UPE L
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
EXPERIMENTAL LIBERTADOR

INSTITUTO PEDAGOGICO
DE BARQUSIMETO
LUIS BELTRAN PRIETO FIGUEROA

REVISTA

educare

Órgano Divulgativo de la Subdirección de Investigación y Postgrado del Instituto Pedagógico de Barquisimeto "Luis Beltrán Prieto Figueroa"

BARQUISIMETO – EDO. LARA – VENEZUELA

NUEVA ETAPA
FORMATO ELECTRÒNICO
DEPOSITO LEGAL: PPI201002LA3674
ISSN: 2244-7296

VOLUMEN 19 Nº 2
MAYO – AGOSTO 2015

ESQUEMAS CONCEPTUALES ASOCIADOS A DEFINICIONES MATEMÁTICAS. CASO EL ESTUDIANTE UNO*

CONCEPT SCHEMA ASSOCIATED TO MATHEMATICAL DEFINITIONS. THE CASE OF STUDENT ONE

CARMEN VALDIVÉ*
RAISA VALDIVÉ
HÉCTOR GODOY

*UNIVERSIDAD CENTROCIDENTAL LISANDRO ALVARADO (UCLA)

* Trabajo parcial del proyecto registrado ante el CDCHT de la UCLA bajo el código 005-RAC-2013

ESQUEMAS CONCEPTUALES ASOCIADOS A DEFINICIONES MATEMÁTICAS. CASO EL ESTUDIANTE UNO

CONCEPT SCHEMA ASSOCIATED TO MATHEMATICAL DEFINITIONS. THE CASE OF STUDENT ONE

INVESTIGACIÒN

Carmen Valdivé[†]
Raisa Valdivé[**]
Héctor Godoy[***]
UCLA

Recibido:20/06/2015 Aceptado: 17/08/2015

RESUMEN

Lo que se presenta en este manuscrito forma parte de una investigación más amplia en Didácticas de las Matemáticas que consistió en analizar los esquemas conceptuales previos asociados a las definiciones del Cálculo Integral y su evolución en estudiantes de un decanato de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. Conceptualmente la investigación se enmarcó dentro de la teoría cognitiva Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) y metodológicamente en la perspectiva cualitativa bajo la modalidad de estudio de caso. Entre los hallazgos se mencionan: (a) Se pudo observar que la mayoría de los estudiantes reconocen las definiciones sin embargo presentan ideas asociadas a procesos algorítmicos; (b) Al finalizar el curso, estos esquemas evolucionaron a medida que el estudiante está en contacto con la teoría formal. Así un estudiante (caso uno) pudo iniciarse con ideas formales y terminar con un conocimiento formal, empleando rutas de aprendizaje formales, informales y mixtas para su construcción.

Descriptores: esquema conceptual, rutas de aprendizaje, Pensamiento Matemático Avanzado.

ABSTRACT

The present manuscript is part of a wider research in Didactics of Mathematics which consists of analyzing previous conceptual schemata associated to the definition of Integral calculation and their evolution in students from a deanery at the University Centroocidental Lisandro Alvarado. The research was conceptually framed under the cognitive theory of Advanced Mathematical Thinking (AMT) and methodologically framed under the qualitative approach in the modality of case study. Among the findings it is possible to mention: (a) most of the students recognize the definitions; however, they present ideas associated to algorithmic processes; (b) at the end of the course, those schemata evolved as the students were in touch with formal theory. Nevertheless, a student (case one) started with formal ideas and finished with a formal knowledge by using formal, informal and mixed learning routes for its construction.

Keywords: conceptual schema, learning routes, Advanced Mathematical Thinking.

[†] Doctora en Educación, profesora titular de matemática e investigadora Nivel III de la UCLA, carmenv@ucla.edu.ve
[**]Licenciadas en Ciencias Matemáticas, profesora de matemática e investigadora nivel I de la UCLA, raisa.valdive@ucla.edu.ve
[***]Licenciado en Ciencias Matemáticas, profesor de matemática e investigador nivel I de la UCLA, hector.godoy@ucla.edu.ve

INTRODUCCIÓN

Los estudiantes universitarios presentan serias dificultades en los cursos de matemática, ya que cuando comienzan en este subsistema educativo, tienen la idea de que estudiar matemática es un proceso mecánico, en el cual deben aplicar un conjunto de pasos para resolver determinados problemas. Sin embargo, al enfrentarse con asignaturas matemáticas, en las cuales deben razonar y analizar, no es tan fácil aplicar algoritmos, sobre todo al momento de resolver problemas aplicados que requieren el uso de definiciones (Hoyles yKüchemann, 2002; Durand yArsac, 2005, Epp, 2003, Azcárate, 2001; Colmenárez, 2008; De Villiers, 1993; Alastre, 2012; Rodríguez y Valdivé, 2010, Ramos, 2011).

Algunos autores indican que los estudiantes que cursan materias relacionadas con la matemática a nivel universitario presentan problemas no sólo en la comprensión de la teoría sino en el uso inadecuado de las expresiones lógicas, lo que dificulta el proceso de demostración y el uso de las definiciones matemáticas (Azcárate ob. cit; Colmenárez ob. cit, De Villiers, ob. cit).

Al respecto, Alastre (2012) analiza la idoneidad didáctica epistémica de un proceso de estudio que involucra la integral definida. La autora llega a la conclusión de que los estudiantes presentan conflictos de comprensión de los cuantificadores, sobre todo, en el uso de la llamada regla de dependencia (para todo X existe un Y tal que X e Y están relacionados, olvidando que Y depende de X) cuando aplican definiciones y teoremas relacionados con el objeto integral definida. En la investigación se muestra que en muchos casos el matemático activo como profesor, en su discurso a los estudiantes, da lugar a la ausencia de lógica y sólo se dedica a la aplicación de los métodos de resolución.

Según Pinto y Tall (1999), los matemáticos usan técnicas cognoscitivas diferentes para generar nuevos teoremas. Algunos trabajan con definiciones formales, extrayendo cuidadosamente de ellas significados, mediante deducción y ganándole a la intuición simbólica para que los teoremas puedan ser demostrados. Los estudiantes que aprenden matemáticas, tienen un problema diferente; ellos vienen de las matemáticas elementales profundamente inculcadas en el cómputo de la aritmética y en la manipulación simbólica del álgebra, que usa algoritmos estándares para solucionar ciertos tipos de problemas. Las formas de prueba a este nivel (a menudo llamada justificación) por lo general, implican al álgebra para dar una descripción simbólica de una declaración aritmética general o de algún tipo de experimento centrado en el uso de un caso típico o genérico.

Pinto (ob. cit) y Pinto &Tall (1999, 2001) encuentran que los estudiantes de un curso de análisis, siguen dos acercamientos llamados acercamiento natural y acercamiento formal para construir la estructura cognitiva asociada a las teorías formales y para el acercamiento a los esquemas conceptuales asociados a ésta.

