UPE L
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
EXPERIMENTAL LIBERTADOR

INSTITUTO PEDAGOGICO
DE BARQUSIMETO
LUIS BELTRAN PRIETO FIGUEROA

REVISTA

educare

Órgano Divulgativo de la Subdirección de Investigación y Postgrado del Instituto Pedagógico de Barquisimeto "Luis Beltrán Prieto Figueroa"

BARQUISIMETO – EDO. LARA – VENEZUELA

NUEVA ETAPA
FORMATO ELECTRÒNICO
DEPOSITO LEGAL: ppi201002LA3674
ISSN: 2244-7296

Volumen 14 Nº 3
Septiembre-Octubre 2010

ESTUDIO DE LA EVOLUCIÓN DE LOS ESQUEMAS CONCEPTUALES PREVIOS ASOCIADOS AL INFINITESIMAL: Caso del alumno (2)

EVOLUTION OF PREVIOUS CONCEPTUAL FRAMEWORK RELATED TO THE INFINITESIMAL NOTION: case of student 2

Carmen Valdivé
UCLA
Sabrina Garbin
USB

ESTUDIO DE LA EVOLUCIÓN DE LOS ESQUEMAS CONCEPTUALES PREVIOS ASOCIADOS AL INFINITESIMAL: Caso del alumno (2)

EVOLUTION OF PREVIOUS CONCEPTUAL FRAMEWORK RELATED TO THE INFINITESIMAL NOTION: case of student 2

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Carmen Valdivé*
UCLA
Sabrina Garbín**
USB

Recibido 01-11-2010

Aceptado: 14-12-2010

RESUMEN

La presente investigación se inscribe en una más amplia que estudia los esquemas conceptuales asociados al infinitesimal y su evolución en estudiantes de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, antes, durante y al finalizar un curso de Análisis Matemático. El estudio surge del interés por comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos del Análisis Matemático como límite, número real y continuidad. Es una investigación Humanística-interpretativa, de campo y descriptiva, tomando como base la información obtenida a cinco informantes clave mediante la técnica de la entrevista. Se presenta la descripción de la evolución de los esquemas conceptuales previos asociados a la noción de infinitesimal de un alumno clave durante y al finalizar el curso. Entre los hallazgos encontramos que la variedad de esquemas conceptuales previos asociados al infinitesimal del estudiante se enriquecen y matizan al entrar en contacto con la teoría formal, utiliza una ruta de aprendizaje que llamamos mixta y el esquema conceptual evoluciona a formal.
Descriptores: Infinitesimales, esquemas conceptuales, rutas de aprendizaje.

ABSTRACT

This study focuses on conceptual frameworks related to the infinitesimal notion and its evolution in students of Mathematical Sciences; in other words, it seeks to understand the teaching and learning processes of mathematical analysis concepts such as limit, real number and infinite series before, during and after a course of Mathematical Analysis. It is a descriptive-interpretative, humanistic, and field investigation. The sample was composed by five key informants. Data were collected through an interview. Results show that, when receiving formal instruction, students' conceptual frameworks enrich, reaching a formal level, by means of what we have called a "mixed learning route."

Keywords: infinitesimal, conceptual frameworks, learning routes

* Profesora Categoría Asociado a Dedicación Exclusiva del Departamento de Técnicas Cuantitativas de la UCLA y del programa de postgrado MIM. PPI nivel I. Doctora en Ciencias de la Educación- carmenv@ucla.edu.ve
** Profesora Categoría Asociado a Dedicación Exclusiva del Departamento de Matemáticas y sistemas MYS de la USB.PPI nivel II. Doctora en Ciencias y en didáctica de las matemáticas. sgarbin@usb.ve

INTRODUCCIÓN

En las clases de Cálculo y Análisis Matemático encontramos ciertas dificultades de comprensión, por parte de los estudiantes, de ciertos conceptos claves como lo son el de límite, continuidad, número real entre otros. Conscientes de estas dificultades y la preocupación por superarlas se hizo una revisión de algunas investigaciones tales como las de Tall y Vinner (1981), Vinner (1983), Cornu (1983, 1991) y Sierpinska (1985, 1987a, 1987b) que comparten nuestro interés y nos permiten avanzar con otras (Valdivé, 2005; Valdivé, 2006; Santamaría y Valdivé, 2007; Valdivé, 2008a; Valdivé y Garbín, 2007, 2008). En los estudios nombrados anteriormente encontramos un común denominador: los conceptos claves del Cálculo se sirven de las ideas intuitivas que poseen los estudiantes sobre el infinitesimal o el *infinitamente pequeño*.

Lo anterior genera un interés en realizar una investigación sobre la noción de infinitesimal en el pensamiento de algunos estudiantes universitarios, antes, durante y al finalizar un curso de Análisis Matemático I (Valdivé, 2008b), específicamente dentro de una aproximación teórica denominada Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) desarrollada por Tall (1991, 1992, 1995, 2001, 2004, 2005) y Dreyfus (1990, 1991). Nos preguntamos ¿Cuáles son los esquemas conceptuales previos que tiene el estudiante asociados al infinitesimal? A partir de la respuesta a esta cuestión, también preguntamos: ¿El esquema conceptual asociado al infinitesimal que tiene el estudiante, es un esquema formal o informal? ¿Cómo evoluciona este esquema conceptual cuando el estudiante está en contacto con una teoría formal asociada al infinitesimal? Estas dos últimas interrogantes nos induce a plantear el siguiente propósito: *Estudiar la evolución de los esquemas conceptuales previos asociados al infinitesimal del estudiante*.

Los hallazgos a que hemos llegado en la investigación (Valdivé, 2008b) muestran entre otras cuestiones, que algunos estudiantes evocan una variedad de esquemas conceptuales, de ideas formales asociadas a la noción de infinitesimal, y que cuando está en contacto con una teoría formal asociada a esta noción, sus esquemas conceptuales previos (ideas formales, informales, representaciones, etc) evolucionan y se matizan. Se ha encontrado que también utilizan rutas de aprendizaje formal, informal (Pinto y Tall, 1999, 2001) y mixta (Valdivé, 2008b), producto de la experiencia que van obteniendo a partir de los conceptos formales del Análisis Matemático I.

Este artículo se centra en mostrar el estudio de la evolución de los esquemas conceptuales previos asociados a la noción de un estudiante clave, durante y al finalizar un curso de Análisis Matemático I. Se selecciona este alumno por ser un caso que muestra una variedad de esquemas conceptuales asociados al infinitesimal (5 esquemas previos) y por el tipo de argumentaciones que emplea. Para ello optamos por analizar, de forma cíclica, las respuestas del estudiante en tres entrevistas semiestructuradas, luego que se han descrito y contrastado los esquemas conceptuales previos con los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal, estudio que se detalla en Valdivé y Garbin (2008) y Valdivé (2008b).

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Teoría Cognitiva PMA y Esquema Conceptual

Como se comenta en la introducción, los fundamentos teóricos se ubican dentro del modelo PMA. Los conceptos que interesan de esta teoría son: el *concept image, informal concept image, formal concept image* y *metbefore concept image*, los cuales traducimos como esquema conceptual, esquema conceptual informal, esquema conceptual formal y el esquema conceptual previo, respectivamente.

La adquisición, representación, uso y comprensión de ciertos conceptos que involucran la noción de infinitesimal ha sido de interés de muchos investigadores en Educación Matemática. Al respecto se han estudiado en las últimas tres décadas la adquisición de ciertos conceptos matemáticos específicos en matemáticas avanzadas. Al hacerlo, ciertos investigadores focalizan la atención sobre las imágenes mentales que los estudiantes evocan y que entran en conflicto con las definiciones aceptadas por los matemáticos (Cornu, 1981; Vinner y Herschkowitz, 1980). Esto da origen a algunos constructos teóricos, en particular el *esquema conceptual*.

En la investigación que se presenta, el conocimiento de los esquemas conceptuales del estudiante juega un rol fundamental. No sólo los nuevos, los viejos (Tall 1987, 1988, 1989), inadecuados (Przenioslo, 2004), y los previos o met-before (Chin y Tall, 2001), sino también la caracterización de éstos que permite nombrar ciertos elementos; tales como, los procedimientos, ideas, propiedades, situaciones y representaciones. Teniendo en cuenta el interés particular del estudio, se muestra brevemente en este apartado la evolución de la caracterización del esquema conceptual que encontramos en la literatura, la cual, permite describir una caracterización referencial más completa y propia (Valdivé y Garbin, 2008; Valdivé, 2008b).

