Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Enero-Junio 2020. Vol. 17, N° 1
Revista Multidisciplinaria Dialógica

Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Vicerrectorado de Investigación y Postgrado
Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara"
Subdirección de Investigación y Postgrado

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN DE NÚMEROS REALES Y LÍMITE DE LAS FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL: ANÁLISIS DE CONTENIDO

Autor: Rolando Antonio García Hernández
rolandoantoniogarciahernandez@gmail.com
Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL-IPMAR)
Maracay, Venezuela

PP. 05-34

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Enero-Junio 2020. Vol. 17, N° 1
Revista Multidisciplinaria Dialógica

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN DE NÚMEROS REALES Y LÍMITE DE LAS FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL: ANÁLISIS DE CONTENIDO

Autor: Rolando Antonio García Hernández
rolandoantoniogarciahernandez@gmail.com
Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL-IPMAR)
Maracay, Venezuela

Recibido: Septiembre 2019 **Aceptado:** Abril 2020

RESUMEN

La presente investigación tiene como propósito realizar el análisis de contenido del tópico matemático Límite, tanto de sucesiones de números reales como de funciones reales de una variable real. Este análisis de contenido se llevó a cabo con la noción que plantea Rico (2013), la cual distingue tres tipos de significados: la estructura, los sistemas de representación y los fenómenos asociados. En primer lugar se describirán los sistemas de representación de la noción de límite y luego los fenómenos asociados presentes en 15 libros de texto universitarios impresos. Esta investigación se encuentra inmersa en el paradigma post-positivista, enfoque cualitativo, se empleó el método hermenéutico para interpretar las concepciones de tres estudiantes de la especialidad de Matemática de la UPEL – Maracay en cuanto al aprendizaje de los límites, reflejadas en las entrevistas. Como resultado se devela la estructura de los límites.

Palabras Clave: Límite de Sucesiones de Números Reales, Límite de Funciones Reales de una Variable Real, Análisis de Contenido**.**

LIMIT OF A SUCCESSION OF REAL NUMBERS AND LIMIT OF REAL FUNCTIONS OF A REAL VARIABLE: CONTENT ANALYSIS

ABSTRACT

The purpose of the present research is to perform the content analysis of the mathematical topic Limit, both of successions of real numbers and of real functions of a real variable. This content analysis was carried out with the notion proposed by Rico (2013), which distinguishes three types of meanings: structure, systems of representation and associated phenomena. First, we will describe the systems of representation of the notion of boundary and then the associated phenomena present in 15 university textbooks printed. This research is immersed in the post-positivist paradigm, qualitative approach, the hermeneutic method was used to interpret the conceptions of three students of the Mathematics specialty of the UPEL - Maracay in terms of learning the limits, reflected in the interviews. As a result a structure of the boundaries is unveiled.

Key Words: Real Number Sequence Limit, Real Variable Real Function Limit, Content Analysis.

Introducción

En la presente investigación (empleada por el autor como trabajo de ascenso a la categoría académica de Agregado) se planteó realizar un análisis de contenido del tópico matemático Límite, tanto de sucesiones de números reales como de funciones reales de una variable real. Este análisis de contenido se llevará a cabo con la noción que plantea Rico (2013), la cual distingue tres tipos de significados: los sistemas de representación, los fenómenos asociados, y la estructura y análisis formal.

En primer lugar se describirán los sistemas de representación de las nociones: límite de una sucesión de números reales y límite de las funciones reales de una variable real que emplean los autores de 15 textos universitarios impresos, tomando como base los sistemas de representación de las funciones establecidos por Escobar (1998) y Rojas y Salazar (1985), y los determinados por Claros, Coriat y Sánchez (2007) en cuanto al concepto de límite.

Luego se identificarán los fenómenos asociados a este tópico matemático presentes en los mismos 15 textos universitarios mencionados anteriormente. Estos fenómenos que organizan la definición de límite son los que señalan Claros, Coriat y Sánchez (2007).

Después de estudiar los sistemas de representación y los fenómenos asociados a esta definición tan importante del análisis matemático, y con el aporte descrito por Azcárate y Camacho (2003) denominado descomposición genética del concepto que se logra a través de: la comprensión que posee el investigador sobre el concepto en cuestión, las investigaciones previas realizadas sobre el concepto en estudio y las observaciones de los estudiantes. Se procederá a develar la estructura y análisis formal del límite (ver Gráfico 1).

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Enero-Junio 2020. Vol. 17, N° 1
Revista Multidisciplinaria Dialógica

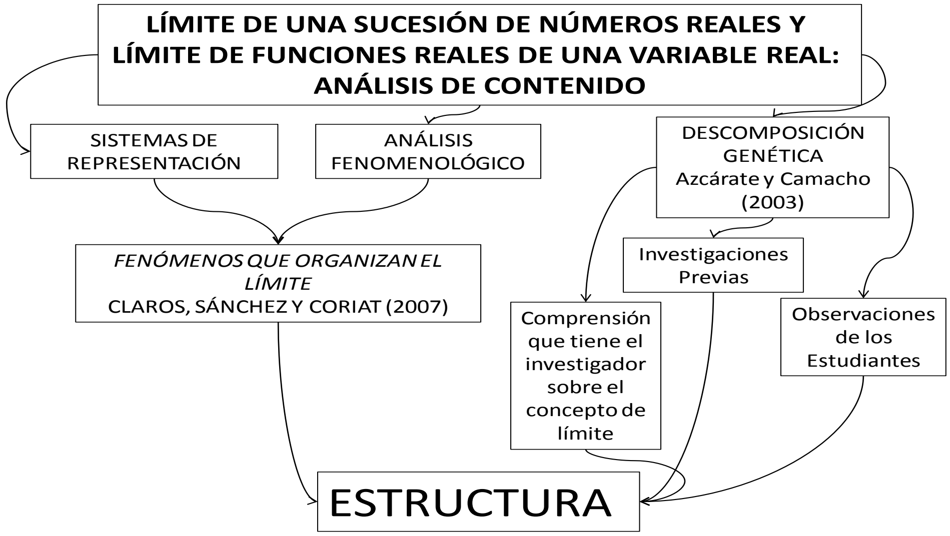

Gráfico 1. Teorías empleadas para realizar el análisis de contenido

Marco Teórico

En este apartado se describen las teorías que ayudarán a develar la estructura y análisis formal del límite, en primer lugar se estudiarán los sistemas de representación de los límites y luego los fenómenos asociados a este tema tan importante del Cálculo. Además se presentarán las concepciones de un grupo de estudiantes de Matemática de la UPEL – Maracay, del investigador – autor y de un grupo de investigadores que realizaron estudios sobre el límite en años anteriores.

Sistemas de Representación de la noción de Límite de una Sucesión de Números Reales, y Límite de las Funciones Reales de una Variable Real

Un sistema de representación según Rico y Segovia (2001) "Lo constituyen los símbolos y gráficos mediante los que se expresan los diferentes conceptos y procedimientos matemáticos" (p. 91). Cada concepto y procedimiento matemático posee sus símbolos o emblemas que los personalizan, aquí se destacarán los sistemas de representación de las Funciones Reales de una Variable Real y de los Límites de Sucesiones y de este tipo de funciones.

Escobar (1998), y Rojas y Salazar (1985) señalan los siguientes sistemas de representación de las Funciones Reales de una Variable Real. El primero es el descriptivo, aquí la función se especifica utilizando el lenguaje verbal mediante una descripción de la misma. El segundo lo constituyen los Diagramas de Venn, estos diagramas se usan para mostrar gráficamente la relación matemática o lógica entre diferentes conjuntos, representando cada conjunto mediante un óvalo o círculo. Este tipo de representación es útil cuando los conjuntos involucrados poseen pocos elementos. El tercer sistema descrito es el gráfico, dada una gráfica en R^2 la misma representa una función, si al trazar una recta vertical estas se cortan a lo más en un punto. Mediante una fórmula también podemos representar una función, se da una fórmula explícita $y = f(x)$ que define a y implícitamente como función de x.

