los materiales y recursos didácticos que se utilizan en las clases de Geometría para abordar el tema de transformaciones en el plano, caso traslaciones y rotaciones son de gran importancia; sin embargo, solo se emplean algunos de ellos, entre los que puede mencionarse principalmente el tablero (para efectuar los dibujos) y los materiales pertinentes para realizar las construcciones geométricas planteadas en las trabajo (regla, compás,

LENIS Y. SANTAFÉ R.

semicírculo, escuadra), y el uso de software GeoGebra. Podría sintetizarse que, para las clases de Geometría, no se usan materiales y recursos didácticos distintos que, para cualquier otra rama de la Matemática, siendo los referidos los básicos dentro de la variedad de herramientas que podrían emplearse.

Las entrevistas inicial (cuestionario I y II) y semiestructurada aplicadas a los estudiantes de 10° de la Institución Educativa Provincial San José, permitieron conocer la información necesaria para ubicarnos en el contexto en el que se desarrollan los estudiantes de la localidad en estudio, además de los elementos señalados anteriormente, se evidencian entre otros aspectos relacionados con el bajo rendimiento en matemáticas, los asociados con la poca motivación escolar existente en los estudiantes, que no permite un óptimo desarrollo del conocimiento y de los procesos de aprendizaje, especialmente en el área de geometría, puesto que se vislumbra bajo interés, poca estimulación y baja actitud del estudiante hacia la matemática y su aprendizaje (Tapia, 1991 citado en Acosta, 2017).

Consideramos que la actitud resulta ser un fuerte aliado del estudiante que desea aprender geometría, donde las probabilidades de éxito para desarrollar el pensamiento y el razonamiento geométrico de alto nivel, mejoran con aquellos estudiantes que demuestran una buena disposición hacia la asignatura, a pesar de presentar dificultades cognoscitivas. Esta afirmación posiciona al plano emocional en un punto relevante para desarrollar procesos de aprendizaje y es responsabilidad de los docentes estimularlo, utilizando software especializado, fomentando en los estudiantes más confianza para cuando se enfrenten con el problema de solucionar situaciones que involucran a la geometría.

Otro elemento que bajo nuestra opinión es determinante como punto de partida para desarrollar un buen proceso de aprendizaje de las matemáticas y de la geometría, es el referente a las concepciones que tienen los estudiantes sobre las matemáticas, aspecto evidenciado en el cuestionario inicial, que se constituyó como una categoría de análisis para este trabajo, el cual hace presencia a través de tópicos específicos como las experiencias concretas que se plantean en la clase, por medio de las situaciones significativas abordadas en el aula apoyadas con el uso de tecnología, y a partir de los diferentes estilo de aprendizaje de las matemáticas que tienen los estudiantes.

Una categoría establecida como resultado del análisis de la información obtenida mediante las entrevistas, trata sobre la enseñanza de las matemáticas, en la que se plantean aspectos relacionados con las metodologías de enseñanza del área, donde se afirma que, los contenidos que se abordan se suelen presentar a los alumnos de forma acabada, quitándoles la posibilidad de descubrimiento y de construcción personal.

Dentro de los contenidos geométricos se priorizan las propiedades, sin demostrar ni conjeturar, para que luego sean aplicadas a situaciones reales, vinculadas casi exclusivamente a la resolución de ecuaciones; con los estilos de enseñanza en matemáticas, de acuerdo a la forma como los maestros desarrollan sus clases; acerca de las concepciones sobre los maestros de matemáticas, la concepción que se tiene sobre la evaluación en matemáticas y los recursos de enseñanza en matemáticas, aspectos que constituyen una gran herramienta de análisis, para abordar con mayor precisión situaciones concretas de aprendizaje que desarrollen los procesos de razonamiento matemático en los estudiantes.

Es conveniente destacar que estas conclusiones no son generalizables para todo el estudiantado. No fue este uno de los objetivos, ni la naturaleza del estudio; las historias de los veinte estudiantes son estudios de casos (de caso múltiple de los estudiantes) que proporcionan problemas y situaciones reales que ocurren en un aula de clase de matemáticas y que podrían ser valiosas, ya que incluyen un extenso abanico de posibilidades para que tanto investigadores/formadores, como profesores (inquietos por su práctica) reflexionen sobre los sucesos que se han presentado. A través del análisis y la discusión, éstos podrían proponer soluciones viables que sirvan para mejorar la propia práctica educativa.

