DISEÑO DE TAREAS A PARTIR DE LA MODIFICACION DE PROBLEMAS PLANTEADOS EN LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICA

Lorena Salazar Solórzano
lorena.salazarsolorzano@ucr.ac.cr
Universidad de Costa Rica

Recibido: 13/10/2013 Aceptado: 9/03/2014

Resumen

En este artículo se presentan los resultados de una experiencia de aula, que pretende indagar el efecto que produce, en la comprensión y el rendimiento académico de futuros profesores de matemática, la incorporación de tareas diseñadas a partir de la modificación de problemas propuestos en libros de texto. La experiencia se desarrolló en un curso de análisis real, en la tema de funciones continuas, del programa de Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica. Se observaron algunas evidencias positivas, como por ejemplo mayor comprensión de los enunciados de problemas y teoremas, aumento en la comprensión de soluciones y pruebas formales, incremento numérico en la evaluación del tema y mayor competencia de reflexión sobre las matemáticas.
Palabras clave: planteamiento de problemas, resolución de problemas, diseño de tareas, educación matemática.

Design of tasks from the modification of problems in textbooks of Mathematics

Abstract

This paper presents the results of a classroom experience, which aims to investigate the effect produced by the incorporation of tasks designed from modification problems proposed in text books, in the understanding and academic performance of future mathematics teachers. The experiment was conducted in a real analysis course in the subject of continuous functions, which is part of the program Mathematics Teaching at the University of Costa Rica. It was observed some positive evidence, such as better understanding of word problems and theorems, increased understanding of formal testing solutions, numerical increase in the evaluation of the topic and greater competence reflection on mathematics.
Keywords: problem posing, problem solving, task design, mathematics education.

Introducción

La formación de profesores de matemáticas constituye un campo de investigación relevante en el que se han estudiado diferentes aspectos, entre otros: pensamiento del profesor, esquemas del profesor, sistema de creencias del profesor, concepciones del profesor, conocimiento del profesor, desarrollo profesional del profesor, práctica del profesor, competencias del profesor, etc. Según Marcelo (2002) la investigación sobre el profesor ha evolucionado desde perspectivas cognitivas hacia perspectivas socioculturales. En las perspectivas cognitivas se estudia el pensamiento del profesor (Shulman, 1986; Simon y Tzur, 1999; Moreno y Azcárate, 2003; Badillo, Azcárate y Font, 2011), mientras que en las perspectivas más antropológicas y socioculturales se estudia la práctica profesional del profesor (Espinoza & Azcárate, 2000; Lerman, 2001; Llinares, 2000; Sensevy, Schubauer-Leoni, Mercier, Ligozat y Perrot, 2005; Ramos, 2006; Ramos y Font, 2006 y 2008). Una de las conclusiones en las que las diferentes investigaciones coinciden es que una forma fructífera para investigar sobre el profesor es hacerlo sobre un tópico específico (geometría, álgebra, análisis, etc.). En este artículo, la investigación se sitúa en la problemática de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y se utiliza como contexto de reflexión el tópico del análisis real, específicamente la temática de continuidad de funciones reales de variable real.

En particular, en la última década ha aumentado el interés por investigar el conocimiento y las competencias que necesitan los profesores de matemáticas para conseguir una enseñanza eficaz (Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Blunk, Charambous, Lewis, Phelps, Sleep y Ball, 2008; Silverman, J. y Thompson, 2008; Font, 2011). Con relación al conocimiento del profesor, son diversas las investigaciones que se han interesado por caracterizarlo, entre ellas destaca el trabajo de Ball, Thames y Phelps (2008) que han introducido y caracterizado la noción “conocimiento matemático para la enseñanza (MKT)”, que viene de las siglas en inglés “Mathematics Knowledge teaching”, entendido como el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno (Hill, Ball y Schilling, 2008). Este conocimiento (MKT) está conformado por dos grandes categorías, cada una de las cuales, a su vez, están conformadas por otras categorías de conocimiento: el conocimiento del contenido (que incluye el conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento en el horizonte matemático) y el conocimiento pedagógico del contenido (conformado por el conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del currículo).