El acercamiento natural permite construir una definición imaginaria desde un significado personal de la definición formal y el acercamiento formal permite construir teoremas desde la definición del concepto para lo cual los estudiantes usan rutas de aprendizaje formal y rutas de aprendizaje natural respectivamente (Pinto ob. cit; Pinto y Tall ob. cit; Tall ob. cit; Valdivé ob. cit; Ramos 2011)

La transición de la matemática elemental a la prueba formal es un enorme abismo para muchos estudiantes, cuyos esquemas conceptuales subyacentes son incapaces de sostener el formalismo. Muchos tienen las imágenes informales dominando su pensamiento. Unos permanecen firmemente enraizados en sus viejas imágenes y "en la tentativa de usar la definición sólo pueden ser capaces de enfrentarse con una parte de la estructura, dando una definición personal que no es operable formalmente" (Pinto y Tall ob. cit; p.48).

En virtud de los planteamientos anteriores, se muestra en este artículo el uso por parte de los estudiantes universitarios de los esquemas conceptuales asociados a las definiciones formales del Cálculo Integral, con lo cual se podría aportar nuevos constructos teóricos en relación a las rutas de aprendizaje y a los esquemas conceptuales, específicamente en cuanto a la interacción de los esquemas formales e informales asociados al objeto matemático que se investiga. En tal sentido, se pretende dar respuesta a las siguientes interrogantes, ¿Cuáles son los esquemas conceptuales previos asociados a las definiciones formales del Cálculo Integral y cómo evolucionan? ¿Cuáles rutas de aprendizaje utiliza el estudiante cuando construye los esquemas conceptuales asociados a esas definiciones a la hora de abordar un problema matemático aplicado?

Para responder esas cuestiones, debe recurrirse a las producciones escritas de los estudiantes y a entrevistas para conocer mejor sus pensamientos. Los esquemas conceptuales servirán para comprender el aprendizaje y los significados que otorgan los estudiantes a las definiciones. En este manuscrito presentaremos el caso de un estudiante de 7que respondieron una prueba escrita y que hemos categorizado como clave (respondió todas las 9 preguntas). Al estudiante clave se le hicieron dos entrevistas a fin de describir cómo evolucionan sus esquemas conceptuales.

La investigación se fundamenta en la aproximación teórica cognitiva Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) desarrollada por Tall (ob. cit) y colaboradores.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Desde la Didáctica de las Matemáticas aproximarnos a contestar las preguntas que formulamos lleva a trabajar con constructos conceptuales que nos permitan tener una imagen, como una fotografía, de lo que evoca un estudiante ante ciertas preguntas asociadas a la noción matemática que interesa. A lo largo del desarrollo de esta disciplina, se habla de ideas, concepciones, imágenes, modelos mentales y esquemas conceptuales. En este estudio nos interesan constructos teóricos que se ubican en lo que se conoce como Pensamiento Matemático Avanzado tales como esquema conceptual, esquema conceptual formal e informal entre otros. Estas nociones se han ido matizando a lo largo de tiempo a través de investigaciones empíricas (Tall 1991, 2001, 2005; Garbin 2005; Valdivé 2008 y Valdivé &Garbin, 2008, 2013).

En tal sentido Valdivé y Garbin (ob. cit) indican lo siguiente: “contestar las interrogantes desde lo cognitivo y que han direccionado nuestras investigaciones, desafía la forma de abordar el análisis que se pueda hacer de las respuestas de los alumnos” (p. 118).

Por su parte Tall (ob. cit) afirma que el PMA busca “describir la naturaleza del conocimiento matemático, así como también, los procesos cognitivos que emplea el estudiante para el aprendizaje de algún conocimiento matemático” (p. 5). Por su parte, Valdivé (ob. cit), sostiene que el objetivo principal de esta teoría está enfocado en lo siguiente:

> hacia la descripción de la naturaleza del conocimiento matemático de los estudiantes a la hora de estudiar un concepto matemático y de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de estos conceptos, intentando aclarar lo que ocurre en la mente de un individuo (p. 158).

De los muchos marcos teóricos disponibles para proporcionar una visión general del desarrollo humano en general y de las matemáticas en particular, el PMA toma como fundamentos teóricos principalmente los trabajos de Piaget, Bruner y Fischbein (citados por Tall, ob. cit), los cuales presentan un amplio desarrollo de la percepción física y la acción, a través del desarrollo del simbolismo y el lenguaje y sobre el razonamiento deductivo (Tall, ob. cit). Tall construyó su teoría con los trabajos de los autores citados anteriormente y con aportes de otros investigadores. Para las metas trazadas en esta investigación interesan los siguientes constructos: esquema conceptual formal e informal y definición de un concepto.

Según Valdivé (ob. cit) la definición de un concepto queda como el conjunto de palabras que suele especificar aquel concepto. Puede ser aprendido por un individuo en una manera, de memoria o más significativamente aprendido y relacionado en menor o mayor grado al concepto total. Por otra parte, el esquema conceptual según Valdivé y Garbin (ob. cit) se refiere a lo siguiente:

> a la estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto matemático y que incluye todas las imágenes mentales (imágenes asociadas al concepto en su mente, incluyendo cualquier representación del concepto: gráfica, numérica, simbólica,…), las propiedades y los procesos asociados al concepto (p. 417).

Para aproximarse a los esquemas conceptuales de los sujetos se consideran dos partes de éste, denominadas esquema conceptual formal y esquema conceptual informal, ambos asociados al concepto. Para Tall, según Valdivé (ob. cit) dada una lista de axiomas o un concepto formal específico, el esquema conceptual formal es aquella parte del esquema conceptual que está formalmente deducida de los axiomas. Análogamente, "la porción del esquema conceptual que es construido de la experiencia natural del día a día, con ejemplos, imágenes, procedimientos y procesos para darle significado a la definición formal, es llamado esquema conceptual informal" (Valdivé, ob. cit, p. 37). De lo anterior se entiende que el esquema conceptual informal es aquel evocado por el alumno, cuando en su pensamiento prevalecen ideas informales y conceptos asociados formales no definidos formalmente, y el esquema conceptual formal cuando prevalecen ideas formales y conceptos asociados formales definidos y aceptados por la comunidad matemática.

El estudio realizado por Valdivé (ob. cit), permite visualizar diferentes rutas de aprendizaje que tienen los estudiantes, como los son (a) Ruta Informal: Esta ruta la presentan los estudiantes cuando basan los argumentos de la situación matemática planteada empleando un caso particular (un ejemplo particular); (b) Ruta Formal: Se da cuando el estudiante basa sus argumentos en las definiciones y (c) Ruta Mixta: Esta ruta la exhiben los estudiantes cuando al basar sus argumentos en definiciones y teoremas apelan a menudo a ejemplos particulares o representaciones gráficas a medida que desarrollan las definiciones o teoremas.