Otro sistema es la Máquina Funcional; esta consiste en una simple caja con un agujero en su parte superior llamado entrada y un agujero en la parte inferior llamado salida, la idea es introducir "objetos" y de acuerdo al tipo de proceso interno que acontece en la caja, saldrán "objetos" dependientes de los que entraron.

El Par Ordenado también es un sistema de representación y establece; una función es la colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si $(a,b)\,y\,(a,c)$ pertenecen ambos a la colección, entonces $b = c$; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.

Una función puede representarse como una regla, es decir, una función es una regla cualquiera que hace corresponder números a ciertos otros números, no necesariamente una regla que puede ser expresada mediante una fórmula algebraica; ni tampoco necesariamente una regla a la que sea posible encontrar una aplicación en la práctica. Más aún la regla puede prescindir de algunos números y puede incluso no estar del todo claro a qué número se aplica la función.

Y por último una función se puede simbolizar con una tabla de valores, dada una tabla de dos columnas A y B respectivamente, donde cada elemento de A se le hace corresponder un único elemento de B, es decir, cualquier elemento de la columna A no aparece en dos filas diferentes.

En cuanto a los límites Claros, Coriat y Sánchez (2007) consideraron cuatro sistemas de representación (verbal, tabular, gráfico y simbólico) de los límites de sucesiones y de funciones reales de una variable real para llevar a cabo su estudio sobre los libros de texto.

A continuación se definen y ejemplifican los sistemas de representación: verbal, tabular, gráfico y simbólico de los límites de sucesiones y funciones reales de una variable real. Luego se revisarán los libros de texto con el fin de identificar y describir los sistemas de representación empleados por los autores.

Sistema de Representación Verbal

Dada la sucesión S o la función f podemos decir que si los elementos del conjunto de partida están cerca por la izquierda o por la derecha de la tendencia del límite, entonces S(n) o f(x) estarán cerca del número L, el cual representa el límite de la sucesión o de la función (si el límite existe).

Ejemplo: Para el $\underset{x \to 1}{Lím} \; 2x-3=-1$ podemos decir lo siguiente:

Cuando x está cerca de 1, entonces $f(x)=2x-3$ está cerca de -1.

Sistema de Representación Tabular

Este sistema se basa en una tabla de dos columnas, en la primera se pueden tomar valores cercanos por la izquierda del número hacia el cual tiende el límite y en la segunda valores cercanos por la derecha del número hacia el cual tiende el límite, luego buscamos su imagen a través de la sucesión o de la función. En ambas columnas se debe observar que los resultados tienden al mismo número real, el cual representa el límite de la sucesión o de la función (si el límite existe). Ejemplo:

Dado el $\underset{x \to 1}{Lím} \; 2x-3$ tomemos números cercanos a 1 por la izquierda y por la derecha.

Luego de buscar las respectivas imágenes a través de $f(x)=2x-3$ se observará que estos resultados se acercarán a -1. En efecto:

Cuadro 1
Representación Tabular de la Noción de Límite

Números reales cercanos a 1 por la izquierda		Números reales cercanos a 1 por la derecha	
x	$f(x)=2x-3$	*x*	$f(x)=2x-3$
0,8	-1,4	1,2	-0,6
0,9	-1,2	1,1	-0,8
0,99	-1,02	1,01	-0,98
0,999	-1,002	1,001	-0,998
0,9999	-1,0002	1,0001	-0,9998
0,99999	-1,00002	1,00001	-0,99998
0,999999	-1,000002	1,000001	-0,999998

Sistema de Representación Gráfico

Según De Guber y Sadosky (1975) la definición de límite es:

Se dice que una función y = f (x) tiende al límite L cuando x tiende al valor *a* si el valor absoluto de la diferencia f (x) – L puede hacerse tan pequeño como se quiera en las proximidades del punto *x = a* (sin interesarnos lo que ocurre precisamente en el punto *x = a).* (p.97).

En este sistema se representan en un plano cartesiano: la sucesión o la función, la tendencia del límite (c) sobre el eje X, el valor del límite (L) sobre el eje Y, y los valores $L+\varepsilon, L-\varepsilon, c+\delta, c-\delta$ con el fin de visualizar la definición formal de límite. Veamos la representación a través de este sistema gráfico (ver Gráfico 2).

En el ejemplo anterior $c=1$ y $L=-1$, luego para $\varepsilon=1$ obtenemos $\delta=\frac{1}{2}=0{,}5$, en consecuencia $L+\varepsilon=0,\quad L-\varepsilon=-2,\quad c+\delta=\frac{3}{2}=1{,}5\quad, c-\delta=\frac{1}{2}=0{,}5$.

Gráficamente:

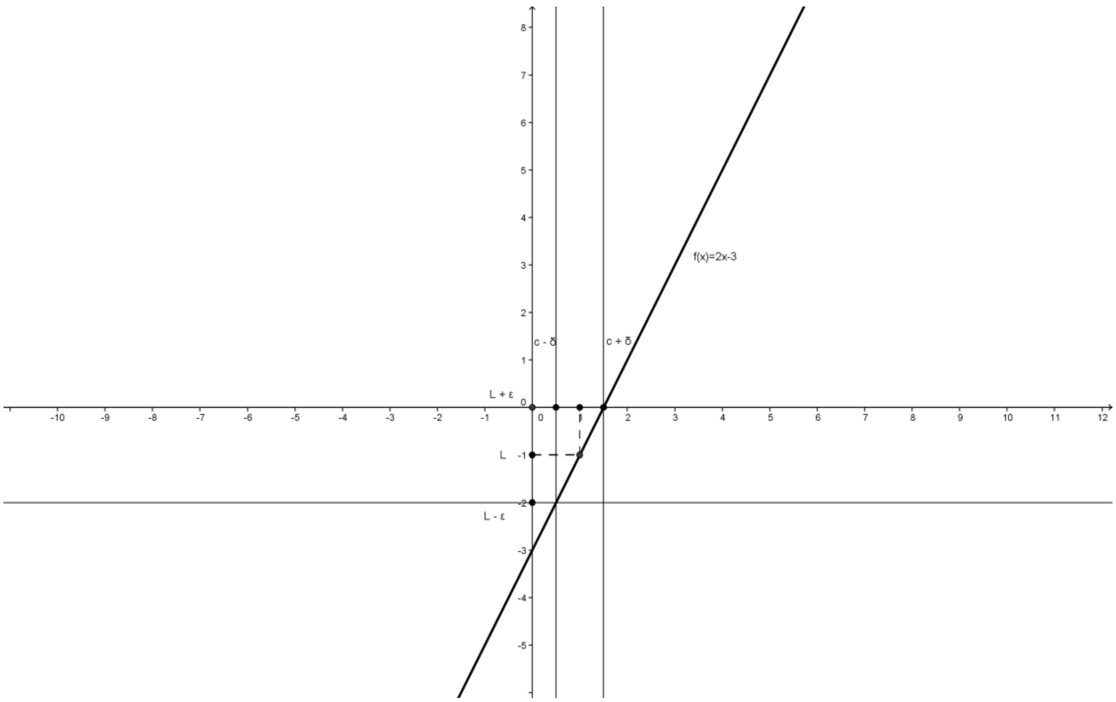

Gráfico 2. Representación gráfica de la noción de límite

Sistema de Representación Simbólico

Sistema de representación relacionado con la definición formal de límite, es decir: $\underset{x \to c}{Lím}\ f(x) = L$.

Si para cada $\varepsilon > 0$ dada, existe una correspondiente $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, siempre que $0 < |x - c| < \delta$, esto es; $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

En el ejemplo anterior hallemos δ para $\varepsilon = 0,1$.