El esquema conceptual que tiene una persona de un concepto matemático según Tall y Vinner (1981) es la expresión que permite referirse "a la estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto matemático y que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados al concepto" (p. 151). Este constructo ha originado interés en muchos investigadores y se ha empleado y matizado a través de investigaciones empíricas (Tall (2001, 2004, 2005); Pinto y Tall (1999, 2001); Przenioslo (2004, 2005); Chin y Tall (2000, 2001); Chae y Tall (2005); Watson, Spyrou y Tall (2004), Watson y Tall (2002); Garbin (2005); Valdivé (2008b) y Valdivé y Garbin (2008)).

En los artículos que se reseñan, los autores trabajan con la propuesta de Tall y Vinner (1981) acerca de la distinción entre el esquema conceptual y la definición del concepto y sobre la caracterización de los esquemas conceptuales de los estudiantes. En estas investigaciones se encuentran ciertos matices de la definición de esquema conceptual y que se resumen a continuación: (a) Incluye todas *las imágenes mentales*, *las propiedades* y *los procesos asociados* al concepto (Tall y Vinner, 1981); (b) Para Vinner y Dreyfus (1989) es el conjunto de todos *los dibujos mentales* (representaciones-dibujos, formas simbólicas, diagramas, gráficas, etc.) en la mente del estudiante, asociadas con el nombre del concepto, junto "con todas las propiedades que lo caracterizan producto de la experiencia del sujeto con ejemplos y contraejemplos del concepto" (p. 359); (c) Vinner (1991) lo considera como "algo no-verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto… Puede ser una representación visual del concepto…también puede ser una colección de impresiones o experiencias*"* (p. 71); (d) Vinner (1995) le incluye *"*imágenes informales, distorsionadas, seudo conceptuales e imágenes formales" (p. 12); (e) Azcárate (1992) indica que está formado por *"*representaciones visuales, procedimientos, ejemplos, no-ejemplos y sensaciones vinculados al concepto, por recuerdos de experiencias con el concepto, por enunciados de algunas de sus propiedades" (p. 250); (f) Garbin (2000) expresa que "está lleno de concepciones, de relaciones (…) inconsistencias (…)" (p. 356) y (g) Przenioslo (2004) refiere que contiene *"*toda clase de asociaciones y concepciones relacionadas al concepto, incluyendo las intuiciones, elementos de comprensión formal, patrones establecidos, procedimientos y estrategias operacionales" (p. 125).

Los autores anteriormente citados, vislumbran que el esquema conceptual es algo no verbal, puede ser una representación visual o una colección de impresiones o experiencias. Está lleno de concepciones, intuiciones, procedimientos, inconsistencias, ejemplos y contraejemplos del concepto, incluyendo todo tipo de imágenes, las formales, informales, seudo conceptuales y las distorsionadas. La definición original del esquema conceptual (Tall y Vinner, 1981) se enriquece, matiza y caracteriza con las investigaciones realizadas a lo largo del tiempo, lo cual permite describir e interpretar la evolución de la caracterización del esquema conceptual como herramienta teórica del PMA

Por otra parte Tall (2001), a raíz de los trabajos de Pinto y Tall (1999) y Pinto (1998), caracteriza los constructos esquema conceptual formal e informal, que son también de especial interés para el trabajo que se presenta. Para Tall, dada una lista de axiomas o un concepto formal específico, define *el esquema conceptual formal* como aquella parte del esquema conceptual que está formalmente deducida de los axiomas. Similarmente la porción del esquema conceptual que es construido de la experiencia natural del día a día, con ejemplos, imágenes, procedimientos y procesos para darle significado a la definición formal, es llamado *esquema conceptual informal*.

Ciertos autores (Chin y Tall, 2001; Tall 2004; Watson, Spyrou y Tall, 2004; Watson y Tall, 2002; Tall, 2005) hacen la distinción entre un esquema conceptual y el esquema conceptual previo (Metbefore) y que Tall (1987, 1988, 1989) llama esquema conceptual viejo. El Metbefore, esquema conceptual previo, está asociado a los conocimientos o experiencia previa que es evocada para darle sentido a una situación.

Pinto (1998) y Pinto y Tall (1999, 2001) encuentran que los estudiantes de un curso de Análisis utilizan dos acercamientos a la teoría formal, llamados *approach natural* y *approach formal* los cuales traducimos en este trabajo como acercamiento natural y acercamiento formal a una teoría matemática. A través de un acercamiento natural a la teoría formal, se puede construir una definición imaginaria desde un significado personal de la definición formal. A través de un acercamiento formal a la teoría matemática, se pueden construir teoremas desde la definición del concepto. Para ello, los estudiantes utilizan *informal route of learning o formal route of learning* traducidas en este trabajo como ruta de aprendizaje informal y ruta de aprendizaje formal, respectivamente.

Los constructos acercamientos natural y formal a una teoría formal encontrados por los autores antes mencionados, se utilizan en el trabajo que se muestra para identificar las rutas que sigue el estudiante cuando está estudiando los conceptos formales matemáticos que involucran el infinitesimal.

En el estudio se utiliza la caracterización de las dos partes del esquema conceptual, el esquema conceptual formal y el informal que especifica Tall (2001), una vez que se identifica el tipo de ideas que el estudiante muestra a través de las preguntas de un cuestionario escrito y que se detalla en Valdivé (2008b). A partir del análisis de sus respuestas nos aproximamos a los esquemas conceptuales previos asociados a la noción, antes de que esté en contacto con la teoría matemática formal de Análisis Matemático I, para luego estudiar su evolución. Para ello se indagan cinco (5) estudiantes para el estudio de caso. En este trabajo, como parte del estudio de Valdivé (2008b) describimos el caso del estudiante que llamamos clave, seleccionado como se explicitó en la introducción, por ser un alumno que muestra una variedad de esquemas conceptuales asociados al infinitesimal (el infinitesimal asociado a una razón, a un incremento, a una función, a una diferencia y a un indivisible) y por el tipo de argumentaciones que enuncia: argumentaciones formales e informales en una misma respuesta del cuestionario definitivo (CD).

En los apartados anteriores se hacen algunas consideraciones acerca de los aportes de las investigaciones sobre las tipologías de los esquemas conceptuales. Sin embargo otros autores destacan aspectos particulares de los esquemas conceptuales como los modelos, las representaciones y las concepciones. Estos aspectos requieren de la descripción de los esquemas conceptuales del sujeto para su estudio y análisis (Cornu, 1991; Sierpinska, 1992; Ruiz, 1998; Robert, 1982; Harel, Selden y Selden, 2006).

Nos interesa rescatar la descripción particular que hacen Tall y Vinner de la noción de esquema conceptual y la proximidad de este constructo a la noción de concepción para introducir nuestra acepción cognitiva y epistemológica del esquema conceptual. Para ello se analiza la revisión sistemática que hace Ruiz (1998) sobre el término, resaltando el sentido epistemológico de la noción de concepción y la diferenciación que realiza, entre la acepción cognitiva y la epistemológica. Así como la proximidad que existe entre el constructo esquema conceptual y el de concepción.

El análisis realizado y la proximidad de ambos constructos nos permite hacer una diferenciación entre la acepción cognitiva y epistemológica del esquema conceptual. En esta investigación, con la *acepción cognitiva del esquema conceptual* del sujeto nos referirnos a los conocimientos que evoca sobre un concepto específico y que son accesibles a la investigación didáctica para representar y describir cada concepto que la persona conoce.

Dado que la noción esquema conceptual en su acepción cognitiva requiere de tareas, situaciones, problemas que lo hacen emerger y de las representaciones, contextos, conceptos asociados a la noción y de los procedimientos y ejemplos que el sujeto utiliza para resolver dichas situaciones o tareas, *caracterizamos al esquema conceptual refiriéndonos a*: (1) *Las ideas* que asocia el sujeto al concepto; (2) *Las representaciones asociadas* que hacen emerger la noción y representaciones propias de esta. Ambas son imágenes (dibujos, gráficas, palabras, símbolos) que el sujeto percibe del objeto o concepto y que evoca ante una situación problema o tarea; (3) *Los procedimientos* (algorítmicos, aritméticos, algebraicos, geométricos, manipulaciones simbólicas) que el sujeto activa ante la tarea cognitiva; (4) *Las ideas* más representativas asociadas al objeto matemático; (5) *El contexto* (geométrico, analítico, algebraico, aritmético o físico, no técnico) que el sujeto asocia ante la situación y (6) *Los ejemplos y contraejemplos* que el sujeto implementa para explicitar sus ideas.

