UPE L
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR

INSTITUTO PEDAGOGICO DE BARQUSIMETO LUIS BELTRAN PRIETO FIGUEROA

REVISTA

educare

Órgano Divulgativo de la Subdirección de Investigación y Postgrado del Instituto Pedagógico de Barquisimeto "Luis Beltrán Prieto Figueroa"

BARQUISIMETO – EDO. LARA – VENEZUELA

NUEVA ETAPA
FORMATO ELECTRÒNICO
DEPOSITO LEGAL: ppi201002LA3674
ISSN: 2244-7296

Volumen 17 Nº 2
Mayo-Agosto 2013

ESTRATEGIAS IMPLEMENTADAS POR LOS MATEMÁTICOS CUANDO DEMUESTRAN: ESTUDIO DE CASO

STRATEGIES IMPLEMENTED BY MATHEMATICIANS WHEN THEY DEMONSTRATE. CASE STUDY

Carmen María Valdivé Fernández
Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
Venezuela

ESTRATEGIAS IMPLEMENTADAS POR LOS MATEMÁTICOS CUANDO DEMUESTRAN: ESTUDIO DE CASO

STRATEGIES IMPLEMENTED BY MATHEMATICIANS WHEN THEY DEMONSTRATE. CASE STUDY

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Carmen María Valdivé Fernández*
UCLA
Venezuela

Recibido:01-07-13 Aceptado: 26-08-13

RESUMEN

Se reportan los resultados parciales de un trabajo de investigación sobre el papel de la definición en la demostración a la hora de proponer tareas matemáticas que las involucre. El problema central estuvo dirigido al proceso de demostración y a los esquemas de prueba en Doctores en Ciencias Matemáticas. Se plantean como propósitos (1) Analizar los esquemas de prueba de estos doctores cuando demuestran y (2) Describir las estrategias que implementan estos matemáticos al demostrar. En el artículo sólo se muestra el segundo de éstos. Conceptualmente la investigación se fundamenta en la aproximación teórica Pensamiento Matemático Avanzado. Metodológicamente es un estudio cualitativo y de campo. Los actores sociales son dos doctores de dos universidades venezolanas. Entre los hallazgos se destacan: (1) Los matemáticos utilizan estrategias formales (2) Se encontró que los doctores consideran el dominio de las definiciones y el contexto como fundamental al momento de realizar una demostración.

Descriptores: Esquemas de Prueba, Pensamiento Matemático Avanzado, Estrategias de Demostración.

ABSTRACT

Partial results of a research on the role of definition in demonstrations in proposing mathematical tasks are reported. The central problem was addressed in the process of demonstration and test schemes in Doctors in Mathematics. Purposes are presented as (1) Analyze test schemes when these doctors demonstrate and (2) Describe the strategies that implement these mathematicians to prove. In the paper only the second of these is shown. Conceptually, the research is based on the Advanced Mathematical Thinking theoretical approach. Methodologically is a qualitative and field study. The social actors are two doctors from two Venezuelan universities. Among the findings: (1) Mathematicians use formal strategies, (2) doctors consider the domain of definition and context as essential when making a demonstration.

Keywords: Test Schemes, Advanced Mathematical Thinking, Strategies Demonstration.

* Profesora de matemática a Dedicación Exclusiva, Titular. Decanato de Administración y Contaduría, Dpto. de Técnicas Cuantitativas. Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. Barquisimeto. Venezuela. correo electrónico: carmenv@ucla.edu.ve

INTRODUCCIÓN

Este trabajo surge desde una reflexión en el salón de clases en diversas áreas de la matemática en las cuales se destaca la asignatura Análisis Matemático. En particular se presenta el interés por estudiar la demostración matemática vista como un proceso cognitivo. En este sentido nos preocupamos por este proceso en los estudiantes, lo que nos indujo a otra importante cuestión, ¿cuáles son las estrategias que utilizan los matemáticos cuando demuestran? ; ¿cuáles son los esquemas de prueba de estos matemáticos maduros?. Para esto nos fijamos dos propósitos (1) Analizar los esquemas de prueba de algunos doctores cuando demuestran y (2) Describir las estrategias que implementan algunos matemáticos al demostrar. En este manuscrito presentaremos los hallazgos relativos al segundo propósito.

Con este fin nos fundamentamos en la aproximación teórica Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) y se toma como constructo los esquemas de prueba en la demostración y las estrategias que se implementan. Se considera que el estudio sobre la comprensión de la demostración matemática tiene importancia desde el punto de vista didáctico para los investigadores o, profesores de matemática.

Desde el punto de vista metodológico, consideramos que las estrategias implementadas (estudio de caso y comparaciones constantes) para lograr el propósito, la planificación de la entrevista y los análisis propuestos permiten ver el comportamiento global de los actores y observar rasgos característicos sobre las estrategias que implementan, como se detallará más adelante.

Este artículo se ha organizado en secciones relevantes: una introducción, problemática de estudio y fundamentación teórica, metodología, resultados, conclusiones y recomendaciones.

PROBLEMÁTICA DE ESTUDIO Y FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En la actualidad, la educación matemática se enfrenta a diversos desafíos, uno de ellos es el interés por el estudio de las dificultades de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática, el cual ha tomado gran importancia y relevancia en las últimas décadas. Se han llevado a cabo diferentes investigaciones y discusiones en torno a la demostración matemática, tomando en cuenta los planteamientos de diversos autores como Martínez (1999), Ibañes (2001), Azcarate (s/f), Calvo (2001) y Colmenárez (2008). Estos autores han abordado la temática desde varias perspectivas y teorías, analizando los factores que pueden influir en la enseñanza, el aprendizaje y en general todo lo que tiene que ver con el quehacer demostrativo. Estos trabajos son abordados desde diferentes marcos teóricos y en particular desde la aproximación teórica PMA. Teoría cognitiva desarrollada por Tall (1991) y Dreyfus (1991) a partir de los aportes de Bruner y Piaget. Esta teoría estudia la descripción de la naturaleza del conocimiento matemático y lo procesos cognitivos que se utilizan para construirlo, en particular en este trabajo abordaremos, el proceso demostración.

Al respecto, Harel y Sowder (1998) estudian la dimensión personal o subjetiva de la demostración matemática. El elemento esencial de su propuesta es la idea de esquema personal de demostración. Para los autores representa todo aquello que supone persuasión y convencimiento para una persona.