Debemos probar que: $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |2x - 3 - (-1)| < \varepsilon$, por hipótesis tenemos $0 < |x - 1| < \delta$ *(I)*, veamos:

$$|2x - 3 - (-1)| < \varepsilon \Rightarrow |2x - 2| < \varepsilon$$

$$|2x - 2| < \varepsilon \Rightarrow |2(x - 1)| < \varepsilon \Rightarrow 2|x - 1| < \varepsilon \quad \Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}\,(II)$$

Comparando *(I)* y *(II)* $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, así $\delta = \frac{\varepsilon}{2} = \frac{0,1}{2} = 0,05$

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Enero-Junio 2020. Vol. 17, N° 1
Revista Multidisciplinaria Dialógica

Fenómenos relacionados con el Límite de una Sucesión de Números Reales, y Límite de las Funciones Reales de una Variable Real

Según Claros, Coriat y Sánchez (2007) existen dos tipos de fenómenos que organizan la noción de límite, los de aproximación intuitiva y los de retroalimentación. Estos autores trabajan con sucesiones simples monótonas y funciones continuas presentes en una muestra intencional de libros de texto de matemática. En cuanto al límite de sucesiones se contemplaron 24 libros, y en cuanto al límite de funciones se consideraron 26 libros.

En los fenómenos de aproximación intuitiva estos utilizan la expresión *parecen acercarse* con el fin de captar cualquier sospecha o intuición que contribuya a la resolución del límite de la sucesión o de la función en un punto.

A continuación se presentan las definiciones aproximación simple intuitiva (ASI) y aproximación doble intuitiva (ADI), establecidas por los autores antes mencionados.

Fenómeno: Aproximación Simple Intuitiva para Sucesiones

Como lo expresan Claros, Coriat y Sánchez (ob.cit) la aproximación simple intuitiva (ASI) se define:

> Dados k términos ordenados de una sucesión, generalmente consecutivos $(1,a_1),(2,a_2),\ldots,(k,a_k)$, caracterizamos la aproximación simple intuitiva como el fenómeno observado al inspeccionar la secuencia de valores $a_1,a_2,\ldots,a_k$ cuando "parecen acercarse" a otro valor fijo. Modelo: en la sucesión $(1,1),\left(1,\frac{1}{2}\right),\left(1,\frac{1}{3}\right),\ldots$, los términos $\frac{1}{n}$, parecen acercarse a cero a medida que n crece (p. 127).

Fenómeno: Aproximación Doble Intuitiva para Funciones

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Enero-Junio 2020. Vol. 17, N° 1
Revista Multidisciplinaria Dialógica

Por otro lado, la aproximación doble intuitiva (ADI) la precisan así:

> Dados k pares de valores de una función real f de variable real $(x_1, f(x_1)),(x_2, f(x_2)),\ldots,(x_k, f(x_k))$, identificamos la aproximación doble intuitiva como el fenómeno que acontece cuando, de forma relacionada, los valores $x_1, x_2,\ldots, x_k$ y sus respectivas imágenes $f(x_1), f(x_2),\ldots, f(x_k)$ parecen acercarse a sendos valores fijos distintos. Modelo: Dada la función $f(x)=2x$, en los pares de valores $(0.9,1.8),(0.99,1.98),(0.999,1.998),\ldots$, se observa que cuando la variable independiente parece acercarse a 1 la dependiente parece acercarse a 2 (p. 127).

Fenómenos: Ida y Vuelta para Sucesiones y Funciones

En los fenómenos de retroalimentación Claros, Coriat y Sánchez (2007) expresan que la retroalimentación se corresponde con un proceso ida – vuelta, es decir:

> Una vez establecido el entorno en el límite con el ε dado "vamos" desde el eje de ordenadas al de abscisas para determinar el correspondiente n o δ asociado, según sea el caso, y "volvemos" al entorno del límite en el eje de ordenadas para comprobar que las imágenes de valores correspondientes al eje de abscisas, pertenecen al entorno considerado (p. 127).

En los fenómenos de retroalimentación también se establecen dos tipos, uno para las sucesiones y otro para las funciones reales de una variable real. El de las sucesiones, recibe el nombre de: fenómeno de ida y vuelta en sucesiones (IVS), el de las funciones lo denominan fenómeno de ida y vuelta en funciones (IVF).

Un ejemplo claro donde se evidencia el fenómeno de ida y vuelta en funciones (IVF) es en el siguiente: Demuestra que $\underset{x\to 3}{lím}(4x-5)=7$.

Para resolver este límite aplicando la definición debemos trabajar con $|(4x-5)-7|<\varepsilon$ asumiendo lo siguiente: $0<|x-3|<\delta \quad (I)$.

Veamos: $\left|(4x-5)-7\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|4x-12\right|<\varepsilon \Rightarrow 4\left|x-3\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|x-3\right|<\dfrac{\varepsilon}{4}\ (II)$

Comparando (I) y (II) se tiene: δ = ε / 4. Este ejemplo se visualiza en el siguiente Gráfico 3, suponiendo que ε = 1 y δ = 1 / 4.

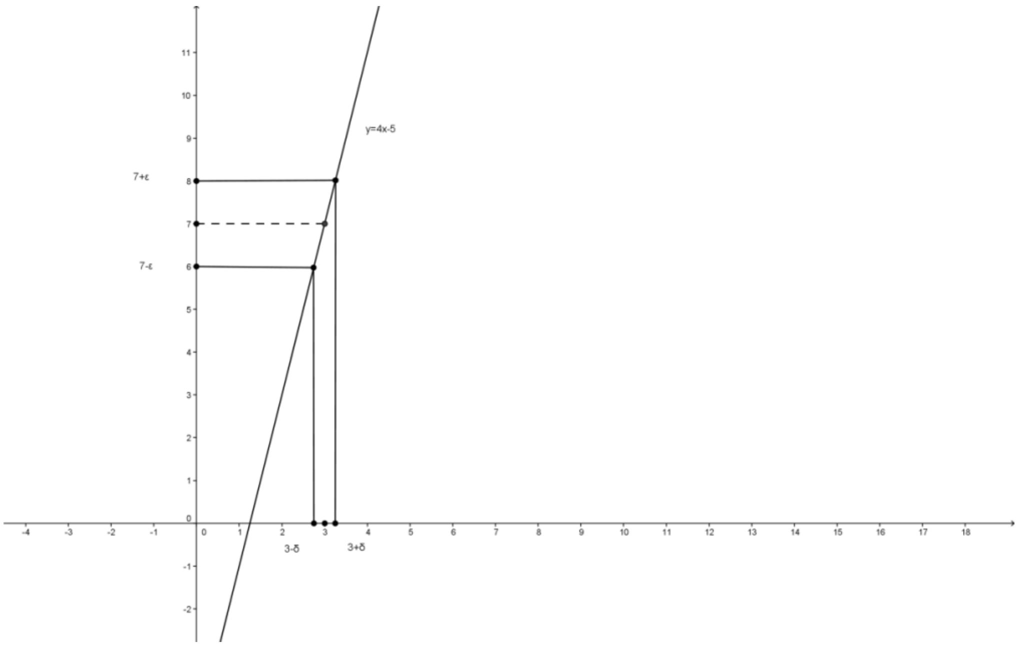

Gráfico 3**.** Fenómeno ida y vuelta en funciones

Claros, Coriat y Sánchez (2007) resumen los fenómenos que organizan la noción de límite en el siguiente Gráfico 4.

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Enero-Junio 2020. Vol. 17, N° 1
Revista Multidisciplinaria Dialógica

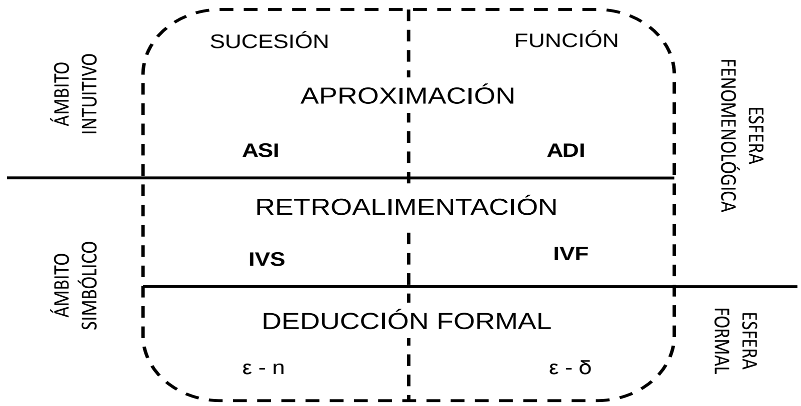

Gráfico 4. Fenómenos de aproximación y retroalimentación en el límite finito. Tomado de <<Fenómenos que organizan el límite>> por Claros, F., Coriat, M. y Sánchez, M. (ob.cit).