El esquema conceptual en su carácter epistemológico, puede referirse a la evolución histórica de los conceptos matemáticos o a los tipos de conocimientos asociados a la noción matemática, así como también a las representaciones, los procedimientos y ejemplos que los matemáticos usaron para resolver una situación en un cierto contexto. Elementos estos que existen en un cierto período histórico y que fueron aceptados por una comunidad matemática en ese período de tiempo y en ese escenario particular. La caracterización de la acepción cognitiva descrita en el párrafo anterior permite describir los esquemas conceptuales del alumno como propósito del artículo, así mismo distintos tipos de esquemas conceptuales epistemológicos, atendiendo a los 6 ítemes enumerados anteriormente en un tiempo determinado de la historia (Valdivé y Garbin, 2008).

En síntesis, en nuestra investigación se utiliza la diferenciación entre la acepción cognitiva (para estudiar la evolución de los esquemas conceptuales previos del estudiante) y epistemológica del esquema conceptual (para realizar una contrastación teórica entre los esquemas conceptuales encontrados en el estudiante con los de algunos matemáticos en la historia), así como los seis ítemes caracterizadores y asumidos para las dos acepciones. A continuación mostramos la metodología de la investigación que nos permite responder al siguiente propósito: Estudiar la evolución de los esquemas previos asociados a la noción de infinitesimal del alumno clave durante y al finalizar el curso de Análisis Matemático I.

METODOLOGÍA

Como se explicita en el apartado anterior, los esquemas conceptuales previos del estudiante son construidos antes de introducir definiciones formales del curso de Análisis Matemático I y evolucionan en contacto con la teoría formal. Las interrogantes planteadas en la introducción, dan razón para aplicar un estudio de caso, definido como una forma particular de recoger, organizar y analizar información. Implica un proceso de indagación que se caracteriza por el examen detallado, comprehensivo, sistemático y en profundidad del objeto de interés (Patton, 1990), por tanto es una investigación Humanístico-Interpretativa, de campo y descriptiva (Gil, Rodríguez y García, 1999). Se basa en tres premisas básicas expresadas por Blumer (1982): (a) La actuación de las personas sobre las cosas, e incluso sobre las personas, depende de lo que significan para ellas; (b) Los significados son el resultado de la interacción; y (c) La interpretación genera y modifica los significados. Así mismo, según Sandin (2003) “los pragmatistas creen que las personas sostienen formas diferentes de acercarse a los objetos, hechos y experiencias” (p. 64).

En Valdivé (2008b) se detalla el estudio de los esquemas conceptuales previos asociados a la noción. En él se utiliza como técnica de recogida de la información, el cuestionario, y como técnica de análisis y organización de la información, las redes sistémicas. Esta técnica es utilizada para categorizar e indagar los esquemas conceptuales previos y las ideas formales que usa el estudiante ante una situación problema que aluda a la noción de infinitesimal. Así como también permite seleccionar los informantes clave que sirven para el estudio de caso, en particular el caso seleccionado para este artículo. Desde el punto de vista cognitivo, la información se organiza sobre la base de la teoría de Vinner (1983, 1991) y ampliada por Tall (2001).

En esta investigación se asume el esquema conceptual formal asociado a la noción de infinitesimal de un estudiante como aquella porción del esquema conceptual que es construida a partir de las definiciones formales que aluden a la noción de infinitesimal y que el estudiante apela al demostrar, definir o resolver problemas que se asocian a la noción; el esquema conceptual informal como aquella porción del esquema conceptual que es construida a partir de la experiencia que el alumno haya tenido con las imágenes, ejemplos, procedimientos y dibujos que le dan significado a la noción de infinitesimal, en las materias estudiadas en el transcurso de la carrera, y con los conceptos asociados a la noción. Lo consideramos informal en virtud de que el estudiante puede apelar a conceptos pero no es capaz de dar definiciones formales de estos conceptos que aluden a la noción de infinitesimal; y el esquema conceptual previo como aquél que está asociado a los conocimientos o experiencia previa que es evocada para darle sentido a una situación y es el que se caracteriza a partir del cuestionario.

Para acercarnos al objeto de estudio que se quiere mostrar en este manuscrito se aplican tres entrevistas semiestructuradas, en diferentes momentos. Para el análisis de las entrevistas aplicamos la estrategia de las comparaciones constantes y el método inductivo. Las preguntas de las tres entrevistas las agrupamos en tres aspectos que se consideran marcan la pauta para la indagación. Los aspectos giran alrededor de las respuestas de los estudiantes sobre: (1) Uso de la noción de infinitesimal en los temas estudiados en cada unidad de la materia Análisis Matemático I; (2) Uso o no de la noción en las preguntas del CD del estudio exploratorio, para intentar hacer consciente al alumno sobre la idea que pensamos alude en el CD y (3) Cambio o matiz de la idea de la noción que asoma el alumno en el CD y en cada entrevista. Para el análisis se toma en cuenta el estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal, los esquemas conceptuales previos del informante y la teoría cognitiva.

Los Informantes

La selección de 5 informantes clave, de los 16 actores sociales que participan en la investigación, se hizo tomando en cuenta la variedad o no de ideas que han usado en el CD. Los cuestionarios (C) se enumeraron del 1 al 16. Los claves seleccionados son el (1), (2), (6), (11) y (12). Se encontró que *el alumno (2),* caracterizado mixto puro, usa 5 ideas diferentes (el infinitesimal asociado a una razón, a un incremento, a una función, a una diferencia y a un indivisible) , el alumno (6), caracterizado como mixto puro usa cuatro ideas (asociadas a una razón, a un incremento, a un símbolo y aun indivisible), los alumnos (1, 12), señalados como formal y mixto respectivamente, usan tres ideas diferentes (asociadas a un incremento, una función y a símbolo) y el alumno (11), diferenciado como informal, usa sólo dos ideas (asociadas a un incremento y a una función). Sin embargo hemos considerado también el tipo de argumentos que han usado en las respuestas: Un estudiante fue categorizado (a) formal, cuando formula justificaciones matemáticas, y desarrolla una demostración. No usa lenguaje natural, ni de aproximaciones para responder; (b) informal, no desarrolla demostración alguna, apela al lenguaje natural y a ejemplos particulares para justificar casi todas las preguntas; o (c) mixto, cuando desarrolla una demostración pero apela a ideas informales dentro de la misma.

En este artículo, se muestra el *caso alumno (2),* categorizado como mixto y que en los apartados anteriores hemos llamado estudiante clave. Se detalla este estudiante por ser un caso que recoge diversos esquemas conceptuales asociados a la noción, característicos y típicos que hacen ilustrar la evolución de su pensamiento y enuncia argumentaciones formales e informales en una misma respuesta del CD. Seguidamente se presenta la tipología que se obtuvo en Valdivé (2008b) y que permitió seleccionar los informantes clave.

Tabla 1.
Tipología de los Informantes Claves según los Esquemas Previos que evocan asociados al Infinitesimal

C/ECM	El infinitesimal asociado a una Razón	El infinitesimal asociado a un Incremento	El infinitesimal asociado a una Función	El infinitesimal asociado a una Diferencia	El infinitesimal asociado a un Símbolo	El infinitesimal asociado a un Indivisible
(1)		1, 3, 6	5		8	
(2)	**2**	**1, 3, 5**	**8, 7**	**7, 8**		**8**
(6)	2	1, 3, 5			8	8
(11)		3, 5	7			
(12)		3, 4, 5, 6	7			8

En la tabla se puede observar la variedad de respuestas de los informantes claves del estudio de Valdivé (2008b). Se ha resaltado el estudiante (2). Se detallan las preguntas del cuestionario que se aplicó donde evocan los esquemas conceptuales previos asociadas al infinitesimal, preguntas que luego se enuncian en este documento. Se observa que en la pregunta 2, el alumno dos asocia el infinitesimal a una razón, en las preguntas 1, 3 y 5 la asocia a un incremento, en la 7 y 8 a una función, a una diferencia y a un indivisible.

La entrevistas como técnica de recolección de información (los tres momentos en términos de Newton)

Se elaboran tres entrevistas semiestructuradas (que se han identificado como momentos). Aplicamos cada una al finalizar una unidad de la materia Análisis Matemático I (el curso se ha dividido en tres unidades). Se selecciona esta técnica de recolección de información porque favorece entre otras cosas, el estudio de casos. Es una entrevista dirigida ya que se trabaja con preguntas que permiten direccionar al estudiante a relacionar o no la idea de infinitesimal que alude en las preguntas del CD, con la idea de infinitesimal que expresa en cada entrevista. Idea explicitada en función de los problemas, conceptos, definiciones, ejemplos y representaciones en temas estudiados de la unidad I (números reales, series y sucesiones), II (límite, continuidad, continuidad uniforme y derivada) y III (integración). A continuación los problemas y cuestiones del CD que se plantean y que se comentan en el desarrollo de las entrevistas:

Pregunta 1: Encuentra el área de las figuras (lúnula y círculo) que se te presentan. Escribe los procedimientos, símbolos, fórmulas y gráficos que uses para ello. Justifica tus hallazgos.