Los resultados obtenidos en este estudio constituyen evidencias empíricas que aportan información tendiente, por una parte, a dar explicaciones sobre el desarrollo del proceso de aprendizaje de los estudiantes en matemáticas utilizando el software GeoGebra y, por otra, a comprender las formas de razonamiento de dichos estudiantes desde la óptica de los niveles de Van Hiele, a partir de la aplicación de una secuencia de actividades sobre el concepto de traslación y rotación como movimientos en el plano.

Las actuaciones de los estudiantes nos han permitido realizar caracterizaciones e interpretaciones de sus formas de razonar al resolver

LENIS Y. SANTAFÉ R.

las tareas que se les propusieron como parte del trabajo con las actividades seleccionadas para tal fin; los logros alcanzados fueron:

- Se confirmó en gran medida y se amplió el listado inicial de descriptores de nivel de razonamiento Van Hiele para las transformaciones en el plano, caso traslaciones y rotaciones de figuras planas apoyados en el uso del software GeoGebra.

- Se evidenciaron diferentes maneras de razonar de los estudiantes para procesar información, las cuales pueden ser usadas como "modelo" en el diseño de secuencias instruccionales en el tópico matemático de transformaciones en el plano, caso traslaciones y rotaciones de figuras planas utilizando tecnología.

- Se evidenció en un buen número de estudiantes el uso de imágenes y solución de ejercicios que desarrollen habilidades de visualización y análisis, que son componentes importantes de la actividad matemática que realizan. Lo anterior permite sugerir que el diseño de las tareas matemáticas (no solamente en el tópico de las transformaciones en el plano, caso de las rotaciones y traslaciones) dirigidas a los estudiantes debe permitir que ellos las exhiban y así posibilitarles que desarrollen más y mejores formas de pensamiento.

El diseño, la selección y la aplicación de las actividades para el aprendizaje de las transformaciones en el plano, caso traslaciones y rotaciones utilizando el software GeoGebra nos permitieron identificar su potencial en términos de:

- La conexión de los movimientos en el plano y las transformaciones geométricas, con las traslaciones y las rotaciones de figuras planas, la cual permitió que los estudiantes adquirieran una comprensión global del tema, así como más y mejores formas de razonamiento y, como consecuencia, potentes herramientas de argumentación. Lo anterior viéndose reflejado en, por ejemplo, que los estudiantes pudieran realizar demostraciones utilizando los elementos característicos de un movimiento en el plano, sus definiciones y propiedades, y pudieran abordar un rango más amplio de problemas para su resolución.

- El desarrollo secuencial y detallado del tema las transformaciones en el plano, caso traslaciones y rotaciones, que permite “llevar” al estudiante desde la noción intuitiva, pasando por las propiedades matemáticas de la definición, elementos característicos, construcciones geométricas de figuras trasladadas y rotadas, composición de rotaciones y traslaciones, movimiento resultante de la composición, descomposición de movimientos en el plano y, uso de las transformaciones en el plano en la resolución de problemas matemáticos.

- Su organización, presentando bloques de contenido en donde, a medida que se avanza en su diseño, se percibe un grado de dificultad ascendente y la relación entre los diferentes bloques.

- La descripción, observaciones, comentarios y sugerencias metodológicas que se le plantearon al profesor.

- Los objetivos que pretende alcanzar el desarrollo de cada una de las actividades propuestas.

- La conexión entre el modelo de razonamiento de Van Hiele, el constructo teórico Humans with Media y las transformaciones en el plano, caso traslaciones y rotaciones tenida en cuenta en el planteamiento de las tareas matemáticas.

De acuerdo a algunas de las declaraciones de los estudiantes y los registros obtenidos del desarrollo de las actividades aplicadas, se pudo percibir una fuerte tendencia hacia el aprendizaje de la Geometría dinámica, de forma no lineal, teniendo como protagonista al estudiante que trataba de solucionar las cuestiones utilizando en primera instancia los conocimientos previos que tenía (aprendizaje significativo), el software GeoGebra y la orientación hacia el trabajo dada por el profesor (que no consistía en hacerle el ejercicio), en cuyo caso primó claramente el nivel de razonamiento 2: análisis.

En este escenario, el estudiante fue un partícipe activo en la construcción de sus propios conocimientos, dejando de ser un receptor que captó y aplicó la información que le fue proporcionada.