Estructura y Análisis Formal del Tópico Límite

En cuanto a la estructura y análisis formal del tópico Límite de una sucesión de números reales y Límite de las funciones reales de una variable real, se determinará con un enfoque creado por el grupo de investigación dirigido por el profesor Ed Dubinsky, que según Azcárate y Camacho (2003) su propósito de análisis teórico de un concepto es proponer un modelo cognitivo que realiza una descripción de las construcciones mentales específicas que un estudiante podría elaborar con el fin de adquirir o comprender un concepto.

Este análisis teórico tiene como resultado la descomposición genética del concepto que se logra a través de: (a) la comprensión que posee el investigador sobre el concepto en cuestión, además de sus experiencias como aprendiz del concepto y como comunicador o mediador del aprendizaje del mismo, (b) Investigaciones previas realizadas sobre el concepto en estudio, (c) Observaciones de los estudiantes en el proceso de aprendizaje del concepto estudiado.

Investigaciones Previas

Las investigaciones sobre el concepto límite de sucesiones o límite de funciones reales de una variable real han estado orientadas por cuatro grandes campos: el epistemológico, el cognitivo, de corte histórico y el didáctico, así lo aseguran Camacho, Díaz, Locia y Navarro (2009). A continuación se presentarán algunas investigaciones en cada uno de los campos descritos, publicadas en las Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa (ALME) provenientes de las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME).

Noción de límite en el campo epistemológico. Bonilla (2009) realizó una análisis epistemológico de la noción de límite de sucesiones y límites de funciones, partiendo del problema que generó la reducción del análisis a un cálculo algebraico algoritmizado, plantea que algunas causas de esta situación pueden ser las siguientes: (a) los docentes de Matemática no plantean problemas al estudiar algunas nociones, (b) el lenguaje formal es introducido en la enseñanza de la Matemática desde el primer contacto con el tópico a aprender, (c) la enseñanza se centra en el discurso del profesor. Asegura también que las computadoras en la enseñanza de la Matemática, son consideradas un recurso heurístico o medio de verificación que establece una relación estrecha entre la Matemática y la tecnología. Emplea el enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática para el análisis epistemológico, específicamente aborda las configuraciones epistémicas: lenguaje, situaciones problema, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. Por otro lado, pretende implantar la visualización y experimentación computarizada como una forma de argumentación Matemática y colocar las bases para el desarrollo de una aproximación experimental e intuitiva del pensamiento analítico. Para materializar esta idea diseña una propuesta didáctica apoyada en el uso del software de Geometría Dinámica Cabri II, en la que construye en una de las actividades el fractal de Sierpinski para acercarse a la noción de límite de sucesiones, además grafica algunas funciones para ilustrar la idea de límite con el uso de entornos.

Noción de límite en el campo didáctico. Por su parte Cruz y Ramírez (2009) proponen un entorno de aprendizaje dinámico modular orientado a objetos (MOODLE), para la enseñanza del concepto de límite. Principalmente los autores se plantean predecir a través de las asíntotas, los límites de la curva analizada como una noción a nivel de precálculo de los límites. Como marco teórico emplean la Teoría de las Situaciones Didácticas propuesta por Brousseau y la ingeniería didáctica como metodología.

Noción de límite en el campo cognitivo. Maldonado, Miranda y Navarro (2007) plantean el uso de paradojas para provocar conflictos cognitivos en los estudiantes, porque: "la historia muestra que las paradojas del infinito promovieron reflexiones profundas en relación a los conceptos matemáticos". Los autores eligieron dos problemas con características geométricas que involucran el concepto de límite, para planteárselos a estudiantes de nivel superior que ya habían estudiado Cálculo Diferencial e Integral y Geometría Euclidiana. Los problemas planteados son: (a) No existe ningún polígono regular inscrito en un círculo, o circunscrito al mismo, de $n \geq 3$, $n \in N$, lados cuya área sea igual al del círculo, (b) Las semicircunferencias, cuyos diámetros son los $n \geq 3$ lados del polígono regular inscrito tienen como límite a la circunferencia que circunscribe a ese polígono, o sea, $2\pi r$, (paradoja). Participaron 13 estudiantes, de los cuales 7 respondieron correctamente en el primer problema, en el segundo problema los estudiantes dieron sólo respuestas intuitivas que no coincidieron con la respuesta Matemática. Dentro de las conclusiones a las que llegaron los autores después de realizar esta investigación se puede destacar la siguiente:

> La enseñanza tradicional procede a introducir el concepto de límite mediante funciones y sucesiones monótonas, generalmente; no introduce el concepto de límite mediante problemas de carácter geométrico; tampoco emplean paradojas relativas al concepto, por considerarlas como exclusivas de la comunidad matemática (p. 8).

Noción de límite en el campo histórico. Andonegui y Hernández (2003) esta investigación tiene como propósito contrastar las concepciones de los estudiantes de educación superior con las distintas concepciones de la noción de límite que surgieron a lo largo de la historia y además relacionarlos con una serie de obstáculos epistemológicos. Para la investigación se elaboró un instrumento con 14 ítems y se le aplicó a un total de 59 estudiantes de dos Universidades Venezolanas: la Pedagógica Experimental Libertador específicamente Instituto Pedagógico de Barquisimeto y la Centrooccidental Lisandro Alvarado. Se determinaron 13 posibles tipos de concepciones acerca de la noción de límite tales como: (a) Uso formal en donde se hace referencia a entornos en ambas variables, (b) Dinámica, referida al movimiento de las variables, (c) Límite como cota o valor máximo, (d) Valor inalcanzable, (e) Predominio del infinito potencialmente actual, (f) Aproximación susceptible de hacerse exacta, (g) Monótona estática, (h) Transferir al límite las propiedades de los elementos, (i) Transferir procedimientos algebraicos finitos a cantidades infinitas, (j) Uso de fórmulas, (k) Interpretaciones de carácter geométrico, (l) Separación de procesos, uno por cada variable, (m) Uso incorrecto de los cuantificadores. Es necesario resaltar que las concepciones predominantes en este grupo de estudiantes son las del límite como una aproximación, como movimiento físico y como un valor inalcanzable.

Metodología

En este apartado se presenta como se llevó a cabo la investigación, se describe: (a) paradigma, (b) enfoque, (c) método, (d) el diseño y tipo de investigación, (e) contexto de aplicación, (f) los requisitos que deben cumplir los informantes clave, (g) las técnicas e instrumentos de recolección de la información, y (h) el análisis de la información.

El paradigma que dirigió la presente investigación es el post – positivista, el enfoque que se adoptó es el cualitativo porque se pretende comprender e interpretar la realidad de los estudiantes de la especialidad de Matemática de la UPEL – Maracay cuando aprenden límites de sucesiones o de funciones, los significados de los diversas concepciones de los autores de los libros impresos de Cálculo y del investigador, así como también las percepciones, intenciones, y acciones de los investigadores que llevaron a cabo estudios en años anteriores sobre los límites en los ámbitos: epistemológico, histórico, didáctico y cognitivo.