Pregunta 2: ¿Cuál es la relación entre el volumen de un cono recto circular de altura h y base A y un cilindro con la misma altura h y la misma base A? Escribe los procedimientos, fórmulas y gráficos que uses para ello. Justifica la relación encontrada.

Pregunta 4: Escribe qué significado tiene para ti los símbolos a) dx, b) dy, c) $\frac{dy}{dx}$, d) Δx, e) en la expresión $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Pregunta 5: Si $\forall$ n>0, $|$a-b$|$< 1/n ¿Qué puedes decir de los números a y b? Justifica matemáticamente tu respuesta.

Pregunta 7: ¿Cuál de las siguientes expresiones te parece razonable a partir de los conocimientos que tú tienes de derivada? Justifica tu respuesta.

i) Decimos que la primera derivada de una función *f* en *a* es *L* si para *δ* infinitesimal se tiene que *f´(a+ δ) = L +B* con *B* infinitesimal; ii) Dado *a ε R*, se puede calcular la razón *(f(a+h)-f(a))/h*, tabulando los valores, variando *h*, y ver en la tabla cuando *h* tiende a cero por la derecha y por la izquierda, los valores de la razón *(f(a+h)-f(a))/h* tienden o no a un valor específico; iii) Para demostrar que el cociente *(f(x+h)-f(x))/h* tiende a *f ’(x)* cuando *h* tiende a cero (digamos que menor que una cantidad épsilon), entonces se podrá calcular la próxima cantidad que debe estar h de cero (menor que una cantidad positiva delta).

Pregunta 8: Escribe, a) ¿qué significado tiene para ti el infinitesimal?, Si tienes que explicar la noción de infinitesimal a un alumno que se inicia en el Cálculo, b) ¿qué definición le darías y cómo lo harías? y c) ¿qué ejemplos usarías?

Para la transcripción se usan la letra E para el Entrevistador y la letra A para el alumno. Se utiliza letra itálica (cursiva) para resaltar lo expresado textualmente por el alumno en la entrevista.

Técnica de análisis de la información

Para el análisis de las entrevistas se opta por la estrategia de las Comparaciones Constantes diseñada por Glasser y Strauss (citados por Strauss y Corbin, 1998). Esta estrategia combina la codificación de categorías inductivas con un proceso simultáneo de comparación de todas las incidencias registradas a medida que avanza el proceso de recolección y de análisis de información. A medida que se registran y clasifican los elementos cognitivos que nos interesan (ideas, esquemas conceptuales previos, esquemas conceptuales nuevos) y la tipología del alumno (estudiante mixto, informal y formal).

El descubrimiento de relaciones comienza con el análisis de las informaciones iniciales, en nuestro caso el CD. Luego se retroalimentan las categorías. En el primer trabajo cognitivo (estudio que se comenta en Valdivé, 2008b) encontramos ciertas tipologías del grupo de estudiantes (los que usan cinco, cuatro, tres o dos esquemas conceptuales previos) y ciertos tipos de argumentaciones (informales, formales y mixtas), en particular del informante clave para el estudio que se presenta en este manuscrito. Al compararse constantemente esas tipologías y acontecimientos detectados con otros posteriores (los acontecimientos detectados en las tres entrevistas) se descubren nuevas dimensiones tipológicas y nuevas relaciones que permiten dar respuestas a las preguntas de investigación.

Procedimiento de Análisis

Las actividades de análisis para las entrevistas se detallan a continuación:

a) Se analizan las informaciones iniciales, categorías o tipologías (el perfil del estudiante antes de iniciar el curso de Análisis): (i) el tipo de esquema conceptual previo con las ideas, las representaciones, el contexto, los procedimientos y los ejemplos (tabla 1) y (ii) el tipo de argumentación que más utiliza el estudiante (formal, informal, mixta). Se revisa nuevamente la evolución del constructo esquema conceptual, nuestra propia caracterización y los esquemas conceptuales epistemológicos. Con esto se tiene de antemano las tipologías de cada informante y el marco referencial (histórico y cognitivo) como guía del proceso de análisis.

b) Se repite tres veces el proceso cíclico de los 5 pasos siguientes: (1) Se buscan las relaciones entre el esquema conceptual previo del estudiante asociado a la noción de infinitesimal (ver tabla 2) con las ideas, representaciones, conceptos asociados, contextos (elementos del esquema conceptual) que van apareciendo durante la entrevista. Se buscan nuevas relaciones entre las respuestas de la pregunta ocho del cuestionario, y las nuevas respuestas de esa pregunta, fundamentadas con los contenidos vistos en cada unidad del curso de Análisis Matemático. Se busca lo mismo con las argumentaciones; (2) Se indagan nuevos matices de significado, representación y concepto asociado otorgado a la noción de infinitesimal o bien si se ratifica el significado; (3) Buscamos indicios de interacción entre las ideas informales y las ideas formales introducidas en el curso de Análisis Matemático; (4) Se indaga sobre las rutas de aprendizaje que utiliza el estudiante y (5) Presentamos el análisis descriptivo del alumno. En este análisis se muestran fragmentos de la transcripción que permiten ilustrar la interpretación del texto de la entrevista.

c) Se perfecciona y enriquece la información original y la que se obtiene en el proceso cíclico del inciso (b) con la contrastación constante.

d) Finalmente se escribe el informe descriptivo del análisis de las entrevistas del estudiante clave en función de los hallazgos de la aplicación de los tres procesos cíclicos. Se describe la caracterización del alumno.

MOMENTO DE LOS HALLAZGOS

Caracterización Inicial del Alumno (2).

El estudiante elegido está ubicado en la categoría mixto. El significado otorgado a la noción de infinitesimal, ejemplo y definición que explicitaría a estudiantes que se inician en el Cálculo I (pregunta 8) se muestra seguidamente: *Es una cantidad que puede ser infinitamente pequeña, muy cercana al cero pero sin llegar a anularse. Lo definiría como una herramienta de estudio que trata en lo posible de aproximar resultados sin cometer errores, como los que se producen cuando equivocadamente se sustituye una cantidad que se considera pequeña por cero. Daría* *como ejemplo el de la cercanía de las estrellas y el tamaño que se piensa que tienen.* La tipología detallada de respuestas del cuestionario definitivo se muestra a continuación.

Tabla 2.
Tipología detallada del estudiante (2) según los Esquemas Conceptuales Previos (ECM)

A/ECM	El infinitesimal asociado a una Razón	El infinitesimal asociado a un Incremento	El infinitesimal asociado a una Función	El infinitesimal asociado a una Diferencia	El infinitesimal asociado a un Indivisible
(2)	2	1a, 1b, 3a, 3b, 3c, 5	**8a, 8b,** 7a, 7b	**8a,** 7a	**8 c**

Análisis Simultáneo de las Tres Entrevistas con la Estrategia de las Comparaciones Constantes (tal y como se detalla en la página 8).

*Acerca del uso de la noción de infinitesimal por parte del alumno en los temas estudiados en cada unidad de la materia Análisis Matemático I***.** En la Entrevista 1, 2 y 3 preguntamos al estudiante si podría explicar si trabaja o utiliza la noción de infinitesimal en los temas estudiados en cada Unidad del curso de Análisis Matemático I.

En la entrevista uno el alumno afirma que aplica la noción en los conceptos de límite de sucesiones, de sumas parciales y para decidir si una serie converge o diverge. Muestra el ejemplo de la serie 1/n. Indica que usa la idea de infinitesimal cuando hace las sumas parciales *1/n + 1/(n+1)+…,* ya que cada suma se va haciendo muy pequeña y aunque le sume una cantidad muy pequeña, la sucesión va creciendo.

A continuación se muestra un segmento de la entrevista:

A: ¿Si se usa?. Claro! Para decir lo que es límite y esas cosas. Límite de sucesiones, de sumas parciales, para decidir si una serie converge o no converge, se usa el infinitesimal.
E: ¿Podrías indicar dónde usaste la noción de infinitesimal?
A: Ahí se ve la noción de infinitesimal porque haces las sumas parciales, cada suma se va haciendo muy muy pequeña el último sumando pero la suma se va haciendo más grande, más grande, más grande. Aunque uno le sume una cantidad muy pequeña, la sucesión va creciendo.