Colmenárez (2008; ob.cit.) plantea que muchas son las preguntas que hoy no tienen respuestas:

> ¿Qué hace que la comprensión de la demostración sea una tarea difícil para la mayoría de los estudiantes? ¿Qué fuerza a muchos estudiantes a recurrir a memorizar demostraciones? ¿Son los contenidos específicos la fuente del problema? ¿O es la forma en que es enseñada lo que lleva a los estudiantes a no ser capaces de darle sentido?.

Las diferentes investigaciones tratan de dar respuestas a estas y otras interrogantes en torno a la naturaleza de la demostración y los procesos de pensamiento implicados.

Por su parte, Crespo (2005) señala que las demostraciones ocupan una posición central en la actividad matemática, ya que constituyen el proceso de validación de las afirmaciones de esta ciencia, en contraposición, por ejemplo de lo que ocurre en la Física o en otras ciencias, en las que el método de verificación de las afirmaciones consiste en su contrastación con la realidad.

La demostración en clase de matemática presenta una gran diversidad de formas, y aparece en los distintos subsistemas a través de variados tipos de argumentaciones (Crespo, ob.cit., p.3). El pensamiento matemático se va construyendo lentamente a lo largo de las distintas etapas escolares, lo cual no significa que se logre realmente su construcción de manera sólida. Es común encontrar algunos estudiantes universitarios que aún no han logrado dominar este proceso de pensamiento (Ibañes y Ortega, 1997).

Cabe destacar, que las demostraciones involucran una serie de dificultades características de la etapa de transición entre unas matemáticas elementales y unas matemáticas avanzadas como lo son, la ausencia de un sentimiento de necesidad de demostrar por parte de los estudiantes, las dificultades para que generen sus propias demostraciones, los errores en la comprensión de la naturaleza de la demostración, la resistencia a aceptar que la existencia de un contraejemplo invalida irrevocablemente una afirmación matemática, etc. (Dreyfus, 1990).

Asimismo, Ibañes (2001) afirma que se presentan numerosas dificultades en la comprensión de las demostraciones, y, en particular, en su apreciación global, en el reconocimiento de procesos matemáticos y en la interpretación y uso de ciertas expresiones.

En cuanto a la comprensión de la demostración, el autor plantea lo siguiente:

> Hay que comprender *globalmente la demostración*. Esto significa *comprender el razonamiento* empleado, para lo que es necesario poseer el *esquema de prueba* adecuado que permita: ser consciente de la necesidad de un razonamiento *universalmente válido*; la identificación del proceso- dada una demostración de una determinada proposición, reconocer que, efectivamente se trata de una demostración- y su *distinción*- diferenciar una demostración de otros procesos matemáticos, como justificaciones, cálculos etcétera-; y el reconocimiento de las *líneas maestras* y las *ideas claves* de la demostración. Pero, *comprender* globalmente la demostración también significa comprender los recursos utilizados- *métodos*, *estilos* y *modos*- y *comprender los fines*- valorar las *funciones* que cumple la demostración estudiada. Por último, para comprender las demostraciones resulta útil dominar algunos recursos *auxiliares*, como los de *cálculo*, los de *visualización*, o los recursos de *analogía* (geométricos, mecánicos, etcétera) (Ibañes, ob.cit.,p. 12)

A pesar de existir una serie de estudios empíricos que han abordado las dificultades de los estudiantes con la prueba, la literatura sugiere las siguientes áreas de dificultad potencial que los estudiantes encuentran en aprender a hacer las pruebas:

a) la percepción de la naturaleza de la prueba (Balacheft, 1987; Bell, 1976; Galbraith, 1981; Lewis, 1987; Schoenfeld, 1985)

b) la lógica y los métodos de prueba (Bittinger, 1969; Duval, 1991; Morgan, 1972; Solow, 1990)

c) las habilidades de resolución de problemas (Goldberg, 1975; Schoenfeld, ob.cit.)

d) el lenguaje matemático (Laborde, 1990; Leron, 1985; Rin, 1983)

e) la comprensión del concepto (Dubinsky y Lewin, 1986; Hart, 1987, Tall y Vinner, 1981; Vinner y Dreyfus, 1989; Dreyfus, 2000).

Estos estudios sugieren que la capacidad de leer las pruebas matemáticas abstractas depende de una compleja constelación de creencias, conocimientos, y habilidades cognitivas. No está del todo claro, sin embargo, que estos factores son los más importantes, ni cómo estos factores interactúan entre sí.

Por otra parte, Alvarado y González (2013) indican que la habilidad en el manejo de implicaciones lógicas es imprescindible para que los futuros matemáticos sean capaces de construir demostraciones. A pesar de su importancia, los estudiantes tienen grandes dificultades con esta tarea.

Para abordar una demostración se debe poseer un *esquema de prueba* adecuado que le permita comprender la situación y formarse una idea correcta de lo que hay que hacer. Para Harel y Sowder (1998), demostración es el proceso empleado por un individuo para quitar o eliminar las dudas sobre la verdad de una proposición.

Harel y Sowder (2007) definen un esquema de demostración como los argumentos que usa una persona para convencer a otros y a sí misma de la veracidad o falsedad de una proposición matemática; además, caracterizan siete tipos de esquemas de demostración agrupados en tres categorías: esquemas de convicción externa, esquemas empíricos y esquemas analíticos.

La demostración como proceso cognitivo representa una problemática por cuanto involucra otros procesos de pensamiento (Abstracción, análisis, conjeturación, entre otros) que se activan en la mente cuando se afronta una tarea de demostración, a su vez el sujeto al demostrar evoca imágenes, conceptos, definiciones, conocimientos previos que pueden ser abordados desde otra perspectiva.

En este sentido, se aborda la problemática que se plantea desde la aproximación teórica cognitiva del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) desarrollada por Tall (1991) y Dreyfus (1990, 1991), tomando en cuenta que la demostración debe ser estudiada en todos sus sentidos, considerando los problemas que se presentan cuando se enfrenta a una demostración matemática, en particular estudiar las estrategias que implementan los matemáticos maduros al demostrar. Esto podría dar luces a cómo abordar la enseñanza.