En la investigación se empleó el método hermenéutico o arte de explicar e interpretar, el diseño de esta investigación es no experimental no se manipulan variables, este tipo de diseño es descrito por Martins y Palella (2010), de la siguiente manera, “Se observan los hechos tal y como se presentan en su contexto real y en un tiempo determinado o no, para luego analizarlos” (p. 81). Es importante resaltar que los estudiantes entrevistados ya habían cursado y aprobado Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Cálculo de Varias Variables en la especialidad de Matemática de la UPEL – Maracay e incluso en otras universidades y otras carreras distintas a la docencia, es decir ya poseían un cúmulo de experiencias en cuanto al aprendizaje del límite de sucesiones y el límite de funciones. Por otro lado los 15 libros estudiados ya se encontraban en circulación en el mercado desde hace mucho tiempo, y estos formaron al investigador como profesional desde sus estudios de pregrado y en consecuencia dirigieron más tarde sus clases de Cálculo en la especialidad de Matemática. Además las investigaciones previas que se consultaron se obtuvieron de las Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa (ALME) de años anteriores. Todos estos datos se obtuvieron directamente de la realidad, lo que clasifica la investigación que se reporta como de campo.

Finalmente la investigación se realizó con tres (3) informantes clave estudiantes del sexto período académico en adelante de la Especialidad de Matemática de la UPEL – Maracay, ellos describieron su experiencia al aprender límites de sucesiones y de funciones en una y varias variables.

El Análisis de la información se realizó con la ayuda de los aportes de las teorías siguientes: (a) Sistemas de Representación y Fenómenos Asociados a los límites propuestos por Claros, Coriat y Sánchez (ob.cit), (b) Descomposición genética de un tópico matemático propuesta por Azcárate y Camacho (ob.cit) y (c) Campos abordados en las investigaciones sobre límites propuestos por Camacho, Díaz, Locia y Navarro (ob.cit). Estos aportes junto con las concepciones de los estudiantes y las concepciones del investigador determinaron la estructura formal de este tópico del cálculo, es decir en esta investigación el proceso de triangulación fue múltiple porque se consideraron las contribuciones de las teorías de entrada, los datos que suministraron los informantes clave, y la opinión del investigador.

Resultados, Análisis e Interpretación

La estructura del tópico límite se compone de dos grandes conjuntos de conocimientos: los sistemas de representación y los fenómenos asociados a este tema. Tal y como se mencionó anteriormente los sistemas de representación de los límites son: el gráfico, el verbal, el tabular y el simbólico y los fenómenos asociados a este concepto son: aproximación simple intuitiva para sucesiones, aproximación doble intuitiva para funciones, ida y vuelta tanto para sucesiones como para funciones, según Claros, Coriat y Sánchez (2007).

Ahora se identificarán y describirán los sistemas de representación empleados por los autores de los libros de texto objeto de este estudio.

Ayres (1971) comienza el estudio del límite, definiendo límite de una sucesión con la ayuda del sistema de representación verbal y gráfico, el simbólico y el tabular no es empleado, introduce el límite de una función con el apoyo del sistema de representación verbal y luego emplea el sistema de representación simbólico, el gráfico y el tabular no lo utiliza.

Baranenkov, Demidovich, Efimenko, Frolov, Kogan, Lunts, Porshneva, Shostak, Sichova y Yampolski (1977) estos autores utilizan los sistemas de representación verbal y simbólico para establecer la definición de límite de sucesión y límite de función. Los sistemas de representación tabular y gráfico no son empleados.

Barcellos y Stein (1995) en cuanto al límite de sucesiones se evidencian los sistemas de representación verbal, tabular, gráfico y simbólico. Y para abordar la definición de límite de una función emplean los sistemas gráfico, tabular y verbal, el simbólico no. Por su parte Barragán, Pantoja y Sarabia (1992) no muestran el tema límite de sucesiones, el límite de funciones lo representan con la ayuda de los sistemas gráfico y simbólico, los sistemas tabular y verbal no los exhiben.

Braschi (2000) en un primer momento presenta la noción intuitiva de límite y se vale de los sistemas de representación verbal, tabular y gráfico, luego emplea el sistema simbólico. En esta obra no se presentan límites de sucesiones.

Buitrago y Macana (1999) emplean los sistemas de representación gráfico, tabular, simbólico y verbal para el límite de funciones, mientras que las sucesiones y sus límites no se mencionan. Los autores De Guber y Sadosky (ob.cit) comienzan explicando la definición de límite de una función, para ello utilizan el sistema de representación verbal y gráfico, inmediatamente emplean el sistema simbólico y realizan algunas demostraciones, el sistema tabular no es considerado. En cuanto al límite de sucesiones se evidencias los sistemas: verbal, gráfico y simbólico.

Edwards, Hostetler y Larson (2006), Purcell, Rigdon y Varberg (2001) y Leithold (1998), utilizan los sistemas de representación verbal, simbólico y gráfico para el límite de sucesiones, el tabular no. Para el límite de funciones recurren a todos los sistemas de representación para explicar este tópico matemático.

Edwards y Penney (1997) y Sáenz (2005) emplean el sistema de representación tabular, gráfico y verbal para introducir la idea de límite de funciones, luego emplean el simbólico. El límite de sucesiones no es abordado en estas obras.

Mérida (2003) introduce la noción de límite de una función con el sistema de representación verbal, después pone en evidencia los sistemas de representación simbólico y gráfico. El sistema de representación tabular no lo utiliza. El límite de una sucesión no es desarrollado en esta obra.

Rojas (1976) explica el límite de una sucesión apoyándose en el sistema de representación simbólico en primer lugar, después emplea los sistemas de representación verbal y gráfico para aclarar la definición. El sistema de representación tabular no es utilizado para explicar la definición. En cuanto al límite de una función también se sirve en un primer momento del sistema de representación simbólico, luego aclara esta definición un poco más con la ayuda de los sistemas de representación verbal y gráfico, nuevamente no utiliza el sistema de representación tabular.

Stewart (2001) en un apartado de su obra denominado presentación preliminar del cálculo, define límite de una sucesión con la ayuda de la paradoja de Zenón, también en otros capítulos trae los sistemas de representación verbal, grafico, sin embargo el simbólico y el tabular no los ostenta. Por otra parte todos los sistemas de representación de los límites de funciones se evidencian en esta obra.

A continuación se hará la revisión correspondiente a los libros de texto que se han venido estudiando desde las secciones anteriores. Pero esta vez se resaltará la presencia o la ausencia de los fenómenos: ASI, ADI, IVS e IVF.

Stewart (ob.cit) presenta el fenómeno aproximación doble intuitiva (ADI) para funciones, emplea el sistema de representación tabular y luego de algunos ejemplos presenta una aproximación a la definición de límite. Además define límites laterales, límites infinitos y calcula límites utilizando propiedades. Por último incluye la definición formal de límite y trata de explicarla con el fenómeno de ida y vuelta en funciones (IVF). El fenómeno aproximación simple intuitiva (ASI) lo muestra a través de la paradoja de Zenón que describe la carrera entre el héroe griego Aquiles y una tortuga, llegando así a la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$. Esto es abordado en el primer apartado del libro que lleva por nombre Presentación preliminar del Cálculo. El fenómeno de ida y vuelta en sucesiones (IVS) no es desarrollado.

Edwards, Hostetler y Larson (ob.cit) realizan una introducción a los límites a través del fenómeno aproximación doble intuitiva (ADI) para funciones, calculan algunos límites, presentan una noción de límites laterales probando que no existe el siguiente límite $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$. Luego trabajan con el fenómeno de ida y vuelta en funciones (IVF), para presentar a manera de resumen la definición de límite. En cuanto a sucesiones muestran como se calculan los términos dada una sucesión. Y casi inmediatamente definen límite de una sucesión y explican la definición utilizando el fenómeno de ida y vuelta en sucesiones (IVS). Además resaltan las propiedades de los límites de sucesiones, el Teorema del encaje o del emparedado para sucesiones y el Teorema del valor absoluto. El fenómeno de aproximación simple intuitiva (ASI) para sucesiones no es tratado.

