Recorridos de Estudio e Investigación: UNA PROPUESTA DENTRO DE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO PARA LA CREACIÓN DE SECUENCIAS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE.

Cecilio Fonseca
cfonseca@uvigo.es
Universidad de Vigo, España

Recibido: 28 / 01 / 2011 **Aprobado:** 09/05/2011

Resumen

En este trabajo se avanza, amplía y completa un nuevo dispositivo didáctico: los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) que estamos diseñando y experimentando dentro de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Los REI aparecen como una nueva estrategia que quiere contribuir a desarrollar secuencias de enseñanza y aprendizaje que podamos trasladar a la institución escolar. Sitúan el foco del proceso de estudio de la actividad matemática en su carácter instrumental y la herramienta informática (calculadora simbólica) está pensada para favorecer ese proceso de estudio. Los REI recuperan la "razón de ser" de la actividad matemática y pretenden caminar hacia una convergencia entre los conocimientos impartidos en la escuela y la sociedad. Después de precisar la noción de REI, lo utilizaremos para crear una secuencia de enseñanza y aprendizaje en torno a la "*diagonalización de matrices"* a partir de una cuestión problemática extramatemática potente, rica y muy versátil que transita de Secundaria a la Universidad.

Palabras clave*:* Recorrido de Estudio e Investigación, secuencias de enseñanza y aprendizaje, modelización matemática, convergencia escuela y sociedad, razón de ser, diagonalización de matrices.

Trajectories of Study and Research: A PROPOSAL WITHIN *Anthropological Theory of the Didactic* FOR THE CREATION OF TEACHING AND LEARNING SEQUENCE

Abstract:

In this work we progress, extend and complete a new didactical device: the Trajectories of Study and Research (TSR) that we are designing and experimenting inside the Anthropological Theory of the Didactics (ATD). The TSR appear as a new strategy that wants to contribute with the development of sequences of teaching and learning which can be applied in the scholar institution. They put the focus of the process of study of the mathematical activity in its instrumental character and the computer tool (symbolic calculator) is designed to help this process of study. The TSR recover the "raison d'ètre" of the mathematical activity and try to walk towards a convergence between the knowledge given at school and the society. After to precise the notion of TSR, we'll use it to create a sequence of teaching and learning around the matrices diagonalization from a powerful extramathematical problematic question, rich and very versatile that goes from the Secondary School to the University.

Key words: Trajectory of Study and Research, sequence of teaching and learning, mathematical modeling, convergency between school and society, raison d'ètre, matrices diagonalization

Introducción

En el ámbito de la investigación en Educación Matemática, la modelización y las aplicaciones constituyen un dominio de investigación que no ha dejado de crecer intensamente en los últimos años. El estudio del ICMI (1986) supuso un impulso mundial a la inclusión, en los currículos de matemáticas, de cuestiones relacionadas con las aplicaciones de las matemáticas, tanto en otras disciplinas como en la “vida cotidiana” (Blum, 2002). Autores como García, Gascón, Ruiz y Bosch (2006), han señalado que la modelización ha dejado de referirse sólo a la calidad de las aplicaciones de las matemáticas para convertirse en un objeto explícito de enseñanza y aprendizaje.

El presente artículo es una producción derivada del proyecto EDU2008-02750/EDUC concedido por el Ministerio de Educación y Ciencia (España), el cual tiene como uno de sus objetivos centrales, el diseñar, experimentar y estudiar la viabilidad de un nuevo dispositivo didáctico, ubicable en el campo de la Ingeniería, que ha sido denominado **Recorridos de Estudio e Investigación (REI)**. Está pensado esencialmente para posibilitar la enseñanza de las matemáticas como una actividad de modelización en la cual los dispositivos informáticos tienen un importante protagonismo**.**

Los objetivos específicos del mencionado proyecto se orientan en las dos vertientes que se indican seguidamente; una, la investigación se propone avanzar en el diseño, experimentación y evaluación de un conjunto de Recorridos de Estudio e Investigación (REI) centrados en la enseñanza de la modelización algebraica y funcional en la Enseñanza Secundaria y primer ciclo universitario; y, dos, de manera íntimamente relacionada con la anterior, se pretende asumir como objeto central de este estudio, las condiciones de viabilidad de estos REI en los actuales sistemas de enseñanza, haciendo especial énfasis en aquellas relativas a las necesidades del profesor, tanto en las relativas al acceso a dispositivos didácticos como en las relacionadas con su formación. En síntesis, lo que se pretende es avanzar en el trabajo tanto de investigación básica como de desarrollo necesario para proporcionar al profesorado los instrumentos didácticos (teórico-prácticos) requeridos por la implementación efectiva de la enseñanza de la modelización matemática en el aula.

Esta línea de trabajo es claramente convergente con el tipo de actividades y competencias matemáticas que propugna la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), mediante las dos ediciones del informe del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (*Program for International Student Assessment*; PISA, por sus siglas en inglés) (OCDE, 2006) y que designa con el término de “matematización” (Rico, 2006; p. 5).

En este trabajo no se pretende abarcar toda esa problemática, que es muy compleja y que va a requerir de mucho tiempo, experimentación e investigación; sin embargo, sí se procura aportar una primera aproximación a partir de un proceso de estudio del diseño y experimentación de una cuestión problemática “viva” situada inicialmente a nivel de la educación secundaria española, y cuya fase final está en la Universidad.

Este artículo está dividido en tres partes; en la primera se enuncia, de una forma muy abreviada el marco teórico que ha sido asumido como referencia; en la segunda parte se utiliza dicho marco teórico para describir el diseño y el modelo particular de REI con el cual el autor está trabajando en la Universidad de Vigo (UV, España); por último, se describe brevemente uno de los REI que ha sido diseñado y está siendo experimentado actualmente.