Al respecto, Ferrero y Ferraris (2008) plantean lo siguiente:

> un hecho muy conocido para quienes se relacionan con el que hacer matemático es que la presentación de una demostración refleja la mayoría de las veces sólo una pequeña parte de la actividad cognitiva llevada a cabo, dado que el encadenamiento desde las premisas a la conclusión se muestra como producto, de manera lineal y lógica, sin rastros de las bifurcaciones, lagunas, titubeos, contramarchas o súbita inspiración por las cuales derivaron los pensamientos de quien ha logrado "la demostración". (p. 30)

En la investigación que se presenta se indaga sobre como se viene explicitando, sobre las estrategias al demostar, con el objetivo de dar aportes didácticos para la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática. En tal sentido, se reseñan algunos trabajos que abordan de manera global la demostración (desde un punto de vista cognitivo, histórico-epistemológico y matemático) así como los esquemas de prueba en Educación Matemática.

Dimensión Global de la Demostración

Se han abordado tres dimensiones de la demostración matemática: *cognitiva (Esquemas de prueba), histórica-epistemológica y matemática*. En este manuscrito sólo hacemos referencia a la cognitiva.

Dimensión cognitiva de la demostración matemática

La demostración es un proceso cognitivo que se sigue para justificar las teorías matemáticas. A pesar de existir otras formas de demostración, el modelo que predomina en la institución matemática es el lógico-formal (Recio, 2001).

Se tienen diversos estudios y aportaciones de numerosos investigadores en torno a la demostración matemática, como se explicitó en párrafos anteriores. Sin embargo, Ibañes (2001) señala algunas *fases* en la comprensión de las demostraciones y es la que se utiliza en la investigación que se presenta en el manuscrito:

1. *Fase de interpretación*:

- Entender el problema y la clase de solución que requiere (*esquema de prueba*).
- Comprender los términos matemáticos empleados.
- Interpretar las proposiciones lógicas, las expresiones usuales, las palabras de enlace y la notación utilizada.
- Reconocer el proceso como una demostración.

2. *Fase de análisis*:

- Identificar el *tipo* de enunciado.
- Identificar la *hipótesis* y la *tesis* del teorema.
- Recordar los resultados anteriores que se aplican en la demostración.
- Revisar los pasos y comprobar la corrección del razonamiento.

3. *Fase de síntesis*:

- Identificar las *líneas maestras* y las *ideas clave* de la demostración.
- Comprender globalmente el proceso.

4. *Fase de profundización*:

- Reconocer el *significado* del teorema (*abstracción*).
- Identificar las técnicas empleadas: *métodos*, *estilos* y *modos*.
- Valorar las *funciones* que cumple la demostración estudiada.
- Buscar otras formas de demostrar el resultado.
- Estudiar sus posibles generalizaciones.
- Relacionar el teorema con otros resultados conocidos.

Otro aspecto importante dentro de la dimensión cognitiva de la demostración, es la abstracción, concepto introducido por Piaget para describir la construcción de estructuras lógico- matemáticas por un individuo durante el proceso de desarrollo cognoscitivo (Dubinsky, 1991).

Uno de los propósitos que nos hemos planteado, consiste en analizar los esquemas de prueba, a continuación se desarrolla esta temática a partir de los trabajos de autores que han estudiado la misma, como lo son Harel y Sowder (1998), Alibert & Thomas (1991) y Colmenárez (ob.cit.) entre otros.

Los esquemas de prueba

Harel y Sowder (1998) caracterizan siete tipos de esquemas de demostración agrupados en tres categorías: esquemas de convicción externa, esquemas empíricos y esquemas analíticos.

Para ellos existen tres tipos de esquemas de convicción externa y en cada uno los estudiantes se convencen a sí mismos o a otros usando algo externo a ellos. En un *esquema de demostración ritual* la convicción se debe a la forma de la demostración más no a su contenido. En un *esquema de demostración simbólico,* la convicción es por la manipulación simbólica, detrás de la cual puede o no haber significado. Un *esquema de demostración autoritario* es aquel en el que la convicción se debe al hecho que el profesor, el libro de texto o alguna otra autoridad lo establezca. Existen varias clases de manifestaciones de este esquema en el comportamiento matemático de los alumnos, entre ellas están las siguientes:

a) Esperan que se les haga una demostración en vez de intentar tomar parte en su construcción.
b) Piden ayuda para resolver un problema antes de hacer un esfuerzo para resolverlo ellos mismos.
c) Tras haber etiquetado un argumento como *demostración* o un resultado como *teorema,* renuncian a razonar sobre su validez.
d) Para probar una cierta proposición contestan con una simple reformulación del enunciado propuesto.
e) No expresan sus dudas sobre las explicaciones del profesor o no piden aclaraciones.
f) Se preguntan solamente *cómo,* pero no *por qué*, subyace la influencia autoritaria.

En los esquemas de demostración empíricos, según los autores, las conjeturas se validan o se rechazan en virtud de hechos físicos o experiencias sensoriales, pueden ser inductivos o perceptuales. Un estudiante con un *esquema de demostración empírico inductivo* considera uno o más ejemplos para convencerse de la verdad del caso general. En una *demostración perceptual* el estudiante hace inferencias basándose en imágenes mentales rudimentarias que no se apoyan totalmente en la deducción pero considerando tales inferencias convincentes tanto para sí mismo como para convencer a otros.

Efectivamente, Harel y Sowder (1998) notaron que la característica importante de las imágenes mentales rudimentarias es que ellas ignoran las transformaciones sobre los objetos o son incapaces de anticiparse a transformaciones completas o precisas. Un caso típico se da, cuando un alumno obtiene conclusiones generales a partir de un dibujo concreto, en el que los distintos elementos guardan relaciones que, en general, no son ciertas; haría falta que el alumno fuera capaz de aplicar las transformaciones adecuadas para que se diera cuenta de que el argumento no es válido.

Los autores precitados indican que en los *esquemas de demostración analíticos,* las conjeturas se validan a través de la deducción lógica, pueden ser transformacionales o axiomáticos. En un esquema de demostración *transformacional* el sujeto convence a otros o es convencido por un proceso deductivo en el cual se consideran aspectos generales, aplican operaciones mentales anticipadoras y se transforman imágenes. Un esquema transformacional que ha sido enclaustrado en una demostración heurística que se encuentra disponible, lo llaman *internado* -es como si utilizara módulos prefabricados-. Por ejemplo, para demostrar que dos segmentos dados son congruentes, los estudiantes pueden buscar dos triángulos que los incluyan, y probar que son congruentes mediante los criterios conocidos de congruencia de triángulos.