De Guber y Sadosky (ob.cit) emplean el fenómeno de ida y vuelta en funciones (IVF) para explicar la definición formal de límite. El fenómeno aproximación doble intuitiva (ADI) para funciones no es utilizado. En relación al tema de sucesiones proponen algunos ejemplos que representan el fenómeno de aproximación simple intuitiva (ASI), luego trabajan con la sucesión de Fibonacci y por último definen el límite de una sucesión de manera formal e intentan explicarlo a través del ejemplo: $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, apoyándose así en el fenómeno de ida y vuelta en sucesiones (IVS).

Sáenz (ob.cit) en primer lugar presenta una introducción intuitiva a los límites a través del fenómeno aproximación doble intuitiva (ADI) para funciones, luego plantea una definición no rigurosa de límite, explica los límites unilaterales, algunas propiedades que cumplen los límites e inmediatamente propone ejemplos y ejercicios que ilustran la indeterminación $\frac{0}{0}$. En la siguiente sección propone el tratamiento riguroso de los límites con la ayuda del fenómeno de ida y vuelta en funciones (IVF). Luego señala algunos teoremas sobre límites, entre estos el de la ley del emparedado. Por último trabaja con límites que poseen funciones trigonométricas y las indeterminaciones $\frac{\infty}{\infty}$ e $\infty - \infty$. En cuanto a sucesiones el tema no es tratado.

Ayres (ob.cit) explica el límite de una sucesión apoyándose en el fenómeno aproximación simple intuitiva (ASI), e inmediatamente expone el límite de una función con la ayuda del fenómeno aproximación doble intuitiva (ADI). Además define límites laterales, plantea algunos teoremas sobre límites (sin demostración), introduce la noción de infinito y por último a través del fenómeno de ida y vuelta en funciones (IVF) presenta la definición formal de límite. El fenómeno de ida y vuelta en sucesiones (IVS) no es estudiado.

Edwards y Penney (ob.cit) explican el concepto de límite en primer lugar con la ayuda del fenómeno de aproximación doble intuitiva (ADI) para funciones, seguidamente señalan las propiedades de los límites, y trabajan con el fenómeno de ida y vuelta en funciones (IVF). En la sección siguiente trabajan con límites de funciones trigonométricas, ley del sándwich, límites laterales y límites infinitos. El límite de una sucesión no es abordado.

Purcell, Rigdon y Varberg (2001) exponen de manera intuitiva el concepto de límite por supuesto apoyándose en el fenómeno de aproximación doble intuitiva (ADI) para funciones, luego trabajan con los límites unilaterales. Más adelante realizan un estudio formal de los límites precisando la definición con la ayuda del fenómeno de ida y vuelta en funciones (IVF). Por otro lado proponen los teoremas o propiedades que cumplen los límites sin demostrarlos (entre éstos el teorema del emparedado). En otro apartado calculan límites que incluyen funciones trigonométricas y límites infinitos. Los límites de sucesiones son estudiados con la ayuda de los fenómenos aproximación simple intuitiva e ida y vuelta en sucesiones en un capítulo aparte.

Buitrago y Macana (1999) afirman que la base del cálculo es el concepto de límite, en primer lugar estudian este concepto con la ayuda del fenómeno aproximación doble intuitiva (ADI) para funciones, después establecen una aproximación formal del concepto de límite. También trabajan con las propiedades que cumplen los límites y las indeterminaciones $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ e $\infty - \infty$. Por otro lado definen límites unilaterales, infinitos y aquellos que poseen funciones trigonométricas. En otro apartado definen formalmente el concepto de límite basados en el fenómeno de ida y vuelta en funciones (IVF). Los fenómenos asociados a límites de sucesiones no se encuentran desarrollados en esta obra.

Baranenkov, Demidovich, Efimenko, Frolov, Kogan, Lunts, Porshneva, Shostak, Sichova, y Yampolski (ob.cit) definen límite de una sucesión con el fenómeno de ida y vuelta en sucesiones (IVS), después definen límite de una función con el fenómeno de ida y vuelta en funciones (IVF). Más tarde precisan el concepto de límites laterales y plantean ejemplos de límites con funciones trigonométricas. En otro apartado del texto establecen la noción de infinitésimos e infinitos. Los fenómenos aproximación simple intuitiva (ASI) para sucesiones y aproximación doble intuitiva (ADI) para funciones no son desarrollados en esta obra.

Rojas (1976) explica el fenómeno aproximación simple intuitiva (ASI) para sucesiones con la sucesión $S_n = \frac{1}{n}$. Seguidamente define límite de una sucesión con la ayuda del fenómeno de ida y vuelta para sucesiones (IVS). Más tarde define límite de una función con el fenómeno de ida y vuelta en funciones (IVF). Demuestra las propiedades de los límites, define límites laterales y límites al infinito. El fenómeno aproximación doble intuitiva (ADI) para funciones no es presentado en este texto.

Por su parte Braschi (2000) declara la noción intuitiva de límite con la ayuda del fenómeno aproximación doble intuitiva (ADI) para funciones, y luego define formalmente límite de una función real de una variable real a través del fenómeno de ida y vuelta en funciones (IVF). Los fenómenos relacionados con sucesiones no son contemplados en esta obra.

Mérida (2003) introduce una idea de límite con la ayuda del fenómeno aproximación doble intuitiva (ADI) para funciones, después define formalmente límite de una función real de una variable real a través del fenómeno de ida y vuelta en funciones (IVF). Los fenómenos ASI e IVS relacionados con sucesiones no son estudiados.

Barragán, Pantoja y Sarabia (1992) definen formalmente límite de una función real de una variable real a través del fenómeno de ida y vuelta en funciones (IVF), el fenómeno aproximación doble intuitiva para funciones (ADI) no se presenta en esta obra. Los fenómenos ASI e IVS relacionados con sucesiones no son estudiados.

Barcellos y Stein (ob.cit) con algunos ejemplos explican el límite de una sucesión con el fenómeno aproximación simple intuitiva (ASI), después formalizan este tópico matemático con la ayuda del fenómeno ida y vuelta para sucesiones (IVS). En cuanto a límites de funciones sólo usan el fenómeno aproximación doble intuitiva (ADI), mientras que el de ida y vuelta para funciones no es tratado.

Leithold (1998) emplea los fenómenos aproximación doble intuitiva e ida y vuelta en función para desarrollar los límites de funciones, en cuanto a los límites de sucesiones este autor se apoya en los fenómenos aproximación simple intuitiva e ida y vuelta en sucesión para explicarle al lector este tópico matemático.

Concepciones del Profesor – Autor

En este apartado se presenta un resumen de las clases que el autor planifica para el estudio del límite de Sucesiones de Números Reales y el límite de Funciones Reales de una variable Real, en el curso de Cálculo Diferencial de la especialidad de Matemática de la UPEL - Maracay.

En cuanto al tema Límite de Sucesiones de Números Reales el autor en primer lugar presenta la definición de sucesión de números reales, luego se definen los términos de la sucesión y sus notaciones, y finalmente se estudia la convergencia o divergencia de dichas sucesiones.

Para el desarrollo del tema Límite de Funciones Reales de una Variable Real el autor emplea en primer lugar el sistema de representación verbal de los límites y el tabular para introducir la idea de esta definición, luego intenta explicar esta noción del cálculo a través

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Enero-Junio 2020. Vol. 17, N° 1
Revista Multidisciplinaria Dialógica

del sistema de representación simbólico y por último cierra explica esta idea con la ayuda del sistema de representación gráfico. Después de trabajar con la definición del límite el autor estudia junto a sus estudiantes las indeterminaciones: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$ y 1^{∞}.

Al culminar el estudio de las indeterminaciones el autor demuestra los límites notables que involucran funciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas, e inmediatamente introduce la definición de límites laterales que más tarde será muy útil en el estudio de la continuidad de funciones en un número real específico.

Concepciones de los Estudiantes

A los 3 estudiantes que participaron de manera voluntaria en esta investigación, se les planteó la interrogante: ¿Cómo fue tu experiencia al estudiar límites?, y ellos contestaron.