Acota la autora que algunos estudiantes enriquecen sus esquemas conceptuales estando en contacto con sus experiencias basándolas en la teoría formal, permitiendo que el esquema evolucione a través de una ruta mixta. Infiere Valdivé (ob. cit) que el alumno vía rutas mixta y formal puede llegar a demostrar teoremas.

Para finalizar y darle fundamento teórico a lo mencionado, Valdivé (ob. cit) plantea que cuando el estudiante apela a ideas formales, en la mayoría de las demostraciones, utiliza una ruta formal de aprendizaje, mientras que cuando emplea ideas informales la ruta aprendizaje es Informal. Se infiere de lo expuesto por la autora que cuando el estudiante emplea ambas ideas (formales e informales) se considerará como un estudiante que utiliza una ruta mixta de aprendizaje.

Como resultados de sus investigaciones, Valdivé (ob. cit) y Valdivé & Garbín (ob. cit) haciendo uso de estas herramientas, establecieron dos acepciones a los esquemas conceptuales, una cognitiva y otra epistemológica.

En Valdivé y Garbin (ob. cit) se explicita una parte de la evolución que ha tenido este constructo y la caracterización de la acepción cognitiva del esquema conceptual que hemos asumido en nuestras investigaciones y en este artículo. Cuando hablamos de esquema conceptual nos referimos a: (1) Las ideas que asocia el sujeto al concepto; (2) Las representaciones asociadas que hacen emerger la noción y representaciones propias de esta. Ambas son imágenes (dibujos, gráficas, palabras, símbolos) que el sujeto percibe del objeto o concepto y que evoca ante una situación problema o tarea; (3) Los procedimientos (algorítmicos, aritméticos, algebraicos, geométricos, manipulaciones simbólicas) que el sujeto activa ante la tarea cognitiva; (4) Las ideas más representativas asociadas al objeto matemático; (5) El contexto (geométrico, analítico, algebraico, aritmético o físico, no técnico) que el sujeto asocia ante la situación y (6) Los ejemplos y contraejemplos que el sujeto implementa para explicitar sus ideas. En este artículo asumimos la caracterización de los esquemas conceptuales de Valdivé y Garbin (ob. cit), así como las rutas de aprendizaje y la tipología de los estudiantes.

METODOLOGÍA

Responder al objetivo de mostrar una aproximación de los esquemas conceptuales asociados a las definiciones del Cálculo Integral en estudiantes de Matemático II de un decanato de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado (UCLA) nos ha llevado a un estudio de tipo cualitativo e interpretativo, de carácter exploratorio, descriptivo e inductivo. Asumimos la postura de Rodríguez, Gil y García (1999), quienes expresan lo siguiente:

> La naturaleza de las cuestiones de investigación guía y orienta el proceso de indagación, y por tanto, la elección de unos métodos u otros. Luego los métodos surgen bajo las concepciones y necesidades de los investigadores que trabajan desde una disciplina del saber, la cual determina en cierta medida, a su vez, la utilización de los métodos concretos y las posibles cuestiones a tratar (p. 40).

Para este tipo de estudio, como los que hemos ido realizando en nuestro recorrido investigativo, se requiere de metodologías específicas que permiten, organizar, representar, clasificar e interpretar las respuestas que los estudiantes dan a las cuestiones que se les plantean en la investigación. Por ello optamos por usar como sistema de representación de las respuestas, el sistema de categorización (Rodríguez, Gil y García, ob. cit), que permiten mirar todas las respuestas efectivas de los alumnos encuestados. En lo sucesivo el símbolo E_n hace referencia al estudiante y la letra I alude al investigador.

Para recoger la información se utilizó una prueba escrita contentiva de 9 preguntas aplicado antes de comenzar el curso de Cálculo Integral (Matemática II). Estas preguntas fueron utilizadas en la investigación de Ramos (2011). Luego de aplicada la prueba escrita, se seleccionaron dos informantes clave para estudiar cómo evolucionaron los esquemas conceptuales previos y qué tipo de ruta implementan para construir el esquema, aplicando dos entrevistas semiestructuradas. En este manuscrito sólo mostramos el caso del estudiante uno. El estudiante uno fue inicialmente caracterizado como un Estudiante Formal, ya que sólo en una respuesta mezcla ideas formales con ideas informales tal como lo categoriza Valdivé (ob. cit). En seis respuestas utiliza ideas formales.

Como se dijo anteriormente, para responder la primera pregunta de investigación, se consideraran las 9 preguntas de la prueba escrita, por lo que se realizara la siguiente clasificación en atención a lo expresado en párrafos anteriores.

1. El estudiante formal, es aquel que apela a definiciones y teoremas matemáticos correctamente sin usar representaciones, lenguaje natural o intuiciones en por lo menos 4 de sus respuestas.
2. El estudiante informal, es el que utiliza lenguaje natural, representaciones e ideas intuitivas para justificar al menos 3 de sus repuestas.
3. El estudiante mixto puro, es el que utiliza ideas formales en una respuesta y utiliza ideas informales en otra.
4. El estudiante mixto, es el que mezcla ideas formales con informales en una misma respuesta por lo menos 4 veces.

A continuación se describen los hallazgos encontrados en laprueba escrita y en el estudio de caso.

ANÁLISIS Y HALLAZGOS

La descripción y hallazgos de los esquemas conceptuales previos encontrados en los 7 estudiantes en la prueba escrita, se presentan a continuación.

En la pregunta número 1 de la prueba escrita, defina número real, cuatro estudiantes (1, 2, 4, 7) responden empleando Ideas Informales expresando en algunos casos que los números reales se definen como la unión de otros conjuntos, así como también expresando que un número real es un símbolo. Solo un estudiante (5) emplea ideas formales e ideas informales en esta respuesta al manifestar que un número real es un elemento de un cuerpo ordenado y completo y que también se puede expresar como la unión de otros conjuntos. Dos estudiantes (3 y 6) no responden a esta pregunta.

En la pregunta número dos de la prueba escrita, enuncie y demuestre el Teorema del Valor Medio para derivadas, tres estudiantes (3, 5, 7) emplean ideas formales en esta respuesta al enunciar correctamente el teorema. Sólo un estudiante (4) emplea Ideas Formales e Ideas Informales en esta respuesta, al enunciar correctamente el teorema y realizar una representación gráfica del mismo. Tres estudiantes (1, 2, 6) no responden a esta pregunta.

En la pregunta número tres, escriba la definición formal del Límite de una función, cinco estudiantes (1, 2, 3, 4, 5) respondieron empleando ideas formales, al definir correctamente límite de un función. Sólo un estudiante (7) empleo Ideas Formales e Ideas Informales en esta respuesta, al definir correctamente límite de un función y realizar una representación gráfica. Un estudiante (6) no responde a esta pregunta.