Marco teórico

Como referente conceptual, en este estudio ha sido asumida la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard 1999; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997); una noción fundamental de esta teoría introducida por Chevallard, clave en la modelización de la actividad matemática, es la de *Praxeologia* u *Organización Matemática* (OM). La TAD considera a la matemática como una actividad más del ser humano, y utiliza, como unidad mínima de análisis de toda actividad humana, el concepto de praxeología en la cual es posible distinguir dos componentes principales, interrelacionados: la *praxis* o parte práctica, y el *logos* o razonamiento humano.

Chevallard plantea las cuestiones problemáticas (CP) como aquellas en las que no se dispone de ninguna técnica para realizarlas. Las CP generan una serie de tareas asociadas y la elaboración de una o más técnicas relativas a ese tipo de tareas; los tipos de tarea y las técnicas forman el bloque práctico-técnico, cuya requiere de la puesta en marcha de un discurso racional que justifique la pertinencia de la técnica para la tarea concreta; tal discurso es la tecnología; el mismo contiene afirmaciones más o menos explicitas, que pueden requerir justificación. Se pasa así del nivel de justificación, explicación, producción de la técnica, que es el nivel de la tecnología, al nivel de justificación, explicación, producción de la tecnología, que es el nivel de la teoría. Aparece de esta forma el segundo bloque de la OM, el bloque tecnológico-teórico. El sistema formado por esas cuatro componentes (tareas, técnicas, tecnología y teoría) es lo que en la TAD se denomina OM o Praxeología.

Así que la TAD postula que toda *actividad matemática institucional* puede modelizarse mediante la noción de praxeología (u organización) matemática. Este postulado debe ser completado con otro que se resume afirmando que toda *actividad matemática institucional* puede analizarse en términos de praxeologías matemáticas *de complejidad creciente*. A continuación se explica brevemente lo que se entiende por "complejidad creciente" de las OM, según Chevallard (1999).

1. Una *organización* (o *praxeología*) *matemática* es *puntual* (OMP) en una institución si está generada por lo que se considera en la institución como un único *tipo de tareas* T.

2. Una *organización* (o *praxeología*) *matemática* es *local* (OML) en una institución si se obtiene como resultado de la integración de diversas praxeologías *puntuales*. Una OML permite plantear y resolver problemas (o, al menos, *responder* ante ellos) que en las OMP iniciales no podían formularse con toda propiedad. Resulta, por tanto, que estas nuevas cuestiones problemáticas deberían constituir la "*razón de ser*" que dan sentido a la OML. Pero, paradójicamente, en determinadas instituciones matemáticas se produce el siguiente fenómeno: a medida que las OMP se integran para constituir organizaciones más complejas, la relación entre la *cuestión* y la *respuesta* tiende a invertirse hasta el punto que *las razones de ser* de la OM (o conjunto de cuestiones problemáticas que *le dan sentido* porque son las cuestiones a las que ésta responde) tienen tendencia a desaparecer.

3. Una *organización matemática* (o *praxeología*) es *regional* (OMR) en una institución si se obtiene mediante la coordinación, articulación y posterior integración, alrededor de una *teoría matemática* comúnΘ, de diversas OML.

En la TAD, los procesos de modelización se entienden como procesos de reconstrucción y articulación de organizaciones matemáticas de complejidad creciente, que deben partir de las razones de ser de las organizaciones matemáticas que se quieren construir.

Los Recorridos de Estudio e Investigación

Dentro de la TAD se están realizando trabajos de investigación que pretenden ampliar, diseñar y completar el modelo abierto de REI, propuesto inicialmente por Chevallard (2006); particularmente, Fonseca (2007) y Fonseca, Pereira y Casas (2009) han venido diseñando, completando y experimentando un modelo particular de REI, enmarcado institucionalmente en escuelas de ingeniería, donde estos autores despliegan su quehacer investigativo; es conveniente acotar que tanto las restricciones institucionales (rigidez en la nomenclatura, una sola técnica para cada tipo de tareas, no se interpretan las técnicas, no se invierte una técnica para llevar a cabo la tarea inversa, ausencia de situaciones abiertas) apuntadas en Fonseca (2004), y el nuevo contrato escolar que se deriva de la Declaración de Bolonia (1999) la cual contribuye a la configuración del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES; ver: http://www.eees.es/es/eees), provoca un cambio importante en el proceso de estudio, que traslada el interés desde la forma de enseñar del profesor hacia la forma de aprender del alumno.

En el desarrollo del REI ocupan un papel muy importante los *talleres de prácticas matemáticas* (Bosch y Gascon, 1995) que se desarrolla en el laboratorio; éste junto con los talleres, tiene un protagonismo cada vez mayor en el nuevo EEES, por ser un lugar elegido para realizar procesos de estudio y aprendizaje utilizando ordenadores. El modelo de taller implementado en este trabajo actúa como un estudio de ingeniería en la construcción de un proyecto, lo cual rompe con el modelo institucional propuesto de problema rígido, descontextualizado y cerrado (con disponibilidad de todos los datos para poder resolverlo).

La propuesta de REI que está siendo diseñada y desarrollada, aún está abierta y es muy posible que la propia experimentación y la investigación dentro de la TAD provoquen importantes modificaciones en su estructura final. El modelo particular de REI que está siendo trabajado en la Universidad de Vigo (UV) se articula alrededor de seis etapas:

1. *El estudio de un problema didáctico-matemático* al que tenemos que dar respuesta.

2. Una *institución* concreta en la cual se plantea el problema en cuestión.

3. *Contrato didáctico (CD)*: es el encargado de distribuir las responsabilidades en la toma de decisiones de los protagonistas del proceso de estudio (profesores, alumnos y disciplina). El nuevo CD rompe con el contrato tradicional (clase de teoría, clase de problemas, evaluación mediante un único examen final). Algunas de estas responsabilidades son:

   3.1. Se les propone a los alumnos poder retomar proyectos que pueden tener su origen en Secundaria, pero que no quedaron completamente resueltos. Les plantearemos nuevas cuestiones que provocarán la emergencia de nuevas respuestas, que dan lugar al desarrollo de nuevas técnicas que habiliten una optimización de los mismos.