El estudiante 1 comenzó a experimentar con los límites en el curso Cálculo Diferencial, en un primer momento el profesor le planteó una sucesión para ilustrar la idea intuitiva de límite de una sucesión, luego le definió formalmente lo que es límite de una sucesión, y les presentó unas propiedades de los límites. Una vez que la definición fue establecida por la constante repetición de ejercicios y “demostraciones”, se procedió a estudiar los límites de funciones reales de una variable real. Con las funciones también se planteó un ejercicio para abordar la idea intuitiva de límite, y luego se adentraron en los límites por definición, según este estudiante los problemas se le presentaron cuando tenía que buscar o acotar el valor del secreto delta dado el épsilon, y además de romper con las indeterminaciones cuando estaban involucradas las funciones trigonométricas.

El estudiante 2 menciona las dificultades que afrontó al momento de estudiar límites (protestas estudiantiles que interrumpían las clases, el afán del docente por culminar el contenido en un corto tiempo, la poca vinculación que el docente presentaba con la vida cotidiana de este tema, el uso excesivo del sistema de representación simbólico de los límites en las clases y el poco uso de los sistemas de representación verbal, gráfico y tabular de los límites), y además resalta como le hubiese gustado aprender este tema,

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Enero-Junio 2020. Vol. 17, N° 1
Revista Multidisciplinaria Dialógica

hubiese preferido más interpretación geométrica del concepto que la simple repetición de ejercicios y aplicación de teoremas.

El estudiante 3 al perecer en su primer acercamiento a los límites no comprendió su definición, luego en su segunda oportunidad se enfocó en la parte operativa de los límites, es decir, resolver ejercicios y aplicar propiedades. Por último, la definición formal de límite fue comprendida por éste al estudiar límites en varias variables.

Ahora se presentan las relaciones que se pueden establecer entre los sistemas de representación y los fenómenos asociados a los límites de sucesiones de números reales y los límites de funciones reales de una variable real.

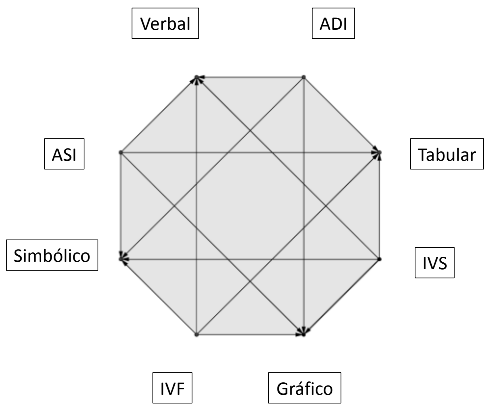

Gráfico 5. Relaciones entre los sistemas de representación de los límites y los fenómenos asociados a éstos

En el Gráfico 5, se pueden observar las relaciones entre los sistemas de representación de los límites y los fenómenos asociados a este concepto, si nos ubicamos por ejemplo en el fenómeno de Aproximación Simple Intuitiva (ASI) para sucesiones vemos como se relaciona con cada uno de los Sistemas de Representación (Gráfico, Simbólico, Verbal y Tabular), y esto lo podemos constatar con el resto de los fenómenos que explican este tópico de la Matemática presente en sucesiones y funciones.

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Enero-Junio 2020. Vol. 17, N° 1
Revista Multidisciplinaria Dialógica

Para finalizar se presenta la estructura del límite luego de haber estudiado los sistemas de representación y los fenómenos asociados (ver Gráfico 6).

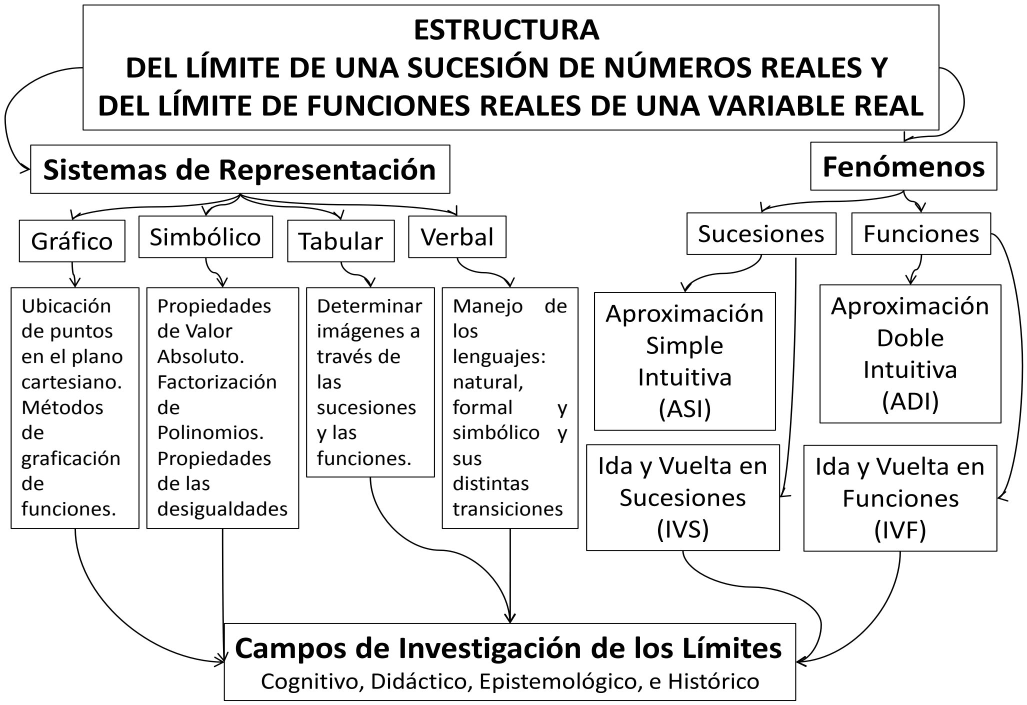

Gráfico 6. Estructura del Límite

Conclusiones

Privilegiando y considerando el análisis de la información recabada en el desarrollo de esta investigación sobre límites el investigador presenta las siguientes conclusiones.

Comencemos con el fenómeno aproximación simple intuitiva para sucesiones, en este se estudia una secuencia de valores (números reales) cuando parecen aproximarse a otro valor fijo. En este fenómeno uno de los sistemas de representación más idóneo parece ser el verbal, sin embargo una tabla de valores, una representación gráfica de la sucesión, y un uso correcto de los símbolos para determinar el orden de los elementos de dicha sucesión ($a_1, a_2, \ldots, a_k$), sería de gran ayuda para la comprensión del concepto y para determinar por ejemplo un término específico de la sucesión.

El fenómeno aproximación doble intuitiva para funciones radica en identificar como los valores $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ y sus respectivas imágenes $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k))$ parecen aproximarse a valores fijos distintos. En este fenómeno el sistema de representación verbal es muy importante ya que hay que expresar de manera oral o escrita las aproximaciones descritas anteriormente, pero para llegar a identificar dichos acercamientos es muy útil representar estos datos en una gráfica, u organizarlos en una tabla y por supuesto emplear de manera correcta los símbolos asociados a los valores y sus respectivas imágenes.

Los fenómenos ida y vuelta para sucesiones y funciones se encuentran directamente relacionados con la definición formal de límite. Para la comprensión de estos fenómenos es recomendable emplear todos los sistemas de representación de los límites: gráfico, verbal, tabular y simbólico (ver Cuadro 2).