En la pregunta número 4 de la prueba escrita, escriba la definición de continuidad en un punto y dé un ejemplo, cuatro estudiantes (1, 2, 3, 4) emplean ideas formales en esta respuesta al definir correctamente continuidad y presentar un ejemplo. Sólo un estudiante (7) emplea ideas formales e ideas informales al definir correctamente continuidad, dar un ejemplo y realizar una representación gráfica. Un estudiante (6) no responde a esta pregunta.

En la pregunta número 5 de la prueba escrita, cuatro estudiantes (1, 3, 4, 6) respondieron de manera formal al utilizar un teorema para explicitar la relación entre continuidad y diferenciabilidad. Dos estudiantes (2, 5) emplearon ideas informales bien sea en la conclusión incorrecta o en el uso del lenguaje natural. Sólo un estudiante (7) empleo Ideas Formales e Ideas Informales en su respuesta al mencionar un teorema para explicar la relación entre las definiciones dadas y realizar una representación gráfica de un ejemplo expuesto y dar un contraejemplo del reciproco del teorema.

En la pregunta número 6 de la prueba escrita, considere la función $f(x)=\begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x=0 \end{cases}$ ¿Es $f'(x)$ continua en x=0?

Un estudiante (3) emplea ideas formales al responder la pregunta justificándola con el uso de teoremas. Un estudiante (5) emplea Ideas Informales al no sustentar su respuesta. Dos estudiantes (4, 7) utilizan ideas formales e ideas informales bien sea utilizando funciones distintas o realizando cálculos extra y representaciones gráficas. Tres estudiantes (1, 2, 6) no responden a esta pregunta.

En la pregunta número 7 de la prueba escrita, probar que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-1\right)^{n}2$ diverge, cuatro estudiantes (1, 2, 4, 5) emplean ideas formales al demostrar el enunciado empleando teoremas. Dos estudiantes (3, 7) emplean ideas formales e ideas informales en sus respuestas, demostrando el enunciado utilizando teoremas y ejercicios previos o al realizar cálculos extra en la demostración. Un estudiante (6) no responde a esta pregunta.

En la pregunta número 8 de la prueba escrita inicial, probar la siguiente afirmación: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n$ =0 cinco estudiantes (1, 3, 4, 5, 6) emplean ideas formales en esta respuesta al demostrar el enunciado utilizando teoremas. Un estudiante (2) emplea ideas informales al omitir detalles importantes en la demostración. Un estudiante (7) no responde a esta pregunta.

En la pregunta número 9 de la prueba escrita inicial, ¿La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ es convergente? justifique. Tres estudiantes (1, 3, 5) emplean ideas formales en sus respuestas, al demostrar el enunciado apoyándose en teoremas. Dos estudiantes (2,6) emplean Ideas Informales al omitir detalles importantes de la demostración. Dos estudiantes (4, 7) emplean ideas formales e ideas informales en su respuesta al demostrar el enunciado empleando teoremas y realizar cálculos para justificar su respuesta.

Seguidamente se analizan las respuestas de la prueba escrita por cada estudiante para lograr una clasificación precisa de acuerdo a las ideas empleadas en cada respuesta.

Los estudiantes tienen distintas ideas de lo que significa Número Real. Un estudiante (E1) piensa que es un número complejo con parte imaginaria cero. Otro estudiante (E2) piensa que es un símbolo. Otro estudiante (E4) piensa que es un punto de la recta real. Otros estudiantes (E5 y E7) piensan que es un elemento racional o irracional. Otros no responden (E3 y E6) Se detecta que la mayoría de los estudiantes utilizan definiciones empleadas en el álgebra para definir número real.

En cuanto al Límite de una función, algunos estudiantes (E1, E3, E4 y E5) conocen la definición formal de límite. Otro estudiante (E7) conoce la definición de límite y realiza representaciones gráficas. Otros (E2 y E6), no responden. Se piensa que la mayoría de los estudiantes conocen la definición formal del límite.

En cuanto a la definición de continuidad de una función, un estudiante escribe la definición de continuidad, enuncia y demuestra un ejemplo (E3), otros (E1, E2 y E4) escriben la definición formal de continuidad, pero sólo uno formula un ejemplo sin demostrarlo (E1) y otro estudiante (E3) desarrolla un ejemplo y utiliza una representación gráfica.

En cuanto a la definición de sucesiones, algunos estudiantes (E1 y E3) demuestran que una sucesión dada converge empleando ideas formales de la definición de sucesión, Otro estudiante (E2) no hace demostraciones, sólo afirma que la sucesión converge. Otro estudiante (E4) aplica la definición formal de sucesión, realiza representaciones y utiliza lenguaje natural. Otro estudiante (E5), busca el límite del término general de la sucesión. Otro estudiante (E6), acota el término general de la sucesión. Otro estudiante (E7) demuestra formalmente que la sucesión dada converge y utiliza ideas informales. Se piensa que la mayoría de los estudiantes utiliza la definición formal de sucesión y de límite para demostrar el enunciado.

En cuanto a la definición de serie, algunos estudiantes (E1, E3, E4, E5, E6 y E7) emplean definiciones formales para demostrar que una serie diverge. Otro estudiante (E2) sólo afirma que la serie diverge sin utilizar definiciones formales. Se piensa que la mayoría de los estudiantes conocen las definiciones formales asociadas al concepto de serie.

En síntesis se puede decir que el estudiante uno, se caracteriza como un estudiante que tiene esquemas conceptuales formales el cual construye a través de rutas de aprendizaje formal en las definiciones de continuidad y sucesiones. En las definiciones de número real y límite de una función, tiene esquemas conceptuales informales, los cuales construye a través de rutas de aprendizaje informal, mientras que para la definición de serie, tiene un esquema conceptual formal el cual construye a través de una ruta mixta de aprendizaje.

El estudiante número uno, respondió 7 de las 9 preguntas de la prueba escrita inicial. 6 de las respuestas son formales y en 1 respuesta mezcla ideas formales con ideas informales.

El estudiante dos, respondió 7 de las 9 preguntas de la prueba escrita inicial. 3 de las respuestas son formales, 3 son informales y en 1 respuesta mezcla ideas formales con ideas informales. El estudiante número tres, respondió 8 de las 9 preguntas de la prueba escrita inicial.7 de las respuestas son formales y en 1 respuesta mezcla ideas formales con ideas informales. El estudiante cuatro, respondió las 9 preguntas de la prueba escrita inicial. 5 de las respuestas son formales, 1 es informal y en 3 respuestas mezcla ideas formales con ideas informales.

El estudiante número cinco, respondió 8 de las 9 preguntas de la prueba escrita inicial. Sin embargo en la pregunta 2 no demostró el teorema lo cual no permite determinar la formalidad o informalidad de esa respuesta. 4 de las respuestas son formales, 2 son informales y en 1 respuesta mezcla ideas formales con ideas informales. El estudiante seis, respondió 3 de las 9 preguntas de la prueba escrita inicial. 2 de las respuestas son formales, 1 es informal.