3.2. El taller actúa como un estudio de ingeniería en la construcción de un proyecto. No hay un cambio continuo de problemas en el taller. Trabajamos sobre problemas abiertos, que son los que más existen en la vida cotidiana, donde a partir de una cuestión inicial muy limitada aparecen múltiples cuestiones derivadas que nos van a permitir ampliar y conectar la actividad matemática realizada.
3.3. El proyecto final obliga al alumno no sólo a actuar como tal, sino también como un futuro profesional de la ingeniería, que tiene que responsabilizarse de las respuestas a las cuestiones que se plantean. El hecho de que el estudiante para ingeniero empiece a pensar como futuro profesional puede ser una ayuda estimable para escapar del carácter mecanicista que tiene muchas veces la enseñanza universitaria de las matemáticas en instituciones como la ingeniería y puede actuar como un instrumento motivador. En esta misma línea, Camarena (2009) propugna la necesidad de que en carreras donde la matemática no es una meta en sí misma, como puede ser la ingeniería, se debe poder vincular la matemática con los problemas de la actividad laboral y profesional del futuro egresado.
3.4. Se organiza el laboratorio en pequeños grupos de alumnos; esta modalidad de trabajo puede ser una herramienta importante en el aprendizaje porque existe interacción entre ellos y además contribuye a la adquisición de competencias transversales (trabajo en equipo, aprendizaje autónomo, creatividad,…). La realización del proyecto por parte de los alumnos combinará el trabajo en aula con el trabajo fuera de ella.
3.5. El material o medios de que disponen los alumnos, además del conocimiento matemático, deberá estar especificado. En este caso pondremos a disposición de los alumnos:
   3.5.1. La herramienta informática, que tendrá un fuerte protagonismo para el estudio de la actividad matemática. Se utilizará un paquete de cálculo simbólico no como un fin, sino como un medio que facilite la creación de secuencias de enseñanza. Estos paquetes son muy económicos cuando trabajamos con registros numéricos y gráficos, nos permiten hacer conjeturas y poder centrarnos en algunas tareas que no tienen cabida en una clase normal. El uso de las calculadoras simbólicas en la enseñanza (Artigue, 2002) si se administra adecuadamente, contribuyen positivamente al desarrollo de una actividad matemática rica basada en el estudio de problemas y la modelización
   3.5.2. Uso de las tecnologías de la información y comunicación (TIC) y la plataforma de teledocencia de la UV: TEMA, que permiten el trabajo autónomo y colaborativo entre los alumnos. Esta metodología fomenta que el alumno se dé cuenta de que un problema se puede resolver correctamente de formas distintas, se propicia el debate entre los alumnos sobre la idoneidad o no de las soluciones propuestas y, en general, el respeto por las opiniones de los compañeros.
3.6. El Taller de prácticas tendrá un peso importante en la nota final de la asignatura.

4. *Razón de Ser*: el CD institucional en la Universidad para el estudio de una OM sitúa el bloque tecnológico-teórico en el origen de la actividad matemática, mientras el bloque práctico-técnico es considerado como una *actividad secundaria*, juega un papel *auxiliar en el aprendizaje de las teorías*. Muy raramente los elementos tecnológico-teóricos vienen a responder a cuestiones o a necesidades que han surgido en el desarrollo del trabajo de la técnica. Normalmente la “relación” que se establece entre ambos bloques es bastante artificiosa y muy unilateral por cuanto que el bloque práctico-técnico sirve únicamente para *aplicar*, *ejemplificar* o *consolidar* los conceptos teóricos o para *motivarlos*, *introducirlos* o *justificarlos* y termina por construir problemas muy cerrados. Esta separación funcional entre ambos bloques –y la consiguiente dificultad para conectar el bloque práctico-técnico de la actividad con la teoría cristalizada que se muestra a los estudiantes–

se pone de manifiesto, por ejemplo, en la *ausencia de las cuestiones problemáticas* que constituyen la "razón de ser" de la actividad matemática (definiciones, teoremas, propiedades y técnicas que constituyen la OM que queremos estudiar). En la TAD en el estudio de una nueva OM debemos justificar cuál es su origen, qué contenidos propone la sociedad para su estudio y cuál es su ámbito de aplicación (donde podemos utilizarla), esto se traduce en el estudio:

4.1. *Legitimidad matemática*: la TAD entiende la actividad matemática como una actividad humana más y por lo tanto, la posibilidad de conocer en qué momento histórico aparece una noción determinada, y en qué contexto lo hace puede ser una buena fuente de motivación para los estudiantes, porque aparece como algo que forma parte de la actividad humana.
4.2. *Legitimidad social*: aquí debe figurar el diseño curricular, y los diferentes medios de comunicación y difusión, tales como libros de texto, apuntes, páginas web, que permiten extender el trabajo realizado en el aula.
4.3. Legitimidad funcional: En el inicio de construcción de la nueva OM plantearemos a los alumnos el estudio de respuestas a cuestiones problemáticas (CP) cruciales, potentes, ricas y fecundas, con un fuerte poder generador, que permitan hacer visible el contenido matemático vinculando la actividad matemática con verdaderos problemas de ingeniería y que den lugar a proyectos que están incompletos con la actividad desarrollada hasta ese momento.
4.4. *Legitimidad didáctica: e*l contexto didáctico se sitúa en el entorno de la Ingeniería Industrial y en la actividad matemática prima el carácter funcional. Tendremos en cuenta el perfil del ingeniero, que restricciones dificultan el proceso de estudio y cuáles son las condiciones que lo mejoran.