Harel y Sowder (ibidem.) definen esquema de prueba *interiorizado* como un esquema transformacional internalizado que ha sido objeto de reflexión por parte de la persona que lo utiliza, siendo consciente de él. Relatan los autores cómo los sujetos interiorizaron el principio de inducción matemática a través de un proceso constituido por tres etapas: *La primera* es una etapa de *construcción* de un esquema transformacional para la inducción matemática, en la que los sujetos centran su atención en las relaciones entre los términos consecutivos de una sucesión. *La segunda* es la etapa de *internación*, en la que el esquema transformacional construido en la primera etapa se interna y se convierte en un método de demostración para un individuo, aunque no sean conscientes de ello. En *la última etapa*, la de *interiorización*, los sujetos explicitan el método que han interiorizado en la etapa anterior y proceden a examinar su aplicabilidad en nuevas situaciones. De esta manera, algunos son capaces de interiorizar el principio de inducción matemática como un método de demostración.

Señalan los autores, que un esquema de demostración *axiomático* va más allá de lo transformacional. En él, el individuo también reconoce que los sistemas matemáticos descansan (posiblemente de manera arbitraria) sobre proposiciones aceptadas sin demostración.

Por su parte, Colmenárez (ob.cit.) considera los esquemas de prueba planteados por los autores Harel y Sowder: esquemas de *convicción externa*, *empíricos* y *analíticos*. Presenta el autor en su trabajo las diversas dificultades por parte del estudiante a la hora de demostrar y propone una clasificación de estos esquemas de la siguiente manera: un esquema de prueba es considerado *arraigado* en el estudiante si en dos o más respuestas escritas u orales las características del esquema de prueba son evidentes. Un esquema de prueba es considerado como *leve* en el estudiante si las características del esquema de prueba eran evidentes en una de sus respuestas escritas u orales.

Desde otra perspectiva, Alibert y Thomas (ob.cit.) afirman que existen pruebas, donde la partes internas no son triviales, *pruebas estructuradas* y *pruebas lineales* (o deductivas formales) que muestran problemas pedagógicos similares a los encontrados en las diversas investigaciones analizadas. Plantean que la *prueba genérica* puede no ser reemplazable por la prueba formal desde el punto de vista puramente lógico, pero puede ser preferible, si este resultado acrecienta, en parte, la comprensión en los estudiantes.

En este sentido plantean Alibert y Thomas (ob.cit.) tres tipos de pruebas: uno general, uno genérico y la prueba estándar por contradicción. Para la prueba genérica y por contradicción ejemplifican dando la prueba de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5/8}$; para la prueba general utilizan la demostración de teoremas en los que destaca, el siguiente: Si una función es diferenciable entre *a* y *b*, y continua en *a* y *b*, entonces existe un punto ε entre *a* y *b* tal que: $f(\varepsilon) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Estos autores recomiendan plantear debates en las aulas para que los estudiantes puedan monitorear y explicitar sus argumentos cuando demuestran.

METODOLOGÍA

En el trabajo que se presenta, se analizan y describen, como se dijo en párrafos precedentes, las estrategias que implementan dos doctores en Ciencias Matemáticas. En tal sentido, nos adherimos a una investigación cualitativa desde la psicología, tal como lo plantea Rodríguez (citado por González, 2000). La investigación cualitativa se orienta al conocimiento de un objeto complejo: la subjetividad, cuyos elementos están implicados simultáneamente en diferentes procesos constituidos del todo, los cuales cambian frente al contexto en que se expresa el sujeto concreto. Para Rodríguez, la historia y el contexto que caracterizan al desarrollo del sujeto marcan su singularidad, la cual es expresión de la riqueza y plasticidad del fenómeno subjetivo (p.33).

Para recoger la información se aplica un cuestionario contentivo de dos ítemes (dos proposiciones tomadas del trabajo de Rodríguez (2012)) para encontrar las estrategias ligadas a la demostración: el uso de las definiciones en una prueba y los elementos cognitivos en la comprensión de la demostración que propone Ibañes (2001). También se aplica una entrevista en profundidad.

El cuestionario se diseña siguiendo la revisión bibliográfica y el acercamiento histórico–epistemológico a la demostración matemática y las temáticas tratadas en asignaturas como Análisis Matemático. Los ítemes fueron tomados de algunos estudios previos sobre la demostración matemática y los procesos de pensamiento. Se tienen los de Colmenárez (ob.cit.), Alibert y Thomas (ob.cit.), Dreyfus (ob.cit.) y Rodríguez (ob.cit.).

La Entrevista clínica o en profundidad, corresponde con el método y con los propósitos de la investigación, pues como expresa Valdivé (2008) y Valdivé & Garbin (2008): (a) Permite la obtención de una riqueza de información, (b) Proporciona la oportunidad de clarificación y seguimiento de preguntas y respuestas, en un marco de interacción más directo y espontáneo, (c) Genera otros instrumentos técnicos, (d) Favorece el análisis de significados y (e) Favorece el estudio de casos típicos o extremos, en los que la actitud o respuestas de ciertos sujetos personifica, en toda su riqueza, el modelo ideal de una determinada categoría o fenómeno, como lo es el que se pretendió en el trabajo desarrollado.

Los dos doctores, actores de la investigación, fueron etiquetados aleatoriamente con números naturales del 1 al 2. En lo sucesivo D1 y D2 denotan los doctores como informantes claves, según el caso. Al finalizar el análisis de las respuestas del cuestionario, se aplica una entrevista en profundidad. Seguidamente se transcribe la información recabada en las matrices correspondientes y se realizan las redes sistémicas por cada ítem con su respectivo análisis. Por cuestiones de espacio sólo se muestra una red.

Las dos preguntas formuladas en el cuestionario se explicitan a continuación: (1) Probar que n^3- n es divisible por 6, para todo entero n y (2) Sea W un subespacio de un espacio vectorial V sobre un cuerpo F, si x_1; x_2 € W y a1; a_2 € F, pruebe que: $a_1x_1 + a_2x_2$€W: Dar un ejemplo con dos subespacios que cumplan las condiciones. Si en el enunciado anterior se considera x_1; x_2; … x_n € W y a_1; a_2; … a_n € F; ¿ se seguirá cumpliendo que $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ € W?