Con relación a la investigación sobre las competencias del futuro profesor, en Rubio (2012) se documenta que, para realizar la evaluación de la competencia matemática de sus alumnos, el futuro profesor debe tener competencia matemática. Pero esto no es suficiente, también debe tener competencia en el análisis de la actividad matemática. Mientras que la primera competencia no es específica de la profesión de profesor (sería común a las profesiones que dan trabajo a los matemáticos, aunque cada profesión le puede dar características propias), la segunda si lo es. Con relación al conocimiento del profesor, interesa una de las dos grandes categorías del MKT, el conocimiento del contenido; y, con relación a las competencias, el interés se centra sobre todo, por el desarrollo de la competencia en el análisis de la actividad matemática, en particular en el análisis del enunciado de tareas de demostración en el contexto del análisis real. Más en concreto, interesa investigar cómo la introducción de tareas en la formación de futuros profesores cuya consigna es la variación de problemas de análisis real, incide sobre el conocimiento matemático de los futuros profesores y sobre su competencia de reflexión sobre las matemáticas.

La estructura del artículo es la siguiente, después de esta introducción se formula el objetivo de la investigación, a continuación se hace una revisión de la literatura que se ha tenido en cuenta como referentes teóricos (diseño de tareas y creación de problemas). Después se explica la metodología que se ha seguido para pasar, a continuación, a la descripción de la experiencia realizada. El artículo termina con unas consideraciones finales.

Objetivo

El objetivo planteado es investigar el efecto que produce, en la asimilación de conceptos matemáticos y en el rendimiento académico de futuros profesores de matemáticas de secundaria, la incorporación de tareas cuya consigna es la modificación de problemas y teoremas de libros de texto, en el tema de continuidad de funciones reales de variable real.

Conceptos de Referencia

Diseño de Tareas. En el área de la educación matemática, ha surgido en los últimos tiempos un interés sobre el diseño, evaluación y rediseño de tareas al considerarlo un aspecto clave para conseguir una enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de calidad (por ejemplo, Mason & Johnston-Wilder, 2004). En particular ha aumentado el interés en el diseño de tareas en la formación inicial y permanente de los profesores (por ejemplo, Tzur, Sullivan & Zaslavsky, 2008; Zaslavsky & Sullivan, 2011). Este interés se puede observar en la creación de grupos de trabajo sobre esta temática en los congresos relevantes del área y en congresos monográficos, como ha sido la celebración de un ICMI *Study* específico sobre este tema en el año 2013 (Margolinas, 2013), siendo uno de sus focos el diseño de tareas en la formación de profesores. Por ejemplo, Giménez, Font & Vanegas (2013) reflexionan sobre las tareas que permiten el desarrollo de la competencia de análisis didáctico en la formación de futuros profesores de matemáticas de secundaria; Ron, Zaslavsky y Zodik (2013) han investigado en cómo involucrar a los docentes en la reflexión que subyace al diseño de tareas que fomenten la necesidad de nuevos conceptos o herramientas matemáticos en sus alumnos, utilizando tareas de cálculo como contexto de reflexión. Algunas de las investigaciones se han centrado en el diseño de tareas cuyo objetivo es que los profesores planteen problemas (Singer y Voica, 2013) y otras en cómo la formulación de problemas incide en la competencia de análisis didáctico de los profesores (Tichá y Hošpesová, 2013).

Planteamiento de Problemas. Varios investigadores del área de Educación Matemática se han inclinado en investigar sobre la creación de problemas, un ejemplo de ello es el número monográfico sobre este tema publicado en la revista Educational Studies in Mathematics (volumen 83, número 1). Entre los aspectos investigados hay que resaltar la relación que existe entre la creación de problemas y el conocimiento matemático de los sujetos investigados (Van Harpen y Presmeg, 2013). Precisamente, la investigación que se presenta se interesa sobre esta relación cuando se trata del conocimiento matemático de futuros profesores.