5. *Cuestión Generatriz (CG)*: es la que impulsa y provoca todo el proceso de estudio y se debe mantener viva a lo largo del mismo. La elección de la CG se hace a partir de las cuestiones problemáticas propuestas en la legitimidad funcional y debe provocar en los alumnos un reto que quieran aceptar.

6. Una *Organización Matemática Local Relativamente Completa* (OMLRC) descrita en Fonseca (2004) y Bosch, Fonseca y Gascon (2004), donde se genera todo el proceso de estudio de la actividad matemática con dos partes diferenciadas. Una parte relativa al proceso de construcción (ingeniería didáctica) de la propia OM que vendrá descrito en términos de los *momentos didácticos: Praxeológico Inicial* que es el mínimo equipamiento necesario para estudiar la praxeología; *Primer Encuentro* donde se delimita el sistema a estudiar y aparecen el primer tipo de tareas; *Exploratorio* del tipo de tareas y aparición de la primera técnica; *Trabajo de la Técnica* donde la técnica anterior se modifica para crear una técnica potente que permita ir ampliando el campo de problemas; *Tecnológico-Teórico* pone énfasis en los niveles de justificación de la técnica; *Institucional* que nos permita decir qué es lo importante de todo lo construido; *Evaluación* donde evaluaremos la OM construida; TIC uso de las tecnologías de información y comunicación para simplificar y completar el proceso de estudio. Esta estructura no tiene un carácter lineal, sino que son aspectos que se integran en los procesos de estudio de un campo de problemas. En la otra parte aparece el resultado del producto construido (ingeniería matemática) articulado alrededor de ocho indicadores asociados a objetivos concretos:

6.1. *OML1*. Los tipos de tareas que conforman la OM están relacionados entre ellos y existen tareas relativas al cuestionamiento tecnológico dentro de la propia OM.

6.2. *OML2*. Existencia de diferentes técnicas para cada tipo de tareas y es posible discernir criterios para elegir entre ellas.
6.3. *OML3*. Los ostensivos (palabras, expresiones, escrituras, notaciones, etc.) que constituyen la "materia prima" de los elementos de la OM son suficientemente ricos y variados como para permitir diferentes representaciones de la actividad matemática·
6.4. *OML4*. Existencia de tareas y de técnicas "inversas".
6.5. OML5. Posibilidad de interpretar el funcionamiento y del resultado de la aplicación de las técnicas.
6.6. *OML6*. Carácter poco estereotipado de los tipos de tareas de la OM y existencia de tareas matemáticas "abiertas".
6.7. *OML7*. Necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas inicialmente consideradas.
6.8. *OML8.* Debe existir la posibilidad de modificar la situación inicial, considerando hipótesis más débiles que permitan la emergencia de nuevas técnicas que completen y amplíen la OM en cuestión.

Es evidente que el proceso de construcción y el producto de esa construcción no se pueden separar. Es pues a partir de ambas facetas, proceso de construcción y producto, como podemos determinar el grado de completitud de la OM. Hay que subrayar, que la noción de "completitud" es relativa. No tiene sentido hablar de OML "*completas*" ni de OML "*incompletas*". Se trata, en todos los casos, de una cuestión de grado: existen OM más o menos "completas" que otras en función del grado en que sus componentes cumplen las condiciones descritas por los indicadores OML1-OML8.

La actividad matemática articulada alrededor de una OMLRC, busca profundizar y completar el estudio de la cuestión generatriz, mediante el continuo planteamiento de cuestiones derivadas e incorporación de nuevas hipótesis sobre el sistema. Para dar respuesta a estas cuestiones emerge una nueva OM con nuevas tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

Construcción de un REI en torno a la diagonalización de matrices

En esta sección se muestra un ejemplo de cuestionamiento inicial que podría motivar el estudio universitario del álgebra lineal (el bloque práctico-técnico se convierte, contrariamente a lo que se hace en la Universidad de Vigo, en el motor del bloque tecnológico-teórico), de tal forma que la respuesta a dichas cuestiones permite generar, al menos, una OMLRC. En el REI que se presenta prima el carácter funcional de las matemáticas, transita desde la Enseñanza Secundaria a la Enseñanza Universitaria y se realizó en el curso 2010/2011.

El desarrollo del REI tiene dos etapas muy diferenciadas, en la primera se consolida la actividad matemática desarrollada hasta este momento por los alumnos con tareas familiares (forman parte de su equipamiento inicial) y, en la segunda, lo que se hace es ampliarla con nuevas tareas y técnicas que no se podían formular en la etapa anterior, lo que provoca la necesidad de movilizar nuevos saberes que van a permitir ampliar y completar la OM que estamos estudiando.

A.- Diseño y experimentación de un proceso de estudio

Por problemas de espacio, se ofrece sólo una versión muy resumida de un REI que fue experimentado en el curso 2010/2011. En este trabajo es importante destacar el "potencial" de la situación inicial considerada.

Una descripción del REI experimentado en el curso 2010/2011 sigue a continuación:

1. *Estudio de un problema didáctico-matemático***:** estudio de la diagonalización de matrices.

2. Una *institución* concreta en la cual se plantea el problema en cuestión: Escuela de Ingeniería Industrial de Vigo. Es una experiencia piloto que se ha realizado con alumnos de la especialidad de Organización Industrial. La asignatura es troncal y consta de 4,5 créditos ECTS (European Credit Transfer and Accumulation System / Sistema Europeo de Transferencia y Acumulación de Créditos; Ver: http://www.crue.org/export/sites/Crue/espacioeuropeo/documentos_FAQs/definicion_EEES/1_ECTS.pdf) a impartir en el primer cuatrimestre.