Con respecto al transcurso del eje temático se realizaron algunas demostraciones, y se efectuaron las respectivas verificaciones. En cuanto

LENIS Y. SANTAFÉ R.

a las construcciones, fueron realizadas por unos cuantos estudiantes, y se orientan a la aplicación después de ser explicadas como una serie de pasos a seguir en un determinado instante, dándole la utilidad práctica y, sobre todo, el soporte conceptual matemático, que sirve de fundamento para garantizar que tal o cual construcción sea o no válida.

Por último, los resultados de este estudio permiten afirmar que es posible diseñar y elaborar actividades de aprendizaje en el tópico matemático de transformaciones en el plano, con estrategias enmarcadas en el uso del software GeoGebra y con enfoques diferentes a los que ofrecen los libros de texto actuales que desarrollen y potencien el razonamiento matemático y geométrico en los estudiantes a partir de situaciones reales enmarcadas en la teoría de aprendizaje significativo.

Referencias

Acosta, D. (2017). La función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele utilizando Geogebra para el fortalecimiento del proceso de aprendizaje de los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal los Patios. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Bucaramanga.

Alzás, T. y Casa, L. (2017). La Evolución del Concepto de Triangulación en la Investigación Social. Revista Pesquisa Qualitativa. São Paulo (SP), V.5, N.8, p. 395-418, ago. 2017.

Arias, P., Merino, M. y otros. (2017). Análisis de la Teoría de Pico-genética de Jean Piaget: Un aporte a la discusión. Revista Científica Dominio de las Ciencias. Vol. 3, núm. 3, junio, 2017, pp. 833-845. Dom. Cien., SIN: 2477-8818.

Barba, M. C. Humans-with-media and continuing education for mathematics teachers in online environments. ZDM Mathematics Education. Berlim. v. 44, p. 802-814, junho, 2012.

Borba, M. C. y Villareal, M. E. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education:notebooks, blackboards, calculators, computers and ... notebooks throughout 100 years of ICMI. ZDM Mathematics Education, 49-62.

Escrivá, M.T.; Beltrán-Meneu, M.J.; Gutiérrez, A.; Jaime, A. (2016): Habilidades de visualización de estudiantes de Primaria en actividades de geometría espacial. En J.A. Macías y otros (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (p. 595). Málaga: SEIEM.

Estándares Básicos de competencia. (2014). Ministerio de Educación Nacional. Gobierno en Línea.

González, J. (2016). Motivación y Abandono escolar en Educación Media. Universidad de la República Facultad de Psicología, Montevideo Uruguay.

Instituto Colombiano para el Fomento de la educación Superior (ICFES), (2016). Resultados de SABER 3°, 5°, 9° y 11°- 2014, 2015 y 2016. Dirección de Evaluación. Bogotá.

López, O. (2013). El estudio de casos: una vertiente para la investigación educativa. EDUCERE, vol. 17, núm. 56, enero-abril, 2013, pp. 139-144.

LENIS Y. SANTAFÉ R.

Universidad de los Andes Mérida, Venezuela.

Martínez, J. (2011). Métodos de Investigación Cualitativa. Revista de la Corporación Internacional para el Desarrollo Educativo Bogotá – Colombia. SILOGISMO Número 08 Publicación semestral, Julio – diciembre 2011.

Monje, C. (2011). Metodología de la Investigación Cuantitativa y Cualitativa guía didáctica. Universidad Surcolombiana. Facultad de Ciencias Sociales y humanas. Neiva.

Montes, S. (2012). Una Propuesta Didáctica para la Enseñanza de Transformaciones Geométricas en el plano con estudiantes de grado séptimo haciendo uso del entorno visual del juego PAC-MAN. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá Colombia.

Ortega, J., Nocetti, A. y Ortiz, L. (2015). Prácticas reflexivas del proceso de enseñanza en docentes universitarios de las ciencias de la salud. Universidad Católica de la Santísima de Concepción, Chile. Vol. 29, Núm. 3 (2015). Universidad Católica de la Santísima de Concepción, Chile.

Peña, I. (2018). Fortalecimiento del proceso aprendizaje de las funciones trigonométricas en el marco de la metodología resolución de problemas de George Pólya con estudiantes de décimo grado de la institución educativa Antonio Nariño del municipio de san José de Cúcuta

Ruíz, E., Martínez N., y otros, (2012). Aprendizaje colaborativo en ambientes virtuales y sus bases socioconstructivistas como vía para el aprendizaje significativo. Revista de Innovación Educativa, Volumen 4 N° 2. Universidad de Guadalajara.

Santana, J., Gutiérrez, A., Herrera, R. y Abreu, F. (2013). Matemática para la Educación

Media, Libro 4. Pág.15.