Algunas de las investigaciones sobre creación de problemas que se han centrado en los profesores, consideran que, en la práctica docente, los profesores deben mostrar competencia en la creación de problemas, al menos en la modificación de un problema dado con el fin de adaptarlo a un propósito educativo, en particular obtener formulaciones relevantes para el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, hay investigaciones que muestran que los problemas que crean los profesores tienen serias limitaciones que son relevantes para el aprendizaje de sus alumnos. Por ejemplo, Singer y Voica (2013) reportan una investigación con profesores sobre planteamiento de problemas en la que consideraron tres aspectos: claridad, coherencia y originalidad, además de la corrección que se daba por supuesta. Estos autores encontraron que un número significativo de los problemas creados eran incompletos (17 %), incorrectos (8 %), y la mayoría de ellos (70 %) fueron considerados como no interesantes por los expertos consultados. Estas investigaciones son el origen de otras que investigan sobre propuestas de cómo el planteamiento de problemas puede ser una parte integral de los programas de formación de profesores. Por ejemplo, Ellerton, 2013). Por otro lado, Tichá y Hošpesová (2013) reportan un estudio en la formación de futuros profesores de primaria, en el que el planteamiento de problemas se considera como una herramienta educativa y también diagnóstica. Los resultados de este estudio muestran cómo el análisis de los enunciados propuestos por los futuros profesores reveló deficiencias en la comprensión del tópico sobre el que trataban los problemas creados (fracciones) y también cómo dicho análisis ayudó a superar algunas de estas limitaciones.

En Malaspina (2013) se reporta una experiencia con profesores sobre la modificación de problemas a partir de episodios de clase en los que interviene el enunciado de un problema. Los profesores deben crear problemas haciendo variaciones al problema que interviene en el episodio. Así, se propone a los profesores que en trabajo inicialmente individual y luego grupal, planteen dos problemas: uno con el propósito de ayudar a los alumnos a aclarar su comprensión del problema dado y a llegar a una solución correcta del mismo (llamado "*problema pre*") y otro cuya solución se facilite por haber resuelto correctamente tanto el "problema pre" como el problema dado en el episodio descrito; un problema con el propósito de retar a los alumnos a ir más allá de una solución (llamado "*problema pos*"). Malaspina (2013) afirma que se trata de una estrategia que:

- Estimula la capacidad de crear y resolver problemas que tienen los profesores
- Lleva a reflexiones didácticas y matemáticas sobre el uso de la creación de problemas que favorezcan el aprendizaje de las matemáticas.
- Posibilita encontrar en un problema creado, mayores potencialidades que las que se pensaron al crearlo.
- Muestra que un aspecto muy importante al crear un problema es la redacción adecuada de su enunciado, para que exprese con claridad – sobre todo – la información y el requerimiento.
- Hace evidente que plantear problemas haciendo variaciones al requerimiento y al entorno matemático de un problema dado y pensando en generalizaciones, lleva a ampliar el horizonte matemático inicial.
- El planteamiento de problemas está estrechamente ligado a la resolución de problemas y contribuye al desarrollo del pensamiento matemático al brindar oportunidades – a alumnos y profesores – para examinar generalizaciones e iniciarse en la investigación y en el hacer matemáticas.

Metodología

Antecedentes

El origen de la investigación que se presenta, está relacionado con dos aspectos que llevaron a la autora a reflexionar sobre la necesidad de realizar algunas innovaciones en los cursos tradicionales de matemática formal de la carrera de Enseñanza de la matemática, tanto en la Universidad Nacional de Heredia (UNA) como en la Universidad de Costa Rica (UCR), donde imparte cursos de matemática.