En este momento el alumno alude a la idea de infinitesimal asociado a una función pero como un valor numérico ya que aplica el concepto de sucesión convergente para explicitar el uso de la idea en los contenidos del Análisis Matemático I. Aunque el alumno no define, aplica definiciones para ejemplificar el uso de la noción. Opinamos que piensa en la idea asociada a una cantidad muy pequeña afiliada a un término de la sucesión. En este momento podríamos decir que el esquema conceptual previo que evoca en el CD cambia a informal ya que alude a conceptos formales del curso de Análisis pero no define formalmente.

En la segunda entrevista el alumno indica que utiliza la idea en el concepto de serie de funciones y de continuidad uniforme. Ejemplifica el uso de la idea en la definición de continuidad uniforme y escribe $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que*, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, los dos puntos *x, y* están en el conjunto S que sería el conjunto del dominio de la función. Explica dónde usa la idea en la definición. Afirma que se puede tomar cualquier valor *x, y* y acercarlos mucho. Indica que la cercanía es menor que un valor delta muy pequeño y que eso sería infinitesimal. Aplica la definición de continuidad uniforme en la función $f(x) = \sqrt{x}$. Demuestra que esa función es uniformemente continua en su dominio y explicita que la idea de infinitesimal se aprecia cuando usa el delta.

A continuación se muestra un fragmento de la entrevista que pone en evidencia lo que el estudiante alude:

E: De los que tú me estás diciendo donde aparece la idea de infinitesimal, uno que tú recuerdes. Puedes utilizar el libro texto si quieres.
A: La idea de infinitesimal era sobre los teoremas en continuidad, porque cuando uno habla de continuidad, cuando uno habla de un límite de una función tiene que ser que el límite esté muy cercano a las imágenes de esa función cuando las preimágenes están muy cercanas. En continuidad uniforme, las preimágenes son arbitrarias, quiere decir que uno puede tomar cualquier valor x, y y acercarlos mucho, es decir menor que un valor delta muy pequeño y eso sería algo infinitesimal, la cercanía de ellos., o sea la diferencia entre ellos es un infinitesimal, tienen que ser muy muy pequeña para que exista la continuidad uniforme.
E: Específicamente la definición de continuidad uniforme ¿Podrías escribirla?
A: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que*, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ *(tengo dos puntos en el conjunto S que sería el conjunto dominio de la función).*

El alumno en la segunda unidad del curso de Análisis Matemático I, formaliza la idea de infinitesimal asociándola a la definición de continuidad uniforme. Pensamos que usa la idea asociada a una función al estilo de Cauchy y Weierstrass (Valdivé y Garbin, 2008). En este momento se asume que el esquema conceptual informal que evoca en la primera entrevista cambia a formal. Apela a definiciones formales.

En la tercera entrevista el estudiante indica que emplea la idea de infinitesimal cuando trabaja con la definición de límite en la demostración del teorema de la regla de la cadena para derivadas y en los intervalos muy pequeños. Considera que cuando *x* está muy cercano al punto, la diferencia entre *x* y el punto es un valor delta positivo, esto implicaría que el límite que está evaluando va a estar muy cercano del límite *L* y que esta cercanía es una diferencia menor que una cantidad épsilon, infinitesimal.

Continúa explicando que para aplicar delta en los intervalos utiliza la idea de infinitesimal. Indica que toma intervalos muy pequeños en la definición de límite, el intervalo *(a+δ, a-δ)* para las preimágenes y *(h(a) –ε, h(a) +ε)* para las imágenes. Afirma que al usar el límite en estos intervalos, hace tender el delta a cero de tal manera que épsilon tienda a cero. Argumenta que toma a delta infinitesimal para que épsilon también sea infinitesimal.

A continuación se muestra un fragmento de las ideas expresadas por el estudiante en la entrevista:

> *E: En ese problema que acabas de resolver ¿podrías indicar si trabajaste o usaste la noción de infinitesimal?*
> *A: si, cuando se habla de límite, siempre se habla de infinitesimal. Precisamente en la definición de límite cuando x tiende a un punto, quiere decir que si yo tengo el x muy cercano a ese punto me dará un valor delta positivo eso me va a implicar que el límite que yo estoy evaluando va estar muy cercano al límite que me da menor que una cantidad épsilon, es infinitesimal.*
> *E: ¿En alguna otra situación?*
> *A: También para aplicar un delta en los intervalos se habla de un infinitesimal, porque yo podría tomar precisamente un intervalo muy pequeño. Es lo que yo hago en realidad en la parte de límite. Cuando yo hablo de límite cuando x tiende a de una función evaluada en x eso me da una función evaluada en el punto a quiere decir exactamente que yo tengo x perteneciente al intervalo a menos delta, a más delta, que significa que h(x) pasa a formar un intervalo h(a) menos épsilon, h (a) más épsilon. El límite aplicado en esta sección para los intervalos seria hacer tender el delta a cero y tal que el épsilon tiende a cero. Yo estoy tomando el delta infinitesimal para que el épsilon también sea infinitesimal, entonces si yo tengo el límite cuando x tiende a a de h(x) me da h (a)*

El alumno al finalizar el curso de Análisis Matemático I piensa en la idea de la noción de infinitesimal asociado a una función al estilo de los matemáticos Cauchy y Weierstrass. El alumno asocia delta y épsilon en los intervalos a los infinitesimales, pero ese delta va tendiendo a cero para que épsilon tienda a cero. Percibimos que con esta forma de entender al épsilon y al delta a través de un límite, el estudiante concibe el infinitesimal asociado a una función como se acaba de afirmar al inicio de este párrafo.

*Acerca del uso del infinitesimal por parte del estudiante en las preguntas del cuestionario definitivo***.** En la entrevista 1 y 2 se pregunta al alumno si en los problemas que trabaja en el cuestionario usa la noción de infinitesimal, y en caso afirmativo, se quería saber, ¿en cuál? y que explicara el ¿por qué?.

En la primera entrevista el alumno indica que trabaja la idea de infinitesimal en las preguntas 1a), 4 y 8. Afirma que en la pregunta 1a) el infinitesimal es el diferencial, el diferencial de distancia. Indica que en la pregunta 4, el infinitesimal es *dy*, *dx* y que es lo que ~~ella~~ entiende por infinitesimal. En el problema 5 agrega a la respuesta del CD, que puede tomar a *1/n* como épsilon, como la cantidad positiva, y que ese *1/n* sería un número muy pequeño y la diferencia *a-*

b estaría tendiendo a un infinitesimal, como se puede ver en el siguiente fragmento de la entrevista

E: Recuerdas ¿en cuáles usaste la noción de infinitesimal?
A: Uh!!, para calcular el área de la figura
E: ¿En dónde?
A: En la figura 1a)
E: ¿Dónde está la idea de infinitesimal en ese problema?
A: El infinitesimal es el diferencial, el diferencial de distancia.
E: ¿Puedes relacionar algún tema que estudiaste en la Unidad I con la pregunta 5 del cuestionario?
A: Si, la convergencia de sucesiones. Si yo tomo a a y b como elementos de una sucesión, si es una sucesión convergente, yo los puedo hacer menor que 1/n y puedo hacer n tender a infinito para que esos números converjan uno al otro.
E: ¿Podrías explicar si usaste la noción de infinitesimal en esos elementos?
A: porque como estaba diciendo uno puede venir y hacer 1/n, tomar ese 1/n como épsilon, como la cantidad positiva que decía ahorita, entonces este épsilon será un número pequeño. Y el a-b estaría tendiendo a un infinitesimal.

El alumno alude a la idea de la noción con conceptos formales y aunque no muestra una definición, argumenta el significado que otorga a partir de estas ideas formales de sucesión y límite de una sucesión. Percibimos que muestra una variedad de ideas acerca de la noción: es un diferencial, una diferencia, una cantidad pequeña y un épsilon.

En la segunda entrevista, el estudiante alega que usa la idea de infinitesimal en el problema del cálculo de área del círculo, en el problema dos (pregunta 2) acerca de la relación entre los volúmenes del cono y del cilindro, y en la pregunta 7. Cambia todas las respuestas que emite en el CD.

Para el cálculo del área del círculo afirma que lo puede entender como el límite de una sucesión de polígonos y que aumenta el número de lados del polígono haciéndolos infinitesimalmente pequeños hasta que se vaya formando el círculo (dibuja los momentos por donde pasa el polígono para llegar a ser un círculo). El área del círculo la calcula por inducción a través del uso de una función que dependa del número de lados del polígono; es decir usa la función $f(x) = 1/x$ con $x \geq 3$. Finalmente demuestra que ese número de lados tiene alguna relación con el radio del círculo, siendo el área del polígono para $k+1$ lados $(k+1)^2$ por una constante d. Al preguntársele dónde estaría la idea de infinitesimal, el alumno afirma que en el número de lados infinitesimalmente pequeños.