Se opta por el uso de las redes sistémicas (Bliss, Monk y Ogborn, 1983) como sistema de clasificación y representación de los datos cualitativos obtenidos a partir del estudio y análisis de los esquemas de prueba. Se elaboran redes sistémicas por item. Las redes se estructuran en forma de árbol con ramas que se subdividen en “clases” (se usa como formalismo la barra (|), que son categorías que se excluyen entre ellas), y en “aspectos” (se usa la llave ({) para indicar que son categorías no excluyentes). Con la llave (}) se indica que la nueva categoría incluye las anteriores. Al final de cada rama aparece el nombre del matemático (D1, D2) representativo de cada categoría y/o subcategoría.

ANÁLISIS Y HALLAZGOS

El esquema de prueba que se evidencia en el estudio es el esquema analítico axiomático, en correspondencia con lo señalado por los diversos autores ya que los informantes son matemáticos maduros, entendiéndose por maduros, doctores en Ciencias Matemáticas que hacen Matemática. Los rasgos de este esquema se explicitaron en párrafos anteriores. Se contrastaron las respuestas emitidas en el cuestionario con las emitidas en la entrevista en profundidad. Describimos brevemente algunas observaciones:

En la pregunta 1 del cuestionario (Figura 1) tomado del estudio de Alibert y Thomas (ob.cit.) sobre la comprensión de las pruebas en los estudiantes. Se explora sobre el uso de definiciones y su influencia en la demostración, los procesos de comprensión de la prueba, elementos lógicos y cuantificadores, las estrategias que muestran los matemáticos.

Ante este planteamiento, D1 utiliza definiciones, aplica el contexto, y propiedades que derivan de los números enteros. Realiza y ejecuta un plan, tal como se evidencia en la entrevista:

E*: ¿Podría indicarme qué fue lo primero qué pensó cuando leyó la primera pregunta del cuestionario?*
D1: Leí el enunciado e inmediatamente pensé lo siguiente: (a) hice algunas observaciones tomadas de la lectura, como son: Se pide probar que la propiedad mostrada "n^3 - n es divisible por 6” y me dije es válida para todo número entero n. El ambiente donde se pide comprobar dicha propiedad es el conjunto de números enteros Z; las operaciones involucradas son la potenciación y la resta, ambas operaciones definidas sobre Z.
E: Luego que hizo esas consideraciones, ¿qué ideas, imágenes o definiciones y análisis pensó?
D1: Hice un inventario de todas las definiciones involucradas y sobre todo el ambiente donde se me plantea la proposición, porque el dominio de las definiciones en el ambiente de abordaje es crucial.
E: Podría explicitar ¿Cuál fue el análisis qué hizo?
D1: La proposición indica verificar que para todo número entero n; el número entero resultante de la operación $n^{3\ -}$ n es divisible por 6, lo cual implica verificar que existe un número entero positivo m tal que $n^3 - n = m.6$. Lo que cabe considerar lo siguiente: (1) si n es positivo y mayor que 1; tenemos que $n^3 - n$ es positivo, ya que $n^3 > n$; (2) en el caso que de que n = 1 ó n = 0 ó n = -1 se tiene que $n^3 - n = 0$, y (3) en el caso de que n es negativo, menor que -1; entonces $n^3 - n$ es negativo, ya que $n^3 < n$.
E: ¿ Cómo seleccionó el método de demostración?

D1: Considerando valores enteros positivos, el hecho que la proposición plantea la verificación de tal propiedad para cada valor de estos enteros, sugiere el uso del principio de inducción matemática.

Podría explicitar ¿qué definiciones utilizaría? A continuación un fragmento que recoge lo que piensa el informante D_1.

D_1: Pensé sobre las definiciones involucradas
Primero: El conjunto de números enteros está definido por medio de Z = $\{\ldots,-3,-2,-1, 0, 1,2,\ldots\}$
en el cual está definida la operación de resta. Definida como a - b = a + (-b)
y la de potenciación por medio de $a^n = a.\underbrace{a.\,a\ldots a}_{n \text{ veces}}$
Segundo: La divisibilidad por un número entero está definida de la siguiente forma:
Decimos que un número entero a es divisible por un número entero b si existe un número entero r tal que a = r.b
Luego analizo la proposición. Y finalmente escribo lo siguiente: Hago tres consideraciones para n: n positivo y mayor a 1; n negativo y menor a -1, y el caso de que n sea 1, -1 o 0; la proposición sería $n^3 - n = 0$.
Luego hago las consideraciones sobre n para elegir mi método de demostración.
E: ¿Cuál método selecciona?
D_1: Inducción. Considerando valores enteros positivos, el hecho que la proposición plantea la verificación de tal propiedad para cada valor de estos enteros, sugiere el uso del principio de inducción matemática. Para tal efecto, probamos si tal propiedad es válida para algunos enteros, de ser así, suponemos que es válida para un entero arbitrario k (hipótesis inductiva), y probamos, vía propiedades de los enteros, para un valor entero (k + 1):

Escribe lo siguiente:

D_1: Para n = K entero positivo, se tiene que –k es su simétrico, entero negativo, obtenemos por propiedad de los enteros que:

$$\begin{aligned}(-k)^3-(-k) &= -k^3+k\\ &= -(k^3-k)\end{aligned}$$

entonces el método de inducción, usado para los enteros positivos, nos permite obtener una conclusión válida para enteros negativos con la simple multiplicación por -1. Luego procedo a desarrollar la demostración:
Primero procedemos considerando algunos valores enteros positivos:
Si n = 0 entonces $n^3 - n = 0$*., y obviamente haciendo m = 0 obtenemos que* $n^3 - n = m.6$
D1: Continúo con los casos para n=1; n=2 y n= 3. Planteo la Hipótesis inductiva: Suponemos entonces que para cierto valor arbitrario n = k > 3 se cumple que existe un entero p tal que $k^3 - k = p.6$

Luego D1 escribe las Propiedades que derivan de los enteros, el resultado a que llega y desarrolla la demostración. A continuación la trascripción de su escrito:

D1: Hipótesis inductiva
Suponemos entonces que para cierto valor arbitrario n = k > 3 se cumple que existe un entero p tal que $k^3 - k = p.6$
Propiedades que derivan de los enteros
$(k + 1)^3 - (k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1$, *desarrollando producto notable*
$= k^3 + 3k^2 + 2k$
$= k^3 + 3k^2 + 2k + k - k$, *sumando y restando k*
$= (k^3 - k) + 3k^2 + 3k$

$= k^3 + 3k(k+1)$ factorizando $3k^2 + 3k$

Sin pérdida de generalidad, si suponemos que k es un número par, debe tener la forma $k = 2s$ para algún s entero y por consiguiente, $k + 1 = 2s + 1$, así que

$(k + 1)^3 - (k + 1) = + 3.2.s(2.s + 1)$

$= p.6 + s\ (2s + 1)6$

$= (p + s(2s + 1))\ .6$

y como $p + s(2s + 1)$ es un entero, hemos encontrado que existe un entero $m = p + s(2s + 1)$ tal que $n^3 - n = m.6$. Concluimos así, que la propiedad establecida en la proposición es válida para todo entero n positivo. Si consideramos $n = -k$ vemos que

$(-k)^3 - (-k) = -k^3 + k = -(k^3 - k)$

$= -p.6$

y en consecuencia para valores enteros negativos la proposición sigue siendo válida.

Resultado obtenido

Como p y m son enteros, tenemos que $p + m(2m + 1)$ es un entero, y por consiguiente, hemos encontrado que la operación (k+1)3-(k+1) es el producto $(p + m(2m + 1)).6$, es decir, el número entero $(k +1)^3 -(k +1)$ es divisible por 6.

Redacción de la demostración

Probemos la proposición para $n = 1$, $n^3 - n = 1^3 - 1 = 0$, y claramente si
$m = 0$, tenemos que $m.6 = 0$, así que $n^3 - n = m.6$, es decir, $n^3 - n$ es divisible por 6.

Probar que n^3- n es divisible por 6 para todo entero n

Demuestra el enunciado

Presenta consideraciones Método de Inducción Usa definiciones, contexto, y propiedades que derivan de los enteros.

Define Z y las operaciones de sustracción y potenciación.

a - b = a + (-b); a^n = a. a. a…a (n veces)

Para cierto valor arbitrario n = k > 3 se cumple que existe un entero p tal que k^3 - k = p.6

Probamos si tal propiedad es válida para algunos enteros, de ser así, suponemos que es válida para un entero arbitrario k (hipótesis inductiva), y probamos, vía propiedades de los enteros, para un valor entero (k + 1).

Considera n= k positivo, negativo, o cero. Y de ser negativo, considera el simétrico de k.

Usa Divisibilidad

La divisibilidad por un número entero está definida de la siguiente forma: Decimos que un número entero a es divisible por un número entero b si existe un número entero r tal que a = r.b

Usa definición de número par e impar, n negativo, positivo o cero.

(D1)

Supone la diferencia como producto de tres enteros consecutivos

$n^3 - n = (n^2 - 1)n = (n-1)n(n+1)$ es el producto de tres enteros consecutivos, entonces se presentan casos: a) $n^3 - n$ es divisible por 2 en caso de que n sea par e impar y para b) $n^3 - n$ es divisible por 3, presenta que n-1 sea múltiplo de 3.

Como $n^3 - n$ es divisible por 2 y por 3, se concluye que $n^3 - n$ es divisible por 6.

(D2)

Figura 1. Red sistémica de la pregunta 1.

Supongamos que para n = k > 1, arbitrario se cumple que $k^3 - k = p.6$ para algún entero positivo p. Probaremos que para n = k+1 también se cumple.

Análogamente el informante D_2, ante este mismo planteamiento escribe lo siguiente:

D_2: Notemos que $n^3 - n = (n^2 - 1)n = (n-1)n(n+1)$, es el producto de tres enteros consecutivos. Use el método de demostración por casos tomando los casos que da el algoritmo de la división para la división entre seis, considerando que el resto puede ser 0, 1, 2, 3, 4, 5.
Los casos fueron los siguientes:
a) $n^3 - n$ es divisible por 2.
En efecto.
Si n es par, entonces $(n-1)n(n+1) = n^3 - n$ también es par.
Por otra parte si n es impar $(n+1)$ es par y otra vez $(n-1)n(n+1) = n^3 - n$ es par. De donde, $n^3 - n$ es divisible por 2.
b) $n^3 - n$ es divisible por 3.
En efecto
Si (n-1) es múltiplo de 3, también lo es $(n-1)n(n+1) = n^3 - n$.
Si (n-1) no es múltiplo de 3, entonces $n-1 = 3k+1$ o $n-1 = 3k+2$ de donde (n+1)=3k+3 o n=3k+3, en cualquier caso $(n-1)n(n+1) = n^3 - n$ es otra vez múltiplo de 3.
Por tanto $n^3 - n$ es divisible por 3
Como $n^3 - n$ es divisible por 2 y por 3, se concluye que $n^3 - n$ es divisible por 6.

En la segunda pregunta del cuestionario se pregunta lo siguiente: Sea W un subespacio de un espacio vectorial V sobre un cuerpo F, si x_1; x_2 € W y a_1; a_2 € F, pruebe que: $a_1x_1 + a_2x_2$ € W: Dar un ejemplo con dos subespacios que cumplan las condiciones. Si en el enunciado anterior se considera x_1; x_2; … x_n € W y a_1; a_2; … a_n € F; ¿ se seguirá cumpliendo que $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ € W?.

D1 utiliza definiciones, aplica el contexto, y hace algunas consideraciones para abordar la respuesta a la cuestión planteada. Realiza y ejecuta un plan, tal como se evidencia en la entrevista:

D1: Hice algunas observaciones tomadas de la lectura: Se me plantea dar respuesta a tres proposiciones, la primera, probar que el vector resultante de la combinación lineal de dos vectores en un subespacio permanece en el subespacio; la segunda, dar dos ejemplos de subespacios que cumplan el primer resultado, y la tercera, generalizar el resultado para una combinación lineal finita de más de dos vectores en el subespacio. El ambiente donde se plantea la problemática contiene un espacio vectorial arbitrario V, un subespacio W de V, y un cuerpo de escalares F. Las operaciones involucradas son la suma de elementos en un subespacio vectorial y la multiplicación de un escalar del cuerpo por un elemento del subespacio.
E: Qué definiciones utilizaría para dar respuesta a las tres proposiciones?
D1: Claramente en el contexto del álgebra, aplicaría las definiciones de cuerpo, espacio vectorial, subespacio de un espacio vectorial, y combinación lineal.