Cuadro 2
Sistemas de Representación y Fenómenos Empleados por los Autores de los 15 libros de Texto Universitarios Revisados

Sistemas de Representación Límite de Sucesiones		**Sistemas de Representación Límite de Funciones**		**Fenómenos**	
Nombre del Sistema	Número de Autores	Nombre del Sistema	Número de Autores	Nombre del Fenómeno	Número de Autores
Gráfico	8	Gráfico	13	ASI Sucesiones	7
Simbólico	7	Simbólico	14	IVS Sucesiones	7
Tabular	1	Tabular	9	ADI Funciones	11
Verbal	9	Verbal	14	IVF Funciones	14

Luego de la revisión de los 15 libros de texto universitarios impresos, el autor expone las siguientes observaciones: (a) Los libros más antiguos sólo emplean los sistemas de representación verbal y simbólico de los límites, quizás porque no habían tantos adelantos tecnológicos como para graficar funciones o lo único que importaba para esa época era la definición formal del límite, los libros más recientes incluyen los sistemas de representación tabular y gráfico, incluso proponen actividades con el uso de calculadoras graficadoras, (b) Los libros más antiguos sólo emplean los fenómenos de ida y vuelta para funciones y sucesiones, mientras que los libros más recientes se valen de los fenómenos de aproximación simple y doble intuitiva para introducir las definiciones de límite de sucesión de números reales y límite de funciones reales de una variable real, (c) Los libros más nuevos separan el tema de límite de sucesiones del tema límite de funciones, incluso en éstos el límite de sucesiones es abordado en un capítulo aparte y posterior al del límite de funciones, los libros más antiguos primero estudian sucesiones y luego funciones, (d) Algunos libros de texto nuevos no consideran ni siquiera el estudio de las sucesiones, (e) Los autores de los libros de texto antiguos interactúan muy poco con el lector, esto se evidencia en las frases “se deja al lector el cuidado de la demostración”, “es obvio”, “es evidente que”, “como el lector se encuentra familiarizado con el tema no se darán los detalles”, (f) En los libros de texto más recientes se evidencia un equilibrio entre teoría, ejemplos, ejercicios y problemas, en los libros más antiguos se plantean las definiciones y casi inmediatamente proponen los problemas.

En cuanto a las concepciones de los estudiantes el estudiante 1 estudió primero límite de sucesiones y luego límite de funciones, al parecer su profesor trabajó con la idea intuitiva de límite, sin embargo sus dificultades se presentaron al momento de acotar el delta. El estudiante 2 manifiesta que le hubiese gustado aprender los límites apoyados en su interpretación geométrica y no basados en la repetición de ejercicios y demostración de teoremas (interpretación algebraica). El estudiante 3 en un primer momento estudió límites apoyados en la interpretación algebraica y luego al pasar el tiempo y estudiar límites en varias variables fue cuando comprendió su definición.

Las concepciones del profesor – autor se encuentran directamente influenciadas por la mayoría de los textos revisados, ya que estos constituyeron los libros utilizados en su formación. En el apartado concepciones del profesor – autor se evidencia una preferencia por los sistemas de representación gráfico y simbólico de los límites, mientras que los sistemas de representación verbal y tabular son utilizados en menor medida.

REFERENCIAS

Andonegui, M, y Hernández, J. (2003). *Concepciones acerca de la noción de límite.* Disponible: https://www.clame.org.mx/actas1.html [Consulta: 2019, Enero 7].

Ayres, F. (1971). *Cálculo diferencial e integral*. México: McGraw – Hill.

Azcárate, C y Camacho, M. (2003). *Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático*. Disponible: http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/matias-carmen.pdf [Consulta: 2019, Enero 7].

Baranenkov, G., Demidovich, B., Efimenko, V., Frolov, S., Kogan, S., Lunts, G., Porshneva, E., Shostak, R., Sichova, E. y Yampolski, A. (1977). *Problemas y ejercicios de análisis matemático*. Moscú: MIR.

Barcellos, A y Stein, S. (1995). *Cálculo y Geometría Analítica*. Santafé de Bogotá: McGraw – Hill Interamericana.

Barragán, F, Pantoja, H y Sarabia, J. (1992). *Problemas de Cálculo Diferencial*. Barquisimeto: Elipse.

Bonilla, M. (2009). *Análisis epistemológico de la noción de límite en un contexto computacional.* Disponible: https://www.clame.org.mx/actas.html [Consulta: 2019, Enero 4]

Braschi, G. (2000). *Matemática II*. Barinas: Universidad Ezequiel Zamora.

Buitrago, O. y Macana, B. (1999). *Matemática II*. Barinas: Universidad Ezequiel Zamora.

Camacho, N., Díaz, M., Locia, E., Navarro, C. (2009). *Formación del concepto de límite mediante dos registros de representación: representaciones gráficas y el uso algebraico.* Disponible: https://www.clame.org.mx/actas.html [Consulta: 2019, Enero 6].

Claros, F., Coriat, M. y Sánchez, M. (2007). *Fenómenos que organizan el límite* Disponible: https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwictdHxiuPvAhUFSN8KHScIBpIQFjAAegQIAhAD&url=https%3A%2F%2Frevistaseug.ugr.es%2Findex.php%2Fpna%2Farticle%2Fdownload%2F6210%2F5525%2F&usg=AOvVaw3RilVRMdxLmuOmO3LhnbZL [Consulta: 2019, Febrero 25].

Cruz, J y Ramírez, J. (2009). *El entorno de aprendizaje dinámico modular orientado a objetos en la enseñanza del concepto de límite.* Disponible: https://www.clame.org.mx/actas.html [Consulta: 2019, Enero 4].(

De Guber, R. y Sadosky, M. (1975). *Elementos de cálculo diferencial e integral*. Buenos Aires: Alsina.

Edwards, B., Hostetler, R. y Larson, R. (2006). *Cálculo*. México: McGraw – Hill.

Edwards, C. y Penney, D. (1997). *Cálculo diferencial e integral*. México: Prentice – Hall Hispanoamericana.

Escobar, B. (1998). *Matemática I. Funciones y Representaciones Gráficas.* Caracas: Universidad Nacional Abierta.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo*. México: Oxford University Press.

Maldonado, E., Miranda, N. y Navarro, C. (2007). *Conflictos cognitivos que emergen en la resolución de problemas relativos al límite.* Disponible: https://www.clame.org.mx/actas.html [Consulta: 2019, Enero 7].

Martins, F, y Palella, S. (2010).*Metodología de la Investigación Cuantitativa*. Caracas: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Mérida, K. (2003). *El libro dinámico de CEUs. Límites y continuidad I*. Maracay: Autor.

Purcell, E., Rigdon, S. y Varberg, D. (2001). *Cálculo*. México: Pearson.

Rico, L. (2013). *El método del Análisis Didáctico.* Disponible: www.fisem.org/www/union/revistas/2013/33/ARCHIVO6.pdf [Consulta: 2019, Febrero 25].

Rico, L. y Segovia, I. (2001). *Unidades Didácticas. Organizadores. Didáctica de la Matemática en la Escuela Primaria.* Madrid: Síntesis.

Rojas, J. (1976). *Cálculo I*. Maracay: Autor.

Rojas, J. y Salazar, J. (1985). *Matemática I Operaciones en N, Divisibilidad, Funciones.* Caracas: Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Sáenz, J. (2005). *Cálculo diferencial con funciones trascendentes tempranas para ciencias e ingeniería*. Barquisimeto: Hipotenusa.

Stewart, J. (2001). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas.* México: Thomson Learning.

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Enero-Junio 2020. Vol. 17, N° 1
Revista Multidisciplinaria Dialógica

Síntesis Curricular

Rolando Antonio García Hernández

Profesor. Especialidad: Matemática, (UPEL – Maracay) (2004). Magíster en Educación mención: Enseñanza de la Matemática, (UPEL – Maracay) (2009). Doctor en Educación, (UPEL – Maracay) (2013). Especialista en Docencia en Educación Superior. (UPEL – Maracay) (2016). Especialista en Educación para la Integración de las Personas con Discapacidades. (UPEL – Maracay) (2019). Tutor y jurado de trabajos de investigación a nivel de maestría y doctorado. Jefe del Área de Asistencia Técnica de la Unidad de Evaluación Estudiantil de la UPEL – Maracay (2014). Coordinador del Doctorado en Educación Matemática. (UPEL – Maracay) (2018). Profesor Titular del Departamento de Matemática, (UPEL – Maracay) con los siguientes cargos administrativos: Coordinador del Programa de Asesoría Académica, Miembro de la Comisión de Equivalencia por el área de Análisis y Jefe del Área de Análisis.