Para explicar cómo emplea la idea de infinitesimal en la búsqueda de la relación entre el volumen del cono y del cilindro, el alumno indica que lo haría con el método de las aproximaciones. Afirma que puede aproximar el cono al cilindro, o viceversa, a través de anillos de diferentes radios y que la relación la encontraría usando límite del volumen de ambos sólidos, agregando discos y usando un diferencial de radio.

Para la pregunta 7, el alumno cambia las respuestas que emite en el CD. Afirma que la expresión i) no le parece razonable. La expresión ii) le parece razonable ya que puede aplicar la definición de derivada que vio en Cálculo y la expresión iii) también le parece razonable porque sería aplicar la definición épsilon-delta de límite, para la función derivada.

A continuación se muestran fragmentos de la entrevista que ilustran las ideas del estudiante:

A: Para calcular el área yo puedo empezar con un polígono de 8 lados y luego de ese yo puedo utilizar otro con más lados y así sucesivamente yo voy aumentando el número de lados hasta que en un momento yo voy a tener un polígono con un número muy grande de lados y entonces esta distancia, no se si llama lado esta distancia (muestra en el dibujo el lado muy pequeño del polígono) esta distancia que hay entre los puntos que tocan los puntos de la circunferencia que está por fuera, estos puntos la distancia se va haciendo más pequeña. Entonces llega un momento que cuando el número de lados es muy grande, yo puedo considerar esta distancia como puntos muy seguidos y utilizarlos para aproximar la forma continua que sería el círculo.
E: ¿Y cómo lo escribirías con los conocimientos que has visto en la unidad II?
A: Yo podría decir, para decir que esto tiene como límite esto (muestra la gráfica de los polígonos acercándose al círculo), yo podría definir una función que dependa del número de lados, como $f(x) = 1$ sobre el número de lados, $1/x$ con $x \geq 3$ porque el polígono de menor lados que puede caber dentro del círculo es el triángulo, tiene tres lados. Luego que yo tengo $x > 3$, la función $1/x$ le voy aumentando el número de lados, la función se va acercando a cero, ¿qué quiere decir esto?, que la función, esta es la función de los lados $f(x)= 1/k$.

Finalizado el curso de Análisis Matemático I se puede apreciar que el alumno sigue mostrando una variedad de esquemas conceptuales asociados a la noción y que puede trabajar con uno u otro idea indistintamente. Se percibe que los que muestra en el CD algunos evolucionan (de diferencia a función), otras cambian (la idea asociado a razón al estilo de Demócrito a razón geométrica al estilo de Hipócrates y Eudoxio) y se matizan para enriquecerlos. Esto nos hace pensar que el estudiante a la hora de construir sus esquemas conceptuales emplea una ruta de aprendizaje que no es sólo formal, ni sólo informal, como aparece en la aproximación teórica, sino en una ruta que llamamos mixta.

Acerca del cambio o matiz de la noción de infinitesimal que muestra el alumno en el cuestionario y en cada entrevista. En la entrevista 1, 2 y 3 se le recuerda al estudiante que hay una pregunta particular~~,~~ en el listado de preguntas del cuestionario y en cada una de las entrevistas. Se le solicitó que escribiera qué significa para él, la noción de infinitesimal. Seguidamente se hace referencia a la pregunta 3 del guión de las dos primeras entrevistas y a la pregunta dos del guión de la tercera.

En la primera entrevista el alumno expresa que sigue estando de acuerdo con la idea que mostró en el CD. Se da cuenta que en su definición inicial le falta algo. Afirma que la expresión "muy cercano" es ambigua. Indica que debería definirse lo que se considera "muy cercano" pero en un sentido global. Continúa afirmando que si se trabaja con el épsilon como una cantidad positiva que se puede hacer tan pequeña como se quiera, esto sería muy ambiguo. Considera que tendría que agregarse una definición de la expresión "tan pequeña como se quiera" o de la expresión "muy cercano" a través de una sucesión que tienda al cero.

El siguiente fragmento pone en evidencia las ideas del alumno:

E: ¿Por qué sigues estando de acuerdo? ¿Cómo ratificas o reconfirmas la idea?
A: Después de haber visto lo que uno ve en Análisis Matemático uno puede decir que a la definición le falta algo porque nunca para una persona "muy cercano" no es muy cercano para otro. Entonces uno tendría que definir algo muy global, lo que se considera como algo muy cercano. Si trabajamos con el épsilon, una cantidad positiva pero una cantidad que se puede hacer tan pequeña como se quiera es muy ambiguo, porque cualquier persona puede tomar un número y otra persona tomar un número más pequeño o uno mayor no sé. Dependiendo de ahí, uno puede decir si un infinitesimal es una cantidad muy pequeña pero como es una cantidad muy pequeña, tendría que agregarse una definición de ahí, de sucesiones, que tiende al cero y que la diferencia entre cada término sea menor que un número muy muy pequeño también.

En la primera entrevista el alumno manifiesta estar de acuerdo con la idea que muestra en el CD pero reflexiona acerca de épsilon como una cantidad positiva que se puede hacer tan pequeña como se quiera. Piensa el alumno sobre esa connotación para épsilon, como ambigua. Percibimos que el alumno capta un carácter informal en la idea y precisa la misma a través de la definición de sucesión. Esto nos hace corroborar que el alumno usa una ruta de aprendizaje mixta para argumentar y demostrar. Monitorea su pensamiento al reflexionar sobre épsilon. Luego alude a los conceptos formales que como bien podemos ver no define pero usa para otorgar significado a la noción de infinitesimal.

En la segunda entrevista, el alumno afirma que tiene un matiz distinto para la idea del infinitesimal. Matiz otorgado por la definición de continuidad uniforme. Indica que tendría infinitesimales distintos en el conjunto de las preimágenes y en el conjunto de las imágenes. Considera que usaría otro ejemplo para ilustrar la idea. Muestra el ejemplo de la función $f(x) = x$. Explicita que es más claro y preciso explicar la idea de infinitesimal a través del estudio de las funciones continuas a través de sucesiones de puntos. Explica que si toma un punto de la gráfica y le hace un Zoom se podrá ver que no es un punto sino un segmento de recta porque siempre van a existir puntos a los lados, y que van a estar muy cercanos y esa distancia entre ellos es el concepto de infinitesimal. Afirma que explicaría esta idea con el ejemplo de la gráfica de la función identidad ya que un alumno de Cálculo I entiende que esa gráfica, es una recta.

El estudiante en esta segunda entrevista, matiza el significado que otorga a través del uso de la definición de continuidad uniforme. El infinitesimal sigue siendo un épsilon pero como una distancia entre puntos, puesto que, percibe a la función como una sucesión de puntos que converge, y que un punto de la sucesión "mirándolo" con la continuidad uniforme, puede ser un segmento de recta. Este matiz le permitiría explicitar a otros estudiantes del curso de forma más precisa, la idea del infinitesimal como épsilon o delta.

En la entrevista tres, el alumno afirma que encuentra un nuevo matiz para la noción de infinitesimal en la definición de integral. Alude al Teorema Fundamental del Cálculo para explicar el cambio de esta idea. Escribe $\int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a)$ y explica que esa integral es exactamente la función evaluada en el punto *b* menos la función evaluada en el punto *a*. Sigue argumentando que para hablar de igualdad tiene que hablar de una cercanía. Escribe y explicita la idea anterior con la expresión $\left|\int_a^b g'(x)dx - (g(b) - g(a))\right| < \varepsilon$. Considera que para asegurar que el valor absoluto de la diferencia entre la integral y el valor de *g(b)-g(a),* debería probar que esa diferencia es un épsilon, infinitesimal. Continúa explicando que la función evaluada de esa forma estaría muy cercana al valor del área bajo la curva. Afirma que no tendría que calcular la integral sino solamente evaluar la función y encontrar el épsilon, arbitrario.

Finaliza su argumento al explicar que por aproximación sería casi igual la diferencia entre la integral y el valor de *g(b)- g(a)* con el épsilon ya que podría hacer tender el épsilon tanto a cero, que podría asegurar que $\int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a)$. La entrevistadora pregunta que si el épsilon es cero. El alumno afirma que no, pero que se podría considerar cero porque es infinitamente pequeño. Explicita que el cero no tiene un valor neto sino que se puede considerar ese cero como un límite de varias aproximaciones muy cercanas a cero.