3. *Contrato didáctico*:
   3.1. Como el proceso de estudio se realiza con alumnos de ingeniería, los tipos de problemas que componen la OM están vinculados de manera realista al mundo de la ingeniería y retoman necesidades prácticas que allí aparecen.
   3.2. El proceso de construcción de la OM considerada, así como las principales técnicas matemáticas que la compongan, necesitará recurrir de manera no forzada al paquete de cálculo simbólico *Mathematica* de Wolfram Research (ver: http://www.wolfram.com/) no como un fin, sino como un medio que facilite la creación de secuencias de enseñanza. Este paquete es muy económico cuando trabajamos con registros numéricos y gráficos y nos va a permitir hacer conjeturas y poder centrarnos en algunas tareas que no tienen cabida en una clase normal.
   3.3. En la plataforma TEMA de la UV ponemos a disposición de los alumnos varios recursos: programa de la asignatura, manuales, teoría, hojas de problemas, prácticas de cálculo simbólico y cuestiones problemáticas que den lugar a desarrollos de proyectos.
   3.4. La primera sesión del taller está relacionada con el conocimiento y la familiarización de tareas a resolver con el Mathematica (ayuda, primeros cálculos, cálculo simbólico y numérico, funciones definidas por el usuario,…). La primera prueba escrita fue un cuestionario sobre el conocimiento que habían adquirido sobre el Mathematica. Considerábamos muy importante que el alumno conociese bien el instrumento informático para que pudiese trabajar de una forma autónoma.
   3.5. La clase se divide en grupos. En la calificación final de la asignatura el taller de prácticas se califica con un 40 % (*el trabajo realizado en grupo con un* 20% y una prueba individual con otro 20 % que versará sobre lo realizado en el taller). El 60% restante será una prueba final escrita.

4. *Razón de Ser*:
   - 4.1. Legitimidad matemática: se considera que una posible motivación para el uso de la diagonalización de matrices se encuentra en la simplificación del cálculo de la potencia de una matriz.
   - 4.2. Legitimidad social: los alumnos que participaron en este trabajo tenían en la plataforma TEMA de la UV: el programa oficial desarrollado en Secundaria y el programa propuesto en la Universidad, además de invitarles a consultar páginas Web relacionadas con el tema a estudiar.
   - 4.3. Legitimidad funcional: en el inicio de construcción de la nueva OM planteamos a los alumnos el estudio de respuestas a cuestiones problemáticas (CP) cruciales, potentes, ricas y fecundas. Se propone a los estudiantes predecir, a partir de una serie de datos iniciales, cómo puede evolucionar un sistema dado cuando se analiza en períodos fijos. Por ejemplo: trabajadores que se mueven en tres sucursales, fumadores y no fumadores, movilidad de distintas clases sociales, transporte colectivo, estudios de mercado, diversos grados de contaminación, distintos estados atmosféricos en una ciudad, contagio e incubación de una enfermedad, circuitos eléctricos, grados de corrosión, etc. Pero también les diremos que la diagonalización es un instrumento muy importante en el campo intramatemático (ecuaciones diferenciales, estudio de curvas y superficies, teoría de gráficas,…).
   - 4.4. Legitimidad didáctica**:** el contexto didáctico se sitúa en el entorno de la Ingeniería Industrial y en la actividad matemática prima el carácter funcional. La elección de la OM de la diagonalización de matrices se hace porque es un campo con muchas derivaciones en el mundo de la ingeniería.
5. *Cuestión Generatriz (CG*): La elección de la CG se hace a partir de las cuestiones problemáticas propuestas en la legitimidad funcional. Se abre un debate (los alumnos participan y el profesor aporta información y actúa como guía en su elección) para elegir una cuestión que sea potencialmente muy rica, que tenga un buen recorrido Secundaria -Universidad y un fuerte poder generador sobre la actividad matemática a desarrollar. La CG elegida la podemos formular como sigue:

> *Se nos pide desde la dirección de nuestra empresa información económica: por un lado, sobre tres modelos de motos que se fabrican en la terminal T en el que intervienen cuatro variables: ventas, costes, ingresos y beneficios y, por otro lado, sobre la contratación de un plan de pensiones para sus trabajadores.*

Estamos ante un problema abierto (OML6) en donde el momento exploratorio juega un papel fundamental (Van de Walle, 2001). Trabajamos sobre modelos lineales en su forma matricial. Los modelos lineales son muy importantes, porque una gran cantidad de fenómenos se comportan como lineales y tienen, como tales, un buen tratamiento con la técnica instrumental (en este caso con *Mathematica*). En todo el proceso, está presente el marco institucional en el que trabajamos, el cálculo matricial se convierte en un medio para obtener información del sistema, y sintoniza muy bien con el carácter funcional que debe tener las matemáticas en la ingeniería.

B.- Desarrollo de una OMLRC.

Primera Sesión:

Momento del Primer Encuentro: es donde se concreta la CG. Lo primero que se debe hacer es delimitar el sistema, es decir, analizar el ámbito de la realidad a modelizar y las cuestiones problemáticas a estudiar: qué datos serán fijos o constantes y qué datos serán variables. Le planteamos, de acuerdo con el contrato didáctico de Secundaria, el estudio de la CG para unos parámetros concretos dados por la empresa:

> Una empresa dispone de tres fábricas F1, F2 y F3 situadas respectivamente en tres países distintos P1, P2 y P3. En las tres fábricas se producen respectivamente tres modelos de motos M1, M2 y M3. Para cada fábrica tenemos los siguientes datos:
>
> - **Fábrica F1**:
>
> La producción (por hora) es de 20, 25 y 18 unidades de los modelos M1, M2 y M3, respectivamente.
>
> El coste unitario de cada modelo es de 1600 €, 1500 € y 2800 € para los modelos M1, M2 y M3, respectivamente.
>
> El precio de venta unitario de cada modelo en esta fábrica es de 4000 €, 3500 y 5000 €, respectivamente para cada modelo M1, M2 y M3.
>
> - **Fábrica F2**:
>
> La producción (por hora) es de 22, 21 y 19 unidades de los modelos M1, M2 y M3, respectivamente.
>
> El coste unitario de cada modelo es de 1800 €, 1100 € y 2940 € para los modelos M1, M2 y M3, respectivamente.
>
> El precio de venta unitario de cada modelo en esta fábrica es de 4500 €, 3200 € y 5200 €, respectivamente para cada modelo M1, M2 y M3.
>
> - **Fábrica F3**:
>
> La producción (por hora) es de 16, 18 y 21 unidades de los modelos M1, M2 y M3, respectivamente.
>
> El coste unitario de cada modelo es de 1900 €, 1000 € y 2120 € para los modelos M1, M2 y M3, respectivamente.
>
> El precio de venta unitario de cada modelo en esta fábrica es de 4600 €, 3100 € y 4730 €, respectivamente para cada modelo M1, M2 y M3.
>
> El trabajo diario en las fábricas se hace de la siguiente forma: en F1 se trabajan 6 horas, en F2 se trabajan 7 horas y en F3 se trabajan 8 horas.

Momento Praxeológico Inicial (MPI): es donde se plantea la mínima infraestructura praxeológica necesaria para poder estudiar la nueva OM que vamos a crear. Tiene un fuerte protagonismo en este equipamiento inicial la noción de matriz y sus propiedades. En esta primera etapa y de acuerdo con el equipamiento inicial proponemos a los alumnos tareas donde el protagonismo gire alrededor del cálculo algebraico de matrices, pero utilizando ese cálculo como un medio y no como un fin. La Cuestión Generatriz propuesta facilita esta línea de trabajo, aunque es necesario indicar que el tiempo institucional no permite, la mayoría de las veces, la familiarización con los contenidos debido a que se presenta demasiada información en muy poco tiempo. En este primer nivel, que es familiar para el alumno y de acuerdo con el equipamiento praxeológico inicial, se les plantean cuestiones que tienen que resolver con la OM de las matrices que les permita ir familiarizándose con la CG e ir aportando cada vez mayor conocimiento a nuestro proyecto. El protagonismo de la herramienta informática es importante y la utilización del programa de cálculo simbólico Mathematica se hace siguiendo el proceso que desarrolla el alumno cuando utiliza lápiz y papel. Dejamos los comandos del programa para obtener los mismos resultados para resolver fuera del aula.

A continuación se explicitan algunas de las tareas propuestas (TP):

TP1: Tipos de tareas que tienen que ver con la nomenclatura: simboliza la producción (PR), el coste (PC) y el precio de venta (PV) mediante una matriz.

TP2: Tipos de tareas que tienen que ver con la producción: ¿cuál es la producción a las dos horas de la fábrica Fi?; ¿cuál es la producción total de las tres fábricas por día?; construir un modelo matemático que nos de la producción total por día y otro modelo matemático que exprese la producción diaria si el número de horas trabajadas en cada fábrica es variable.

TP3: Tareas relacionadas con el coste: Calcula e interpreta el elemento de la matriz costes que está en la fila 1, columna 3; calcula la segunda columna de la matriz costes e interpretala; cual es el coste del modelo M1 en las tres fábricas; construcción del modelo si aumentamos el coste en un porcentaje determinado en una fábrica y lo disminuimos en las otras dos.

TP4: Tareas relacionadas con los ingresos: ¿cuáles son los ingresos (en euros) producidos por la venta de motos del tipo T1?; ¿cuáles son los ingresos (en euros) producidos por la venta de motos del tipo T1 en las tres fábricas? ; calcula e interpreta la matriz ingresos.

De forma análoga se trabaja con los beneficios.

En esta primera sesión el alumno se familiariza con el proyecto a estudiar, aporta información sobre las cuatro variables que demanda la empresa y nos permite consolidar la OM de las matrices. La mayoría de este proceso se realiza fuera del aula.

Segunda Sesión:

La necesidad de ampliar y completar el conocimiento del sistema propuesto permite avanzar hacia el segundo nivel de complejidad del REI, que se sitúa en la Universidad. En este nivel, el MPI se completa recordando tareas relacionadas con la matriz asociada a una aplicación lineal, la noción de limite, la noción de probabilidad, ecuaciones en diferencias y la noción de matriz de transición (estas dos últimas fueron introducidas por primera vez para poder seguir el proceso de estudio a desarrollar). La CG se reformula en la Universidad en la forma siguiente:

> *En la actualidad, en la empresa hay tres planes de pensiones A, B y C disponibles para los empleados. Un empleado solo puede utilizar un plan a la vez, y puede cambiar de uno al otro al final de cada año. La probabilidad de que alguien en el plan A continúe con él es del 20 %; de que elija el plan B es del 50 % y de que elija el plan C es 50 %. La probabilidad de que alguien que está en el plan B continúe al año siguiente en el plan B es de un 50 % y de que pase al plan A es de otro 50 %. De las personas que están en el plan C, la probabilidad de que continúen con el plan C es de un 50 % y de que elijan el plan A es de otro 50 %. La empresa quiere tener información de cuál es la trayectoria de este plan de pensiones con el paso de los años.*

Se está ante un sistema económico dinámico que, posiblemente, no puede ser respondido en la Enseñanza Secundaria, por no contemplarse allí el desarrollo de las competencias necesarias para sus solución. La reformulación de la cuestión generatriz en la Universidad daría lugar a nuevas tareas (TU_X) y nuevas técnicas que no se pueden formular con la actividad matemática desarrollada. Describiremos sólo alguna de ellas:

$$MT = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0.6} & \mathbf{0} & 0.5 \end{pmatrix}$$

TU_1: El primer tipo de tareas que se propone es pasar del lenguaje verbal al lenguaje simbólico

(matriz de transición MT)

TU_2: Interpretar (OML.5) la matriz MT correspondiente a la siguiente interrogante: ¿qué plan gana clientes y cuál pierde clientes?.