E: ¿Podría indicarme el plan de acción para dar respuesta?
D1: A partir de la definición de subespacio vectorial **verificamos por deducción** *que la combinación lineal de dos vectores en el subespacio pertenece al subespacio. Posteriormente, de dos subespacios vectoriales conocidos* ***mostrar que la combinación lineal*** *de dos vectores en el subespacio pertenece al subespacio.* ***Finalizar probando que la generalización*** *de una combinación lineal finita de vectores en el subespacio pertenece al subespacio,* **usando inducción** *a partir del primer resultado.*

Análogamente D2 responde lo siguiente:

D2: *La demostración es consecuencia directa de la definición de subespacio. Consideremos* $x_1, x_2 \in W$ *y* $a_1, a_2 \in F$. *Por teorema de subespacio se obtiene que* $a_1 x_1 \in W$ *y* $a_2 x_2 \in W$. *Luego por propiedad de subespacio se tiene que* $a_1 x_1 + a_2 x_2 \in W$. *Para n vectores también se cumple la demostración sería análoga. Lo abordaría con método de inducción completa.*

Encontramos que los doctores mantuvieron rasgos similares a los que manifestaron en el cuestionario. Se puede decir que los matemáticos objeto de estudio mantienen arraigado el esquema de prueba axiomático. Escriben un plan: Prueba la propiedad para 4 o 3 valores; proponen la hipótesis; escriben el resultado y desarrollan la demostración. Las estrategias que implementaron son las siguientes: (a) análisis de la proposición desde el punto de vista matemático (si es un condicional, las consecuencias directas o no, las definiciones que necesitaría y algunas consideraciones); (b) planteamiento de definiciones; (c) ubicación del contexto de la demostración; (d) demuestra proposiciones a utilizar (e) elección del plan de acción, (f) selección del método de demostración; (g) estudio de casos; (h) hace una síntesis antes de demostrar que recoge la línea de pensamiento que explicitó en a, b, c, d, e f y g; (h) desarrolla la demostración según el método y (j) busca generalizaciones.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En la investigación que se presenta hemos encontrado que los doctores en matemática pura logran explicitar lo que plantea Ibañes (2001): (1) Entienden el problema y la clase de solución que requiere (*esquema de prueba*), comprenden los términos matemáticos empleados, interpretan las proposiciones lógicas, las expresiones usuales, las palabras de enlace, el contexto y la notación utilizada; lo que nos permite afirmar que reconocen el proceso como una demostración. (2) Identifican las *líneas maestras* y las *ideas clave* de la demostración, lo que nos hace pensar que comprenden globalmente el proceso. (3)

Reconocen el *significado* del teorema (*abstracción*) e identifican las técnicas empleadas: *métodos de demostración: por casos* (D2) *y por inducción* (D1).

Las definiciones fueron fundamentales para que se generaran demostraciones, los doctores aplicaron definiciones para realizar las pruebas. Este aspecto es importante porque se confirma lo que plantea Harel y Sowder (1998) sobre las definiciones: *las definiciones son una herramienta cognitiva de mucha importancia que se debe considerar para la realización de una demostración de una proposición matemática.* Afirmamos que así como los matemáticos le dan papel preponderante al manejo de las definiciones, los estudiantes deben operar con ellas en las actividades de una prueba; es decir, para obtener la estructura general de una prueba desde una definición.

En síntesis se puede decir que los matemáticos objeto de estudio mantienen arraigado el esquema de prueba axiomático ya que reconocen que los sistemas matemáticos descansan de manera arbitraria sobre proposiciones aceptadas sin demostración. Así mismo interpretan, profundizan, analizan y sintetizan a la hora de enfrentar una tarea matemática que involucra una demostración al emplear diversas estrategias como las que se explicitaron en los párrafos precedentes.

Las estrategias encontradas que implementan los informantes y que no están recogidas en la literatura revisada, son las siguientes: (a) analizan la proposición desde el punto de vista matemático (si es un condicional, las consecuencias directas o no, las definiciones que necesitaría y algunas consideraciones); (b) plantean definiciones a utilizar; (c) ubican el contexto de la demostración; (d) demuestran proposiciones a utilizar (e) eligen el plan de acción, (f) seleccionan el método de demostración; (g) estudian de casos de demostración; (h) hacen una síntesis antes de demostrar que recoge la línea de pensamiento que explicitó en a, b, c, d, e f y g; (h) desarrollan la demostración según el método y (j) buscan generalizaciones.

Recomendaciones

El docente debe darle papel preponderante a la comprensión de las definiciones matemáticas ya que no se pueden realizar demostraciones sin el manejo de las mismas. Esto apoya lo que plantea Harel y Sowder (1998) sobre el papel de las definiciones en el proceso de la demostración matemática.

Considerar el contexto (geométrico, analítico, aritmético, algebraico, analítico) en el cual se desarrollan las demostraciones es fundamental para activar este proceso. Se comprenden más las demostraciones cuando los estudiantes trabajan en el contexto que tienen más experiencia o dominan más los contenidos. Esto apunta hacia lo que plantea Alibert y Thomas (ob.cit.) sobre cómo influye el contexto en el proceso de prueba.

En el proceso de demostración se activan los procesos de generalización, de síntesis y de abstracción. Los tres procesos entran en juego cuando se afronta una tarea de demostración. Se sintetizan los detalles y se enlazan los argumentos presentados, se abstraen ideas definiciones, teoremas entre otros. También se busca la generalización de los enunciados. En virtud de esta afirmación, es necesario que los docentes de matemática promuevan debates científico en las aulas de clase, que permitan que los estudiantes puedan confrontar ideas, definiciones y contexto al afrontar una tarea matemática que implique una demostración.

REFERENCIAS

Alibert, D. y Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. En David Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 215-229). Dordrech, the Netherlans: Kluwer Academic publishers.

Alvarado, A. y González, M. (2013). Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. *Relime.* 16(1); 37-63.

Arsac, G. (1988). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démostration et les phénoménes de validation en France. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 9(3), 247-280.

Azcarate, C. (s/f). *Definiciones, demostraciones ¿por qué?, ¿cuándo?, ¿cómo?*. Disponible http://www.Carmen%20Azc%C3%A1rate%20Gimenez_%20Def%20y%20dem [Consulta: 2013, Febrero 15].