Finalmente el estudiante siete, respondió 8 de las 9 preguntas de la prueba escrita inicial. Sin embargo en la pregunta 2 no demostró el teorema lo cual no permite determinar la formalidad o informalidad de esa respuesta. 1 de las respuestas es formal, 1 es informal y en 5 de respuestas mezcla ideas formales con ideas informales.

Una vez expuestos los hallazgos por pregunta como por estudiantes se procede a la clasificación de los estudiantes en cuanto a los esquemas conceptuales previos encontrados en la prueba escrita.

Tabla 1. Categorización de los estudiantes según los esquemas conceptuales previos.

Estudiante	Caracterización
Estudiante 1	**Formal:** ya que en 6 respuestas utiliza ideas formales y en 1 respuesta mezcla ideas formales con ideas informales.
Estudiante 2	**Mixto Puro**: ya que en 3 respuestas utiliza ideas formales y en 3 respuestas utiliza ideas informales y en 1 respuesta mezcla ideas formales con ideas informales.
Estudiante 3	**Formal:** ya que en 7 respuestas utiliza ideas formales y sólo en 1 respuesta mezcla ideas formales con ideas informales.
Estudiante 4	**Mixto Puro**: ya que en 5 respuestas utiliza ideas formales y en 3 respuestas utiliza ideas informales y en 3 respuestas mezcla ideas formales con ideas informales.
Estudiante 5	**Formal:** ya que en 4 respuestas utiliza ideas formales, solo en 2

Estudiante	Caracterización
	respuestas utiliza ideas informales, y en 1 respuesta mezcla ideas formales con ideas informales.
Estudiante 6	**Mixto Puro**: ya que en 2 de sus respuestas utiliza ideas formales y en 1 utiliza ideas informales.
Estudiante 7	**Mixto:** ya que en 5 de sus respuestas mezcla ideas formales con ideas informales.

Fuente: Elaboración propia

Caso: Estudiante Uno

En la prueba escrita el estudiante clave uno define Número Real como un número complejo cuya parte imaginaria es cero. A continuación se presenta un fragmento de la prueba escrita:

> **E1:** Un número real es un número complejo cuya parte imaginaria es cero.

En la entrevista uno al estudiante se le pide definir Número Real. Al respecto responde que los Números Reales son un cuerpo ordenado y completo, lo cual se evidencia en el siguiente fragmento de la entrevista:

> **I**: ¿En las definiciones vistas o estudiadas en la unidad I, ¿podrías indicar cuál o cuáles de esas definiciones estaba involucrada en alguna pregunta de la prueba escrita inicial?
>
> **E1**: En la primera pregunta donde piden la definición de número real porque nosotros vimos números reales R como un cuerpo ordenado y completo.

Con relación a la Definición de Límite de una Función

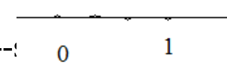
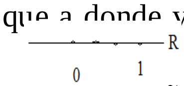
En la prueba escrita, el estudiante define límite de una función, utilizando la definición formal ε, δ. A continuación, el fragmento de la prueba escrita inicial:

> **E1:** $\lim_{x\to a} f(x) = b \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0\ t.q\ |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$

En la entrevista, el estudiante utiliza la definición de límite para estudiar la convergencia de sucesiones e interpreta que si *el límite de* $\frac{1}{n}$ *es cero entonces* $\frac{1}{n}$ *'se va a cero' o 'va cayendo a cero '* es decir utiliza lenguaje natural, lo cual se evidencia en el siguiente fragmento de la entrevista:

> **E1**: bueno la pregunta 9 es, si la sucesión $\frac{1}{n}$ converge.

El alumno piensa un rato.

> **E1:** Viéndolo así lo que dice así como el dibujo es lo siguiente si se tiene la recta---s 
>
> tiene R entonces te dicen que a donde va $\frac{1}{n}$ si 
>
> converge o no, pero tú sabes que $n \geq 1$ que este sea -señalando , -que si tú le buscas el límite a esto va a cero, $\frac{1}{n}$ y como $n \geq 1$ los puntos de la sucesión van cayendo en cero.

Con relación a la Definición de Continuidad

En la prueba escrita el estudiante define continuidad de una función en un punto empleando tres características. A continuación, el fragmento de la prueba escrita:

> **E1:** Sea a$\in R$ y f una función real, se dice que f es continua si se cumple que:
>
> (i)$f(a)$ Existe
>
> (ii)$\lim_{x\to a} f(x)$ Existe
>
> (iii)$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Al finalizar el curso de Cálculo, pensamos que ha evolucionado en su pensamiento, en esa definición, ya que expresa que en los cursos de Cálculo la idea de continuidad de una función en un punto *es que ese punto pertenezca al dominio de ésta y que se cumplieran tres condiciones básicas*. Sin embargo, finalizado el curso indica que además de esas condiciones *ese punto debe ser un punto de acumulación del conjunto de dominio*, lo cual se evidencia en el siguiente fragmento de la entrevista:

> **I:** ¿A lo largo de la materia, hay un ejemplo o algún ejercicio que te haya hecho cambiar de opinión en cuanto algún concepto, algo que haya

> cambiado la percepción de alguna definición que conocieras anteriormente?
>
> **E1:** Por ejemplo cuando hice el curso de cálculo 1 la noción que tenia de continuidad de un punto, teníamos la función real de variable real y ahora vamos a ver si esta tiene un punto que pertenezca al intervalo en el conjunto de partida, la cosa era que la función evaluada en el punto existiese es decir si el punto es ´a´ que $f(a)$ exista, la otra condición era el límite de cuando x tiende a ´a´ de $f(x)$ exista, la tercera era que ese límite fuese igual a la función evaluada en el punto esa era la noción que tenía y ahora en cuando vi continuidad primero vimos la noción de punto de acumulación, entonces vi que iba a usar eso que dije anteriormente cuando sepa que a es un punto de acumulación del conjunto.

Con relación a la Definición de Sucesión

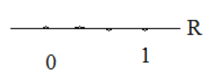
En la prueba escrita, el estudiante prueba que una sucesión dada es convergente, empleando criterios de convergencia. Se le pregunta: ¿La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ es convergente? justifique. A continuación el fragmento de laprueba escrita inicial:

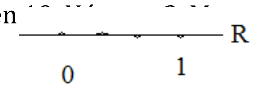
> **E1:** Se tiene que la sucesión (1/n) es acotada pues
>
> $-1 < 0 < \frac{1}{n} < 1 \qquad \forall n \in IN$
>
> Y además, (1/n) es una, sucesión decreciente, pues
>
> $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \in IN$
>
> Como (1/n) es monótona y acotada se tiene que (1/n) es una sucesión convergente.