Finalizado el curso de Análisis Matemático I, percibimos que el alumno muestra una definición semejante a la otorgada por Cauchy para el infinitesimal donde usa la definición dinámica de límite y por ende de un infinitesimal: Según Kleiner (2001) "cuando en una expresión aparecen cantidades infinitesimales, dichas cantidades no son cero, pero sí lo son sus límites" (p. 170). Significado que el estudiante otorga asociado al Teorema Fundamental del Cálculo. El alumno alude a la idea de infinitesimal en su dualidad estática y dinámica, asociada a una función. El infinitesimal está asociado a un épsilon pero que es cero a través del límite de varias aproximaciones muy cercanas a cero.

CONSIDERACIONES FINALES

Del análisis de las respuestas a las entrevistas de los alumnos clave, en particular del alumno (2) se han encontrado esquemas conceptuales asociados a la noción y que se construyen producto de la evolución de los esquemas conceptuales previos y que encontramos antes de que el estudiante se pusiera en contacto con una teoría matemática formal del curso de Análisis Matemático I.

Afirmamos que así como los esquemas conceptuales epistemológicos no se mantienen sino que evolucionan y se enriquecen producto de la experiencia y significados que los matemáticos a lo largo de la historia otorgan a la noción, similarmente los esquemas conceptuales del estudiante clave evolucionan y se enriquecen a través de los axiomas, teoremas, definiciones y propiedades introducidas en el curso de Análisis Matemático I, y de la interacción entre las ideas formales e informales y las ideas previas asociadas a la noción, adquiridas en los cursos anteriores (Cálculo I, Cálculo II, Cálculo III, Cálculo IV, etc.).

El esquema conceptual previo asociado a la noción de infinitesimal del alumno clave que encontramos en el CD, evoluciona para acomodar la idea de la noción. Las ideas de la noción las asocia a una función, diferencia y a un indivisible. La idea asociada a una razón al estilo de Demócrito y a un incremento, no emerge a lo largo de las entrevistas. Aflora una nueva idea, el infinitesimal asociado a una razón pero al estilo de Hipócrates y Eudoxio.

Las ideas formales como las definiciones y teoremas donde el estudiante alude a la noción de infinitesimal son las de continuidad, continuidad uniforme, integral, integral por aproximaciones, sucesiones, el Teorema Fundamental del Cálculo y Regla de la Cadena para Derivadas. También asocia la noción, a algunas ideas informales como por ejemplo el punto en una gráfica a través del uso del lenguaje natural (un *Zoom para "mirar" los puntos*).

El estudiante (2) alude a la idea de la noción con una concepción dual- dinámica, asociada a la definición dinámica de límite y estática, relacionada a la definición épsilon-delta de límite. Por ejemplo expresa que *en el límite de una sucesión de valores que se aproximan a cero, es cero* *o bien el cero se puede considerar como un límite de varias aproximaciones muy cercanas a cero* pero en otras argumentaciones ese mismo alumno afirma *es épsilon o delta, el épsilon como* $|f(x)-f(y)|$ *y delta como* $|x-y|$.

En un tercer y cuarto momento se matiza el significado. El infinitesimal es considerado una variable y un número real delta o épsilon pero con el agregado de la propiedad que define Cauchy, mostrada por Kleiner (2001): "Cuando en una expresión aparecen cantidades infinitesimales, dichas cantidades no son cero, pero sí lo son sus límite*s*", justificando así no el que se desprecien sino que, en ese momento, se les iguale a cero. Los infinitesimales "no son cantidades muy pequeñas, sino variables *(x)* o funciones *h(x)* que cumplen una propiedad: su límite, cuando x tiende a cero, es cero" (p. 151). Esta propiedad no impone impedimento alguno al valor numérico que puede tomar esa variable o función. Se aprecia que esta forma de interpretación hace que el estudiante pueda pensar de una manera mixta y usar la noción en cualquier sentido sin dejar de razonar formalmente.

Análogamente la idea de infinitesimal asociada a un indivisible y a una razón evoluciona. Pensamos que se deba al uso de uno de los métodos básicos de razonamiento en el Análisis Matemático I: la aproximación. Alude a la noción a través de definiciones formales asociadas, definiciones que requieren del infinitesimal para su comprensión como lo es, integral, integral por aproximaciones, sucesiones, entre otras.

El estudiante (2) por ejemplo indica que puede calcular el área del círculo con el límite de una sucesión de polígonos. Indica que puede aumentar el número de lados de los polígonos y hacer lados infinitesimales hasta obtener un círculo. Ese pensamiento muestra cómo se usa la idea de noción asociada a una razón geométrica al estilo de Hipocrates y Eudoxio.

Finalmente, percibimos que en el estudiante (2), el esquema conceptual asociado a la noción de infinitesimal está cargado de representaciones, conceptos asociados, ideas, ejemplos y representaciones que guardan entre si conexiones y asociaciones con el contexto y la situación donde emergen. Se ha encontrado que ese esquema crece, se enriquece y se matiza cuando el sujeto está en contacto con teoremas, definiciones y ejemplos que requieren de esa noción para su conceptualización, a través de una ruta de aprendizaje mixta. Así mismo notamos que el esquema conceptual se ve influenciado por las ideas dinámica, estática y una que hemos llamado dual, de la definición de límite. Pensamos que esa definición en particular así como las que la requieren hace que el estudiante otorgue un significado muy particular al infinitesimal, lo asocia a una función desde una dualidad.

Las ideas formales como las definiciones y teoremas donde el estudiante alude a la noción de infinitesimal son las de continuidad, continuidad uniforme, integral, integral por aproximaciones, sucesiones, el Teorema Fundamental del Cálculo y Regla de Cadena para derivadas. También la asocia a algunas ideas informales como por ejemplo el punto en una gráfica a través del uso del lenguaje natural (*un zoom para "mirar" los puntos*)

Interpretamos que el alumno al explicar la idea de infinitesimal como épsilon, usa la propiedad que permite llegar a la igualdad. El estudiante no expresa en sus argumentos la ambigüedad que mostraron los matemáticos anteriores a Cauchy y que trabajaron con la noción a lo largo de la historia.

El alumno muestra una definición semejante a la otorgada por Cauchy para el infinitesimal (como ya hemos explicitado), donde usa la definición dinámica de límite. Recuerda el estudiante que cuando en una expresión aparecen cantidades infinitesimales, dichas cantidades no son cero, pero lo son sus límites, justificando así que, en ese momento, se les iguales a cero, tal como lo hizo el estudiante en la expresión:

$$\left|\int_a^b g'(x)dx-(g(b)-g(a))\right|<\varepsilon$$

Finalmente se percibe que el alumno clave construye las propiedades y características del objeto matemático infinitesimal a partir de la interacción de las definiciones formales con las ideas informales. Esto nos hace pensar en una ruta de aprendizaje mixta que usa el alumno al construir sus esquemas conceptuales asociados a la noción. A continuación se exponen la caracterización de uno de los esquemas conceptuales asociados a la noción de infinitesimal del estudiante y que se categoriza como esquema conceptual formal.

Ideas: a) formales: épsilon; delta, épsilon es cero pero como un límite de varias aproximaciones muy cercanas a cero, la diferencia entre la integral de la función y el valor g(b)-g(a),
Representaciones asociadas a la noción: *ε, δ,* $\left|\int_a^b g'(x)dx-(g(b)-g(a))\right|<\varepsilon$.

$\int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a)$, *(a + δ, a-δ), (h(a) –ε, h(a) +ε).*
Representaciones que hacen emerger la noción: la gráfica de la función $f(x) = x^2$.
Conceptos asociados: a) formales: integral definida, derivada, continuidad, función composición, dominio, función bien definida, valor absoluto.
Contexto: aritmético y analítico.
Procedimientos: a) Analítico: demostrar el teorema regla de la cadena, usar Teorema Fundamental del Cálculo, b) Aritmético: sumar y restar números reales, aplicar propiedades del valor absoluto para integral y para límite.
Ejemplos: a) Analítico: Regla de la Cadena para derivadas, el Teorema Fundamental del Cálculo, función continua.

Como se viene explicitando, se han asumido dos rutas de aprendizaje que utiliza el estudiante al construir los esquemas conceptuales asociados a la noción de infinitesimal. La ruta informal la muestra el estudiante cuando basa los argumentos de la situación matemática planteada usando un caso particular (un ejemplo particular) y la ruta formal cuando el estudiante basa sus argumentos en las definiciones. Hasta ahora en la literatura, empíricamente sólo se habían encontrado y caracterizado, rutas formales e informales (Pinto, 1998; Pinto y Tall, 1999, 2001; Tall, 2001). Sin embargo se ha encontrado en este estudio empírico, una vía mixta. Esta ruta de aprendizaje mixta la muestra el estudiante clave ya que al basar sus argumentos en definiciones y teoremas apela a menudo a ejemplos particulares o gráficas a medida que desarrolla las definiciones o teoremas.