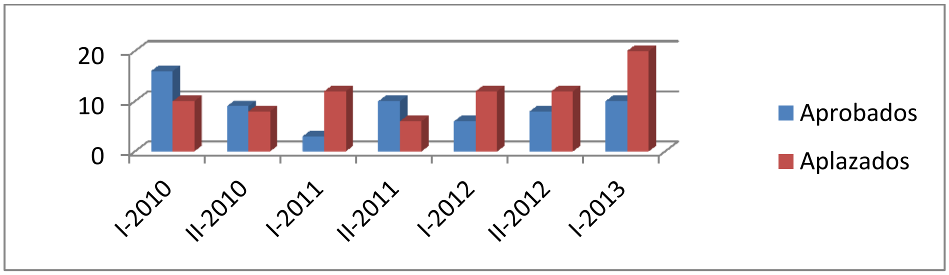
- La impartición en la UNA de un módulo sobre resolución de problemas a futuros profesores de matemáticas de secundaria, en el cual se introdujo la innovación de que algunas tareas pedían que los estudiantes plantearan problemas (creación y variación de problemas). En este curso se observaron algunas de las ventajas que la literatura sobre la formulación de problemas ha constatado, en particular que la variación de problemas fomenta el análisis del enunciado y repercute sobre el conocimiento del contenido matemático
- Las conclusiones de una comisión curricular de la UCR, donde se diseñó un plan de estudios para una nueva carrera en Educación Matemática, que intenta integrar la parte matemática con la pedagógica. En esta comisión se hicieron reflexiones sobre el contenido matemático de los futuros profesores que señalaban la importancia de que estos reflexionaran sobre dicho contenido.

Curso en el que se desarrolló la experiencia:

La experiencia de esta investigación se desarrolló durante el I ciclo del 2013 en el curso “Principios de Análisis I” de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica, la cual forma profesores de matemática para educación media. Este curso está ubicado en el I ciclo del III año y tiene una modalidad presencial con 5 horas de clases por semana. El mismo pretende fundamentar teóricamente las bases del análisis matemático, específicamente en los temas de límites, continuidad, derivación, e integración en el sentido de Riemann. Aunque estos temas se cubren desde una óptica de la matemática formal, con las demostraciones de los teoremas y resultados más importantes, también se espera desarrollar competencias relacionadas al cálculo de límites, derivación e integración.

La tasa de aprobados en este curso es muy baja, lo cual conlleva un porcentaje elevado de estudiantes que reprueban el curso, razón por la cual este curso amerita una reflexión sobre la forma en que se está impartiendo. Muchos estudiantes aprueban sin mucho problema los cursos anteriores a éste (MA540), pero al llegar a éste, pierden el curso y en varios casos requieren cursarlo más de dos o tres veces. En la siguiente gráfico se muestran algunos datos de los últimos tres años y medio, en donde puede apreciarse el alto grado de aplazados cada semestre.

Promoción de aprobados en MA-540



Fuente: Registro de notas UCR

Sujetos

Los participantes fueron 20 estudiantes de la materia mencionada anteriormente. Inicialmente habían matriculado el curso 30 estudiantes, pero en el momento en que se llevó a cabo la experiencia, ya 10 de ellos habían abandonado el curso, cosa que resulta común en éste y otros cursos más avanzados.

Diseño de tareas

La secuencia de tareas que se diseñó tuvo en cuentas los cuatro aspectos que propone Malaspina (2013) para la creación de problemas (Información, Requerimiento, Contexto y Entorno matemático) y algunos de los indicadores propuestos en Burkhard y Swan (2013) para una valoración equilibrada de tareas. En concreto, las características que se tuvieron en cuenta para el diseño de tareas fueron las siguientes:

Longitud de la secuencia de tareas: Cinco tareas

Información: Problemas de libro de texto y problemas creados por otro grupo de alumnos

Requerimiento de la tarea:

Tarea 1: Tarea abierta de comprensión de enunciados de problemas del libro de texto

Tarea 2: Tarea abierta de variación de problemas de libro de texto

Tarea 3: Tarea cerrada de resolución del problema creado en la tarea 2 por otro grupo de alumnos

Tarea 4: Pensar en la intención que tuvo el autor al crear los problemas del libro de texto

Tarea 5: Tarea abierta de comprensión de enunciados de teoremas aun no probados

Contexto: Intra-matemático

Entorno matemático:

Contenido matemático: funciones continuas (Análisis real)