En la entrevista, el estudiante hace mención a la convergencia de sucesiones afirmando que *una sucesión converge a un número* ***a*** *si el límite del término general de dicha sucesión es* ***a***. Igualmente utiliza los términos de sucesión acotada y sucesión monótona afirmando que *toda sucesión limitada y monótona es convergente.* Esto se evidencia en el siguiente fragmento de la entrevista:

> **E1**: el ejercicio dice: Si el $\lim x_{2n} = a$ y el $\lim x_{2n-1} = a$ Pruebe que el $\lim x_n = a$
>
> Así leyendo el ejercicio por afuera lo que te está diciendo es que, bueno más o menos lo que entiendo es que si el límite de la..., que si los términos pares de la secuencia convergen y convergen a ‘a’ o sea esa secuencia de los pares y de los impares converge a ‘a’ entonces la secuencia completa de pares e impares converge a ‘a’ es lo que más o menos dice.
>
> Para demostrarlo hay q desarrollar la definición de secuencia convergente q es lo que tienes como hipótesis. Bueno desarrollas para x_{2n} la convergencia de ella y lo mismo haces para los términos impares, desarrollas y desarrollas, o sea es como: vas a evaluar los casos para la secuencia y bueno después que tengas los dos casos. O sea ya evaluaste los dos posibles casos para la secuencia porque la secuencia parte de los naturales o sea son pares o son impares y si tienes las dos casos las, bueno no sé cómo decirlo formalmente.

A continuación, el fragmento de la entrevista, donde el estudiante utiliza los términos de sucesión acotada y monótona:

> **I**: ¿Podrías revisar y de ser necesario mejorar la respuesta que diste a la pregunta 9 de la prueba escrita?
>
> **E1**: bueno la pregunta 9 es si la sucesión $\frac{1}{n}$ converge
>
> Pensó un rato. Viéndolo así lo que dice así como el dibujo es lo siguiente si se tiene la recta (ver anexo 1), si se tiene R entonces te dicen que a donde va $\frac{1}{n}$ si converge o no, 
>
>
> pero tú sabes que $n \geq 1$ que este sea- señalando , que si tú le buscas el límite a esto va a cero, $\frac{1}{n}$ y como $n \geq 1$ los puntos de la sucesión van cayendo en cero. Y esta sucesión está entre cero y el mayor que puede



agarrar es 1 o sea la sucesión es limitada acotada y además es monótona decreciente y como es limitada y monótona decreciente entonces por teorema la sucesión converge. Y en el dibujo es esto, señalando o sea va cayendo.

En la entrevista, el estudiante define sucesión convergente utilizando la definición formal. Esto se evidencia en el siguiente fragmento de la entrevista:

I: Recuerdas que en la entrevista anterior (entrevista dos) utilizaste en algunos ejercicios el concepto de sucesión convergente, ¿podrías definir sucesión convergente?

E1: La definición de sucesión convergente…, estamos hablando de…, sabes que X_n es una sucesión de números reales , se dice que X_n converge al número real `a`, es una función que va de los naturales a los reales y se denota por X_n y una flechita ‘a‘, si para todo ε mayor que cero existe un natural que pertenece a N tal que para todo n mayor o igual que ese natural implica que el valor absoluto X_n menos el número real ´a´ es menor que ε eso es una sucesión convergente al número ‘a‘ y escribe lo siguiente:

Sea (Xn) una sucesión de números reales; Se dice que (Xn) converge al número real a y se denota de por $Xn \to a$ así se cumple que: $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in N; n \geq N \to |Xn - a| < \varepsilon$

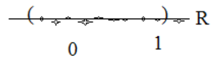
A continuación otro fragmento de la entrevista, donde el estudiante demuestra que una sucesión converge:

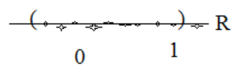
I: ¿Podrías revisar y de ser necesario mejorar la respuesta que diste a la pregunta 9 de la prueba escrita?

E1: bueno la pregunta 9 es si la sucesión $\frac{1}{n}$ converge

El estudiante piensa un rato.

E1. Viéndolo así lo que dice así como el dibujo es lo siguiente, si se tiene la recta

tiene R entonces te dicen que a dónde va $\frac{1}{n}$ si converge o no, pero tú sabes que $n \geq$ 

si tú le buscas el límite a esto va a cero, $\frac{1}{n}$ y como $n \geq 1$ los puntos de la sucesión van cayendo en cero. Y esta sucesión está entre cero y el mayor que puede agarrar es 1 o sea la sucesión es limitada acotada y además es monótona decreciente y como es limitada y monótona decreciente entonces por teorema la sucesión converge. Y en el dibujo es esto: osea va cayendo, cuando es cer 

Con relación a la Definición de Serie

En la prueba escrita, el estudiante resuelve dos ejercicios relacionados con la convergencia y divergencia de series utilizando criterios de convergencia. Se le pregunta al estudiante si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\, 2$ diverge. A continuación el fragmento de la prueba escrita con la respuesta:

> **E1:** Se tiene las reducidas de orden par dan cero, mientras las reducidas de orden impar dan -2, esto es (Sn) posee dos subsucesiones convergiendo a limites diferente.
>
> Así, (Sn) posee dos subsucesiones divergente por lo tanto, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ 2 diverge.

Luego se le pide al estudiante probar la siguiente afirmación: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge $\Rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} a_n$ =0 A continuación el fragmento de la prueba escrita con la respuesta:

> **E1:** Se tiene que $\sum_{n=1}^{+\infty} an$ converge. Así se tiene que (Sn) es convergente,
>
> Donde $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
>
> Luego
>
> $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S_n} = \mathrm{S}y\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S}$
>
> Luego

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

Por lo tanto

$\lim_{n\to\infty} an = \mathbf{0}$

En la entrevista, el estudiante utiliza la definición de convergencia de una serie, afirmando que una *serie converge si y sólo si la sucesión de sumas parciales converge.* A continuación el fragmento de la entrevista:

E1: bueno el problema dice lo siguiente:

Probar la siguiente afirmación:

Si la serie de a_n converge entonces el límite de a_n es cero

Eso es lo que pide, es un condicional. Las definiciones que usé, definición de serie convergente.

I: ¿Puedes escribir la definición?

E1: te voy a dar solo un esbozo, la serie de a_n converge si y solo si la sucesión S_n llamando S_n la sucesión de sumas parciales o sea S_n es $a_1 + + + + + a_n$ si esta sucesión converge

Esa definición la use dos veces para hacer la demostración, también me base en el hecho de que si yo tengo la sucesión S_n convergente entonces si yo a esa sucesión le restrinjo términos finitos bueno un numero finito de términos entonces sigue convergiendo al mismo límite.