<u>Momento Exploratorio:</u> es el momento durante el cual se explora un tipo de problemas intentando construir una técnica. Poyla (1954) primeramente señala la necesidad de enseñar a conjeturar a los alumnos y después dejarles aprender a demostrar.

Se les propone a los alumnos (el profesor sirve de guía) hacer una travesía con los planes de pensiones a medida que pasan los años. Por ejemplo, se les proponen tareas del tipo:

TU_2: Si una persona tiene un el plan de pensiones A, ¿qué probabilidad tiene de mantener el mismo plan de pensiones cuando pase un año?, ¿y de qué cambie al plan B?.

TU_3: Si una persona tiene el plan de pensiones B ¿qué probabilidad tiene de mantener el mismo plan de pensiones cuando pasen dos años ?, ¿y de qué cambie al plan C?

TU_4: Se plantean problemas en los que se parte de una distribución inicial determinada: supongamos que al iniciar el estudio vemos que el plan A tiene un 20 % de mercado, el plan B tiene un 35 % y el plan C tiene el 45 %. ¿Qué ocurre cuando pase un año?, ¿y cuando pasen dos años?.

Todas estas tareas, que pueden ser resueltas con la técnica de bolígrafo y papel y que son realizadas por los alumnos (en grupos de cinco) empiezan a tener un coste considerable cuando se quiere saber qué ocurre con esa distribución cuando pasen n ($\geq$3) años. A partir de este momento el protagonismo del *Mathematica* juega un papel fundamental. Utilizando como instrumento "natural" del trabajo matemático este software de cálculo simbólico, se consigue realizar un trabajo experimental suficientemente rico (probando una gran cantidad de casos concretos) para poder formular hipótesis respecto a la trayectoria que se quiere estudiar (OML7). La utilización de los registros numérico y gráfico (OML3) le va a permitir hacer conjeturas y ofrecer información futura sobre los planes de pensiones cuando pasen n años y comprobar que si n aumenta indefinidamente el plan de pensiones se tiende a estabilizar (A, B, C) $\approx$ (0.39, 0.15, 0.46), es decir, a largo plazo el plan más popular es el plan C, y B el menos demandado. La obtención de respuestas, aunque sean provisionales, es el interés principal de este momento.

Haremos un primer cuestionamiento tecnológico (OML8): ¿qué ocurre en el sistema si variamos las condiciones iniciales?; ¿qué repercusiones tiene sobre el sistema un cambio en los parámetros?; ¿qué sucede si la empresa modifica la distribución inicial, por ejemplo X_0=(0.3, 0.4, 0.3)?; ¿cuál sería la interpretación (OML6) de los resultados obtenidos en el plan de sistema de pensiones?; ¿se equilibra el plan de pensiones?; ¿se obtiene un nuevo punto fijo?.

Haremos después un segundo cuestionamiento tecnológico: ¿qué sucede si la empresa modifica ahora la matriz de transición inicial MT?; ¿se equilibra el plan de pensiones?; ¿se obtiene un nuevo punto fijo?

Los alumnos discuten en el grupo y comprueban que en el primer caso no hay variaciones, mientras que en el segundo el sistema se estabiliza en torno a otro punto fijo distinto.

Una vez obtenidos los resultados abrimos un debate sobre los registros numéricos y gráfico, estudiando debilidades y fortalezas de ambos registros (OML2). El profesor sirve de guía para que se vea que todo este trabajo realizado en el Momento Exploratorio aporta información al sistema, pero solo es una hipótesis. Aparece de esta forma como desarrollo natural del momento exploratorio y como origen de nuevas necesidades teóricas el:

Momento del Trabajo de la Técnica: el desarrollo progresivo de la técnica debe mejorarla, generando técnicas nuevas, cada vez más potentes, que nos permitan ir ampliando el campo de problemas (Fonseca, Bosch y Gascón, 2010). Construiremos primeramente el modelo matemático ($X_n=MT^n.X_0$) y el paso siguiente es manipularlo, para obtener información. Los alumnos asumen que los cálculos se complican cuando n es grande. La necesidad de dar una respuesta a esta cuestión simplificando el proceso, es decir, disminuyendo el coste y aumentando el rigor (OML1), provoca la aparición de nueva actividad matemática y se convierte en la “razón de ser” de la aparición de una nueva técnica matemática denominada *diagonalización de matrices*. Todo ello provoca un importante trabajo de la técnica (Fonseca, Casas e Insua, 2009), que lo que hace es movilizar nuevos conocimientos matemáticos que situamos en el saber tales como, las nociones de *vector propio, valor propio, subespacio propio, matriz de paso y matriz diagonal*, que van a permitir usar esa información (saber hacer) para dar una respuesta rigurosa a nuestro proyecto. Aunque sólo mostramos aquí el cálculo de las potencias sucesivas de una matriz de transición, el caso general de una matriz M cualquiera muestra que hay una expresión simple para calcular directamente M^n si M es una matriz diagonal. La justificación de este desarrollo teórico lo haremos en el *Momento Tecnológico-Teórico*

El modelo creado es extrapolable a otros contextos que figuran en la legitimidad funcional. Utilizando este modelo, los alumnos desarrollan en el taller de prácticas proyectos relacionados con grados de contaminación, movilidad de capas sociales, transporte colectivo, circuitos eléctricos y grados de corrosión.

Momento Institucional: el REI propuesto moviliza una gran variedad de recursos en el camino Secundaria-Universidad (relacionados con la producción, coste, ventas, ingresos, beneficios, plan de pensiones,…) y podemos pensar en la posibilidad de institucionalizar este tipo de proyectos en el transito Secundaria–Universidad.