Percibimos en las entrevistas, que el alumno alude a las ideas informales y las pone a interactuar con las ideas formales para esbozar formalmente un teorema o definición operable. El estudiante puede llegar a hacer deducciones formales invocando ideas informales, intuitivas y las pone a interactuar con las definiciones formales asociadas a la noción de infinitesimal, llega de esa manera a desarrollar demostraciones y definiciones donde se pone en juego el objeto matemático en estudio. Encontramos que este estudiante enriquece sus esquemas conceptuales y en contacto y experiencias con la teoría formal, el esquema evoluciona a uno formal vía una ruta de aprendizaje mixta. En síntesis se puede inducir que el estudiante clave vía rutas mixta y formal puede llegar a demostrar teoremas.

REFERENCIAS

Azcárate, C. (1992). Estudio de los esquemas conceptuales y de los perfiles de alumnos de 2º de BUP, en relación con el concepto de pendiente de una recta. *Epsilon*, 24, 9-22.

Blumer, H. (1982). *Symbolic interactionism: Perspective and method.* Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.

Chae, S. y Tall, D. (2005). Student´s Concept Images for Period Doublings as Embodied Objets in Chaos Theory. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (volumen 2, pp. 121-132).

Chin, E. y Tall, D. (2000). Making, having and compressing formal mathematical concepts. In Nakara, T. & Koyama, M. (Eds.), *Proceedings of the 24th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (volumen 2, pp.177-184).

Chin, E. y Tall, D. (2001). Developing Formal Mathematical Concepts Over Time. In Marja Van Den Heuvwel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations* (volumen 4, pp. 241-248). Utrecth,The Netherlands.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: modéles spontanés et modéles propres', Actes du Cinquiéme Colloque du Groupe Internationale PME (pp. 322-326.). Grenoble.

Cornu, B. (1983). Quelques obstacles á l'apprentissage des notion des limite. *Recherches en Didactiqué des Mathématiques* 4, 236-268.

Cornu, B. (1991). Limits. En David. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. (volumen 1, pp. 153-166). Boston/London: Kluwer Academic Prés Dordrecht.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En Nesher, P. & Kilpatrick, J. (Eds.), *Mathematics and Cognition*, 113-134. Cambridge: Cambridge University Press.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En David Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, (volumen 1, pp. 3-21). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Garbin, S. (2000). *Infinito Actual: Inconsistencias e Incoherencias de Estudiantes de 16-17 Años.* Tesis de doctorado, no publicada, Universitat Autónoma de Barcelona, España.

Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los estudiantes entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime,* 8 (2), 169-193.

Garbin, S. y Azcárate, C. (1998). Esquemas conceptuales e incoherencias en relación con el infinito actual*. Educación Matemática*, (12), 5-18.

Harel, G.; Selden, A. y Selden, J. (2006). Advanced Mathematical Thinking. Some PME Perspectivas. En Gutiérrez, A y Boero, P. (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, (pp. 147-172). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Kleiner, I. (2001). The Infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2-3), 137-174.

Patton, M. (1990). Analysis, interpretation and reporting. In *qualitative evaluation and research methods* (pp. 182-183). London: Sage.

Pinto, M. (1998). *Students' understanding of real analysis*. Unpublished Doctoral Thesis, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick, UK.

Pinto, M. y Tall, D. (1999). Students constructions of formal theory: living and extracting meaning. *Proceedings of the 23th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations* (volumen 2, pp. 41-48). Haifa, Israel.

Pinto, M. y Tall, D. (2001). Following students' development in a traditional university classroom, in Marja Van Den Heuvwel-Panhuizen (Eds.), *Proceedings of the 25th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations* (volumen 4, pp. 57-64). Utrecth, The Netherlands.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics* 55 (1 y 3), 103-132.

Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary shoool. *Educational Studies in Mathematics,* 60 (1), 71-93.

Rodríguez, G.; Gil, J. y García, E. (1999). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.

Robert, A. (1982). L´Acquisition de la notion de convergente des suites numériques. Dans l´Enseignement Supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3(3), 307-341.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Tesis doctoral; no publicada, Universidad de Jaen, España.

Sandín, M. (2003). *Investigación Cualitativa en Educación: Fundamentos y tradiciones.* España: Mc Graw Hill.

Santamaría, J. y Valdivé, C. (2007). Esquemas conceptuales asociados a los infinitesimales en el pensamiento de los estudiantes para profesores de matemática. *Ponencia presentada en la 21 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, Maracaibo, Venezuela.

Sierpinska, A. (1985). La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des mathématiques. *Actes de la 37e Rencontre CIEAEM*, 73-95. Leiden.

Sierpinska, Anna. (1987a). Obstacles épistémologique relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactiqué des Mathématiques*, 6(1), 5-67.

Sierpinska, A. (1987b). Trying to overcome epistemological obstacles relative to limits. In *17 year old Humanities Students Proceedings of the 38th Cieaem's Meeting*, (pp. 183-193). Southampton.

Sierpinska, A. (1992). Un understanding the notion of function. In G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept function. Aspect eppistemology and pedagogy.* (pp. 25-58). USA: Mathematical Association of America.

Strauss, A. y Corbin, J. (1998). *Basic of qualitatitative research. Techniques and procedures for developing grounded theory*. London: Sage.

Tall, D. (2005). The transition from embodied thought experiment and symbolic manipulation to formal proof. *Proceedings of the Delta Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 1-16). Frazer, Island, Australia.

Tall, D. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 1-16). Bergen, Norway.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies en Mathematics*, 48 (2 y 3), 200-238.

Tall, D. (1997). Functions and calculus. In A. J. Bishop et al (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinkhing. *Proceedings of the 19th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations*, (pp. 61-75). Recife, Brasil.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking functions, limits, infinity, and proof. En Grouws, D. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 495-511). Reston: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 3-21). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1989). Concept image, computers, and curriculum change. *For Learning of Mathematics*, 9(3), 37-42.

Tall, D. (1988). Concept image and concept definition. In Jan de Lange, Michiel Doorman (Ed.), *Senior Secondary Mathematics* (pp. 37-41). Utrech.

Tall, D. (1987). Constructing the concept image of tangente. *Proceedings of PME* 11. (volumen 3, pp. 69-75). Montreal.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, whit particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Valdivé, C. (2008a). Los Infinitesimales: Un punto de vista sistémico. *Educere, Revista Venezolana de Educación* 12 (42), (pp. 523-530). Mérida, Venezuela: Fundep.

Valdivé, C. (2008b). *Estudio de los esquemas conceptuales asociados a la noción de infinitesimal y su evolución en estudiantes de Análisis Matemático I.* Tesis doctoral no publicada, Ucla, Unexpo,Upel,Venezuela.

Valdivé, C. (2006). Una experiencia en investigación-acción técnica: "el paso del infinito potencial al infinito 'como un todo' para comprender la construcción de los conjuntos infinitos. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 19, pp. 544-550). México: CLAME,

Valdivé, C. (2005). *Concepciones de los estudiantes del Decanato de Administración y Contaduría acerca de la noción de infinito.* Trabajo de ascenso no publicado, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Venezuela.

Valdivé, C. y Gabin, S. (2007). Esquemas conceptuales epistemológicos: Hacia el diseño de un cuestionario. *Ponencia presentada en el XI SEIEM*. Tenerife.

Valdivé, C. y Gabin, S. (2008). Estudio de los Esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime,* 11(3), 413-450.

Vinner, S. (1995). The fictitious empire of mathematics education and behavior of its real subjects. In *Mathematics and Music the Spheres,* Mathematics Education Research Centre (pp. 1-18). Warwick University.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In David Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-80). Dordrech, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *Internacional Journal of Mathematical in Sciencie and Technology*, 14, 293-305.

Vinner, S. (1982). Conflicts between definitions and intuitions. *Proceedings of the Delta Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (volumen 6*,* pp. 24-28). Antwerp.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366.

Vinner, S. y Hershkowitz, Rh. (1980*).* Concepts images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177-184). Berkeley: University of California, Hall of Sciencie.

Watson, A. y Tall, D. (2002). Embodied action, effect and symbol in mathematical growth. *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (volumen 4, pp. 369-376). Norwich, UK.

Watson, A.; Spyrou, P. y Tall, D. (2004). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector. *Educational Studies in Mathematics, 3,* 1-24.