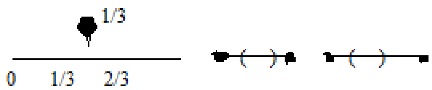
Además en la entrevista, el estudiante apeló al uso de ideas informales al hacer la representación gráfica del conjunto de Cantor. Utilizó la definición de serie, al sumar de forma infinita ciertas longitudes. Evocó en ese momento una serie geométrica y utilizó un criterio de convergencia. Finalmente mencionó la convergencia de esta serie geométrica, esto se evidencia en el siguiente fragmento de la entrevista:

E1: Sea (Xn) una sucesión de números reales;

Se dice que (Xn) converge al número real a y se denota de por $Xn \to a$ así se cumple que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in; n \geq N \to |Xn - a| < \varepsilon$$

Dem



1er paso:

Se tendría 1 intervalo de longitud $1/3 = 2^0/3$

2do paso:

Se tendría 3 intervalos de longitud $1/3^2$ así que la longitud total seria $2^1/3^2$

3er paso:

Se tendría 4 intervalos de longitud $1/3^3$

La longitud total seria $4/3^3 = 2^2/3^3$

En el n-ésimo paso se tienen intervalo de longitud $1/3^n$ y se tendrían 2^{n-1}intervalos así la longitud toral seria:

$$\frac{2^{n-1}}{3^n}$$

Como es un proceso infinito, se detendría en la suma de las longitudes de los intervalos omitidos vendría dada por:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2^{n-1}}{3^n}\right)$$

Esta serie es una serie geométrica, con razón $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$; así que esta sería convergente y converge a:

$$\frac{a}{1-r} = \frac{1/3}{1 - 2/3} = \frac{1/3}{1/3} = 1$$

Así

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$$

$\therefore$ La suma de las longitudes de los intervalos omitidos para formar el conjunto de Cantor es 1

Hallazgos sobre la evolución de los esquemas conceptuales del estudiante clave uno y rutas de aprendizaje que implementa para su construcción.

En la prueba escrita, el estudiante define número real como un número complejo cuyo parte imaginaria es cero. Al finalizar el curso, percibe el conjunto de los números reales como un cuerpo, sin embargo, no define número real sino al conjunto de los números reales, lo que representa una idea informal. El estudiante utiliza un esquema conceptual informal en la definición de número real, el cual construye a través de una ruta de aprendizaje informal.

En cuanto a la definición de límite, aunque en la prueba escrita inicial el estudiante alude a la definición formal, se podría inferir que al momento de emplear esta definición, la comprende e interpreta pero en un lenguaje natural, por cuanto en la demostración relacionada con límite de una función no emplea ideas formales sólo maneja lenguaje natural en expresiones como: si se tiene R entonces te dicen que a donde va $\frac{1}{n}$, si tú le buscas el límite a esto va a cero, los puntos de la sucesión van cayendo en cero. Este hecho es muestra del uso de ideas informales por parte del estudiante, para realizar demostraciones matemáticas. Utiliza un esquema conceptual informal en la definición de límite de una función, el cual construye a través de una ruta informal de aprendizaje.

En relación a la definición de continuidad, en la prueba escrita expresa que una función es continua, si cumple con tres condiciones como lo son: $f(a)\, existe,$ $lim_{x\to a} f(x)\ existe, lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ luego al finalizar el curso expresa que además de las tres condiciones de continuidad que conocía existe la condición de que el punto a debe ser un punto de acumulación. Esto nos hace pensar en el uso de ideas formales por parte del estudiante en la realización de demostraciones matemáticas. El estudiante utiliza un esquema conceptual formal en la definición de continuidad el cual construye a través de una ruta formal de aprendizaje.

Se puede observar, que el estudiante evoluciona su pensamiento en cuanto a la definición de sucesión, por cuanto cambia la definición de convergencia de sucesión, ya que al principio lo relacionaba sólo con el límite del término general. En la entrevista, asocia la convergencia de la sucesión con una definición formal empleando ε, δ. Además el estudiante apela a definiciones relacionadas con sucesiones, como lo son definiciones de sucesión acotada y monótona, esto nos hace pensar que el estudiante evolucionó su pensamiento en cuanto a la definición de sucesiones, pensando finalmente de una manera formal. El estudiante utiliza un esquema conceptual formal en la definición de sucesión, el cual construye a través de una ruta formal de aprendizaje.

En cuanto a la definición de serie, el estudiante mantiene sus ideas previas de convergencia de serie, por cuanto la respuesta en la entrevista uno es igual a la respuesta de la prueba escrita inicial, asociada a ideas formales. Además es capaz de involucrar el concepto de serie en otro tipo de ejercicios (al encontrarse con sumas infinitas) lo que nos hace pensar que el estudiante maneja formalmente la definición de serie. Apela además, a ideas informales al representar gráficamente el conjunto de Cantor. El estudiante utiliza un esquema conceptual formal en la definición de serie, el cual construye a través de una ruta mixta de aprendizaje.

Por lo tanto, se puede indicar que el estudiante uno utiliza ideas formales en la mayoría de las demostraciones matemáticas, apelando en algunos casos a representaciones gráficas y a lenguaje natural lo que nos permite caracterizarlo como un estudiante que tiene esquemas conceptuales formales el cual construye a través de rutas de aprendizaje formal en las definiciones de continuidad y sucesiones. En las definiciones de número real y límite de una función, el estudiante tiene un esquema conceptual informal el cual construye a través de una ruta de aprendizaje informal, mientras que para la definición de serie, el estudiante tiene un esquema conceptual formal el cual construye a través de una ruta mixta de aprendizaje.

A continuación se caracterizan los esquemas conceptuales asociados a las definiciones de Numero Real, Límite de una Función, Continuidad, Sucesión y Serie del informante clave uno.

Esquema Conceptual Asociado a la Definición de Número Real

a. Representaciones que hacen emerger la idea: la recta real R, C.

b. Representaciones asociadas: R

c. Definiciones asociados: cuerpo ordenado y completo.

d. Contexto: algebraico

e. Procedimiento algebraico: Restringir un número complejo a un número real.

Esquema Conceptual Asociado a la Definición de Límite

a. Ideas Informales asociadas: uso de lenguaje natural en las expresiones: $\frac{1}{n}$ ‘se va a cero´ o ‘va cayendo a cero ´

b. Representaciones que hacen emerger el concepto: en el intervalo $(0,1)$ se representó la expresión $\frac{1}{n}$

c. Representaciones asociadas: $\lim_{n\to\infty} f(x)$,$\frac{1}{n}$, $(0,1)$

d. Definiciones asociados: límite en el infinito.

e. Contexto: geométrico

f. Procedimiento geométrico: estudiar a donde se aproxima la expresión $\frac{1}{n}$ cuando n crece indefinidamente.

Esquema Conceptual Asociado a la Definición de Continuidad

a. Representaciones asociadas: $\lim_{\square\to\infty} \square(\square)$

b. Definiciones asociados: punto de acumulación.

c. Contexto: Analítico

d. Procedimiento Analítico: el punto del dominio, donde se estudia continuidad debe ser un punto de acumulación del dominio.