Balacheff, N. (1982). Preuve et demostration en Mathamatiques au College. *Recherches in Didactique des Mathematiques*, 3 (3), 261-304.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics,* 18(2), 147-176.

Bell, A. (1976). "A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations". *Educational Studies in Mathematics*. **7**, 23-40.

Bell, A. (1978). The learning of process aspects of mathematics. *Proceedings of the 2nd International Conference, Psychology of Mathematics Education,* snabrück, West Germany, pp. 48–78.

Bittinger, M. L. (1969). The effect of a unit in mathematical proof on the performance of college mathematics majors in future mathematics courses, *Dissertation Abstracts* 29, 3906A. (University Microfilms No. 69-7421).

Bliss, J., Monk, M. y Ogborn, J. (1983). **Qualitative Data Analysis for Educational Research**. London: Croom Helm.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e integral*. Tesis de doctorado, Universitat Autónoma de Barcelona, España.

Colmenárez, D. (2008). *Errores, dificultades y obstáculos en el aprendizaje de la demostración matemática*. Tesis de doctorado, UCLA-UNEXPO-UPEL Barquisimeto, Venezuela.

Crespo, C. (2005). La importancia de la argumentación matemática en el aula. *Premisa*, 7(24), 23-29.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Revista Épsilon*. España. 26, 15 – 30.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. In Nesher, P. and Kilpatrick, J. (Ed), *Mathematics and Cognition*, (pp 113-134) Cambridge: Cambridge University Press.

Dreyfus, T. (1991). **Advanced mathematical thinking process**. En David Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 25-41). Dordrech, the Netherlans: Kluwer Academic publishers.

Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del currículum. En Gorgorio, N., Deulofeu, A, y Bishop, A. (Coords). **Matemáticas y Educación. Retos y Cambios desde una Perspectiva internacional**, (pp 125-134). España: Graó, S. L.

Dubinsky, Ed. (1991). **Reflective abstraction**. In David Tall (Ed) Advanced Mathematical Thinking, (pp. 81-121). Dordrech, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, Ed. y Lewin, R. (1986). Reflective abstraction and mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness', *Journal of Mathematical Behavior*. 5, 55-92.

Duval, R. (1991). 'Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration', *Educational Studies in Mathematics,* 22, 233-261.

Duval, R. (1992). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Artes Gráficas Univalle.

Ferrero y Ferraris (2008). Una propuesta innovadora de evaluación en geometría. *Educación Matemática*, 20(2), 11-41.

Galbraith, P L. (1981). 'Aspects of proving: A clinical investigation of process', *Educational Studies in Mathematics.* 12, 1-28.

Goldberg, D. J. (1975). 'The effects of training in heuristic methods on the ability to write proofs in number theory', *Dissertation Abstracts International* 35, 4989B.

González, F. (2000). **Investigación cualitativa en psicología. Rumbos y desafíos**. México: Thomson.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). 'Students' proof schemes: Results from exploratory studies'. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld and J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, III*, (234–283). American Mathematical Society, Providence, RI.

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Collegue Instructor` Views of Students Vis-a-Vis Proof. In Despina Stylianou (ed). Teaching and Learning Prof Across the Grades. (pp. 275-289). Madison Avenue New York: by Routledge

Hart, E. W. (1987). 'An exploratory study of the proof-writing performance of college students in elementary group theory', *Dissertation Abstracts International* 47, 4313A. (University Microfilms No. 8707982).

Ibañes, M. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis de doctorado, Universidad de Valladolid, España.

Ibañes, M. y Ortega, T. (1997). La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria. *Educación Matemática,* 9(2), 65-104.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2005). *Dimensiones de la demostración matemática en Bachillerato*. Proyecto no terminado, Universidad de Valladolid, España.

Laborde, C. (1990). 'Language and mathematics', in P. Nesher and J. Ki!patrick (eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Cambridge University Press, Cambridge, pp. 51-69.

Leron, U. (1985). 'Heuristic presentations: The role of structuring', *For the Learning of Mathematics* 5(3), 7-13.

Lewis, S. M. (1987). 'University mathematics students' perception of proof and its relationship to achievement', *Dissertation Abstracts International* 47, 3345A. (University Microfilms No. 8629607)

Martínez, A. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática.* [Resumen en línea]. Tesis de doctorado, Universidad de Córdoba. Disponible: http://www .ugr.es/~jgodino/si=idm/escorial/ponencia1.html [Consulta: 2011, Marzo 16].

Martínez, A. (2001). La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. *Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 30, 29-40.

Morgan, W. H. (1972). 'A study of the abilities of college mathematics students in proof-related logic', *Dissertation Abstracts International* 32, 4081B.

Recio, T. (2001). La mecánica de la demostración y la demostración mecánica. *Revista Iberoamericana de Educación*. Disponible http://www.uv.es/~didmat/angel/seiem.html. [Consulta: 2012, Mayo 20].

Rin, H. (1983). 'Linguistic barriers to students' understanding of definitions', in R. Hershkowitz (ed.), *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel, pp. 295-300.

Rodríguez, P. (2012). *Esquemas de prueba y procesos cognitivos que activan los estudiantes cuando demuestran*. Trabajo de grado no publicado. UCLA-UNEXPO-UPEL, Venezuela.

Rodríguez, G.; Gil, J. y García, E. (1999). **Metodología de la Investigación Cualitativa**. Ediciones Aljibe: Málaga.

Schoenfeld, A. H. (1985) *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Orlando, FL.

Solow, D. (1990). *How to Read and Do Proofs: An Introduction to Mathematical Thought Processes (2nd ed.)*, Wiley, New York.

Tall, D. (1991). The nature of advanced mathematical thinking. In David Tall (Ed) *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 3-21). Dordrech, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, whit particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12 (3) 151-169.

Valdivé, C. (2008). *Estudio de los esquemas conceptuales asociados a la noción de infinitesimal y su evolución en estudiantes de Análisis Matemático.* Tesis de doctorado, UCLA-UNEXPO-UPEL, Barquisimeto, Venezuela.

Valdivé, C. y Garbin, S. (2008). Estudio de los Esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la definición de infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime,* 11(3), *413-450.*

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education* 20, 356-366.