Momento de la Evaluación: El proceso de evaluación del REI desarrollado en el curso 2010/2011 tenía un carácter exploratorio y está en pleno estado de elaboración. Se espera, en una segunda etapa que comenzará en el curso 2011/2012, repetir el estudio y superar muchas de las limitaciones encontradas en esta primera etapa entre las que se destacan las siguientes: los alumnos no están acostumbrados a trabajar en equipo, se presentan desajustes entre el diseño matemático y el didáctico, surgen problemas con los tiempos institucional y didáctico, se hace patente una fuerte dependencia del profesor, los alumnos no cuestionan los resultados informáticos, tienen dificultades en el manejo del software *Mathemática*, y están poco acostumbrados al estudio profundo de una cuestión inicial con un enorme potencial de partida.

En una nueva puesta en juego del REI aquí descrito, se evaluará también cuáles son las convergencias y divergencias en el proceso de transposición en el paso de la OM a enseñar, a la OM enseñada y a la OM efectivamente enseñada.

Conclusiones

Los REI aparecen como una nueva estrategia que quiere contribuir a desarrollar secuencias de enseñanza y aprendizaje que podamos trasladar a la institución escolar. El REI no funciona como una estructura rígida, sino como un proceso de estudio dinámico que se va creando a partir de una cuestión inicial crucial que se presenta en forma de reto. No se parte de los saberes sino que partiendo de cuestiones cruciales se llega a los saberes. Los REI recuperan la razón de ser de la actividad matemática.

Se pretende que los alumnos trabajen como futuros ingenieros y pasen de una respuesta muy limitada de una cuestión inicial a otra situación abierta, en forma de proyecto, donde se busca una respuesta más amplia y completa. El trabajar en equipo les obligará a intercambiar opiniones, lo que debe permitirles, por un lado, conocer mejor la actividad matemática que desarrollan y, por otro, les prepara para su futuro profesional, donde es probable que tengan que debatir y tomar decisiones que les comprometa como equipo. Lo que se procura es rescatar y estimular muchos recursos que deben forman parte del "saber hacer" del alumno.

La articulación de un REI en los actuales sistemas de enseñanza, que aún disponen de una fuerte carga teórica, representa un problema con el tipo de actividad matemática que se propugna desde los organismos oficiales y suponen un problema serio de institucionalización. Hay necesidad de avanzar desde la institución escolar en la elaboración de discursos tecnológicos que permitan institucionalizar nociones y conceptos que figuran en un REI. Nos parece importante que sean las propias instituciones docentes las que construyan discursos que permitan integrar y transitar la actividad matemática desarrollada en Secundaria con la desarrollada en la Universidad y donde tenga un fuerte protagonismo la modelización de la actividad matemática en entornos donde la matemática tiene una carga instrumental muy importante.

Referencias

Artigue, M., (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*(3), 245–274

Bosch, M. y Gascón, J. (1995). Talleres de prácticas matemáticas en el primer ciclo de la licenciatura. *Actas de Symposium de innovació universitaria: diseny, desenvolupament i evaluacio currículum universitary*, Barcelona, España: Publicacions de la Universitat de Barcelona, 25-36.

Blum, W. (2002), ICMI study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document, *Educational Studies in Mathematics* 51, 149–171.

Bosch, M., Fonseca, C., y J. Gascón (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24 (2-3), 205-250.

Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias, *Innovación Educativa*, vol. 9, núm. 46, enero-marzo, 15-25..

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, España: Horsori.

Chevallard, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, 221-266.

Chevallard, Y.(2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie escolaire*. Lyon, Francia: Journées de didactique comparée.

Chevallard, Y. (2006). *Steps towards a new epistemology in mathematics education*. En Bosch, M. (Ed.) *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4).* (pp. 21-30). Barcelona, España: Universidad Ramon Llull.

Bolonia (1999). *Espacio Europeo de la Enseñanza Superior*. Declaración Conjunta de los ministros europeos de educación, reunidos en Bolonia el 19 de junio de 1999. Documento en Línea Disponible en: http://www.eees.es/pdf/Bolonia_ES.pdf

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Enseñanza Secundaria y la Enseñanza Universitaria*. Vigo, España: *Tesis doctoral*. Universidad de Vigo.

Fonseca, C. (2007). *Una posible "razón de ser" de la diagonalización de matrices en ciencias económicas y empresariale*s. Uzès, Francia: 2º Congreso de la TAD.

Fonseca, C., Casas, J. M. e Insua, M. A. (2009). *La modelización matemática como una razón de ser para el estudio de la diagonalización. El estudio de la evolución de una comunidad según sus ingresos*. Actas III Congreso de Matemática en España (pp. 79-94): Salamanca, España.

Fonseca, C., Pereira, A. y Casas, J. M. (2009). *Diseño de un REI para la docencia práctica de Matemáticas en una Escuela de Ingeniería.* 17 Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas (CUIEET): Valencia, España.

Fonseca, C., Bosch, M, y Gascon, J. (2010). El Momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios, *Educación Matemática*, vol. 24, nº 2, 5-34.

García, F.J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L., Bosch, M. (2006) La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la TAD. *Educación Matemática* 18/2, 37-74.

OCDE (2006). Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006 RICO, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación*, ext 275-294.

Polya, G. (1954) *Mathematics and Plausible Reasoning. 2 vols.* (Princeton University Press: Princeton, NJ). [Traducción castellana de José Luis Abellán, *Matemáticas y razonamiento plausible.* Tecnos: Madrid, 1966.]

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. PNA, 1(2), 47-66. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/529/1/RicoL07-2777.PDF

Van De Walle, J. A. (2001). Teaching Through Problem Solving. En Van De Walle, J. A. (Ed.). Elementary and Middle School Mathematics. (pp. 40-61). New York: Longman.

El Autor
Cecilio Fonseca Bon
cfonseca@uvigo.es
Universidad de Vigo, Dpto de Matemática Aplicada I, MA2
Líneas de investigación: Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)