Esquema Conceptual Asociado a la Definición de Sucesión

a. Representaciones que hacen emerger el concepto: la recta real.

b. Representaciones asociadas: $\left\{\frac{1}{\square}\right\}_{\square\geq 1}$, $\square_{\square}$, $\frac{1}{\square}$

c. Definiciones asociados: sucesiones convergentes, sucesiones acotadas, sucesiones monótonas.

d. Contexto: Analítico

e. Procedimiento Analítico: estudiar la convergencia de 1/n mediante el estudio de $\lim_{\square\to\infty}\frac{1}{\square}$

Esquema Conceptual Asociado a la Definición de Serie

a. Representaciones que hacen emerger el concepto: sucesión de sumas parciales $\square_{\square} = \square_1 + \square_2 + \cdots + \square_{\square}$ y las sumas infinitas de longitudes.

b. Representaciones asociadas: $\square_{\square} = \square_1 + \square_2 + \cdots + \square_{\square}$, $\sum_{\square=1}^{\infty} \square_{\square}$, $\square_{\square} \to \square$, $\forall \square > 0, \exists \square \in; \square \geq \square \to |\square\square - \square| < \square$

c. Definiciones asociados: series convergentes, serie geométrica.

d. Contexto: Analítico

e. Procedimiento Analítico: estudiar la convergencia de la serie mediante el estudio de la convergencia de la sucesión de sumas parciales. Relacionar las sumas infinitas con una serie.

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

En síntesis se podría indicar que luego de estar en contacto con las definiciones del Cálculo Integral, el estudiante evoluciona su manera de pensar en lo que a las definiciones formales se refiere. Prueba de ello es el cambio entre los esquemas conceptuales encontrados en la prueba escrita y los esquemas conceptuales encontrados en las entrevistas semiestructuradas.

A través de los hallazgos encontrados se pudo evidenciar que los docentes deben reflexionar sobre el uso de las diferentes rutas de aprendizaje ya que no sólo se puede demostrar matemáticamente una proposición con una sola ruta de aprendizaje porque algunos alumnos a través de la combinación de la ruta formal e informal llegaron a construir un conocimiento formal.

El uso de las diferentes rutas por parte del estudiante para llegar al conocimiento formal es un tema importante a la hora de enfrentar la labor docente por cuanto en la mayoría de los casos los docentes piensan que el uso de la ruta formal conlleva directamente a un conocimiento formal sin embargo en esta investigación se evidenció que cuando el estudiante aplica una ruta mixta llega al mismo camino, es decir, es el estudiante quien decide qué ruta seguir a la hora de enfrentar una demostración matemática.

Sobre el análisis cognitivo, desde la prueba escrita y en el desarrollo del análisis de las entrevistas, los hallazgos arrojan que los esquemas conceptuales asociados a los conceptos formales de número real, límite, continuidad, sucesión y serie evolucionan. Esto lleva a la reflexión que es posible desarrollar en los estudiantes diferentes rutas de aprendizaje de un determinado concepto desde distintos contextos, en la cual relacione lo que está aprendiendo con las ideas previas que conoce.

REFERENCIAS

Alastre, J. (2012). *Análisis ontosemiótico de una lección de integral definida*. Trabajo de grado de Maestría no publicado. UCLA-UNEXPO-UPEL, Barquisimeto, Venezuela.

Azcárate, C. (2001). Definiciones, demostraciones ¿por qué?, ¿cuándo?, ¿cómo? Actas de las XI Jornadas de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (JAEM), Zaragoza.

Dreyfus, T. (1991).Advanced mathematical thinking process. In David Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 25-41). Dordriech, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Durand, V. y Arsac, G. (2005). An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule.*EducationalStudies in Mathematics*.60, 149–172.

Colmenárez, D. (2008). *Errores, dificultades u obstáculos en el aprendizaje de la demostración matemática*. Tesis Doctoral. Venezuela.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Revista Epsilon*. España. Nº 26 .p. 15 – 30.

Durand, V. y Arsac, G. (2005). An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule.*Educational Studies in Mathematics*.60, 149–172.

Epp, S. (2003).The role of logic in teaching Proof.*American Mathematical Monthly* 110. p.886-899.

Garbin, S. (2005).Como piensan los alumnos entre 16 y 20 años en el infinito. La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática. Relime*. 8*(2)*, 89-109

Hoyles, C y Küchemann, D. (2002) Students understandings of logical implication.*Educational Studies in Mathematics* (51),193–223, 2002.

Pinto, M. (1998).*Students' understanding of real analysis.*Unpublished Doctoral Thesis, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick, UK.

Pinto, M. y Tall, D. (1999). Students constructions of formal theory: living and extracting meaning.In*Proceedings of the 23th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations* (volumen 2, pp. 41-48). Haifa, Israel.

Pinto, M. y Tall, D. (2001). Following students' development in a traditional university analysis course. In Marja Van Den Heuvwel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations*(volumen 4, pp. 57-64). UtrecthTheNetherlands.

Ramos, A. (2011). *Esquemas conceptuales asociados a las definiciones del Análisis Matemático I y las rutas de aprendizaje para su construcción*. Trabajo de grado de maestría no publicado. UCLA-UNEXPO-UPEL-IPB, Barquisimeto, Venezuela.

Rodríguez, E. y Valdivé C. (2010). Significado institucional referencial de la función afín y la ecuación lineal en la economía. *Gestión y Gerencia*, 04*(2)*, 63-87.

Rodríguez, G.; Gil, J. y García E. (1999). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.

Sánchez J. (2010). *Estudio didáctico y epistemológico de la noción de número irracional*. Trabajo de Grado no publicado UCLA-UNEXPO-UPEL, Barquisimeto, Venezuela

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically.*University Cambridge: Cambridge: London

Tall, D. (2005).The transition from embodied thought experiment and symbolic manipulation to formal proof.*Proceedings of the Delta Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1-16).

Tall, D. (2001).Natural and formal infinities.*Educational Studies en Mathematics*, 48(2-3), 200-238.

Tall, D. (1991).The nature of advanced mathematical thinking.In David Tall (Ed.) A*dvanced Mathematical Thinking*, (pp. 3-21). Dordrech, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Valdivé, C. (2008). *Estudio de los Esquemas Conceptuales asociados a la noción de Infinitesimal y su Evolución en estudiantes de Análisis Matemático*. Tesis Doctoral. Venezuela.

Valdivé, C. y Garbin, S. (2013). Cómo piensan los estudiantes sobre el infinitesimal antes de iniciar un curso de Análisis Matemático. *Paradigma* 34*(2);* 117-144.

Valdivé C. y Garbin, S. (2008). Estudio de los Esquemas Conceptuales Epistemológicos Asociados a la Evolución histórica de la Noción de Infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11*(3)*, 413-450.