Procesos: Demostración

Organización: Trabajo en grupos

La información que tuvieron los alumnos fué el libro de texto y problemas creados por otro grupo. El libro de texto usado fue "Introducción al análisis matemático de una variable", de la edición 2004 de los autores Bartle y Sherbert que ha sido uno de los libros de texto más usados en los últimos años para esta materia. El curso en el que se implementó la secuencia de tareas desarrolla los capítulos 4, 5, 6 y 7 de dicho libro, mientras que la secuencia de tareas de esta experiencia está relacionada con el capítulo 5. Antes de este curso, los estudiantes han aprobado una materia que entre otros, incluye los temas de números reales y sucesiones, que corresponde a los tres primeros capítulos de este libro, aunque no necesariamente usan el mismo texto.

La formación de los futuros profesores en Costa Rica no es secuencial, en el sentido de que primero se recibe una formación disciplinar y después una formación didáctica; son unos estudios en los que los futuros profesores reciben al mismo tiempo formación en didáctica y en matemáticas; esta última formación incluye un conocimiento de las matemáticas formales en las que la demostración deductiva tiene un papel relevante. Dado que el tema escogido para el desarrollo de la experiencia fue el de funciones continuas, propiedades y resultados más relevantes de continuidad sobre intervalos cerrados, necesariamente los procesos involucrados se relacionaron con demostración formal, elemento que usualmente les resulta difícil a los alumnos. Esto delimitó el tipo de tareas que se iban a proponer, la primera delimitación estaba relacionada con el contexto, este debía ser intra-matemático; es decir, no se trataba de proponer, por ejemplo, problemas contextualizados en los que las funciones que se debían componer relacionaran magnitudes físicas, para facilitar la comprensión de los futuros profesores. La segunda delimitación es que, para conseguir la comprensión de los futuros profesores, no se trataba de sustituir los razonamientos formales con épsilones y deltas por razonamientos intuitivos en los que se usen gráficas y/o tablas. La tercera delimitación, muy relacionada con la segunda, es que tampoco se propondrían tareas con el uso de programas informáticos, más que el simple uso de un graficador del tipo de software libre.

Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Es importante señalar que para la recolección de datos, se usó la observación no participante y registro detallado, para lo cual se usó un diario donde se fue anotando todo lo que fue ocurriendo en el aula, percepciones sobre la actitud e interés de los estudiantes, expresiones verbales de los participantes, tiempo de ejecución de las tareas, etc. Se recolectaron evidencias escritas por los grupos de trabajo en el desarrollo de las tres sesiones. Al final de la experiencia se realizó un cuestionario para valorar si la actividad le ayudó o no en la comprensión y asimilación de los conceptos matemáticos. Esto se complementó con preguntas a los estudiantes, por separado para determinar el grado del logro del objetivo planteado, la aceptación o no aceptación de la actividad. Una semana después de concluida la actividad, se realizó una prueba específica escrita individual, con el fin de evaluar la comprensión de los conceptos relacionados a la continuidad de funciones. La evaluación de esta prueba escrita, no fue solo sumativa, sino que también se realizó un análisis cualitativo de los argumentos matemáticos usados en la solución de los problemas involucrados y se hizo una comparación sobre el desempeño de cada estudiante, con evaluaciones anteriores a esta.

Descripción de la Experiencia

La experiencia que se describe a continuación se desarrolló durante tres sesiones del curso mencionado anteriormente, la primera de ellas fue sobre análisis de enunciados, la segunda sobre planteamiento de problemas y la tercera se basó en reflexiones sobre la intención que tuvieron los autores en el planteamiento de los problemas.

Primera sesión: Análisis de enunciados

La primera sesión (1,5 horas) inició de la forma tradicional: la profesora expuso magistralmente los conceptos, ejemplos, teoremas y algunos resultados de continuidad, usando pizarra y marcador, mientras que los estudiantes se limitaron a copiar de la pizarra y a hacer alguna que otra intervención o pregunta. La docente explicó el concepto de continuidad y se demostraron varios teoremas sobre operaciones de funciones continuas, con demostraciones formales típicas (usando épsilones y deltas), incluidas el siguiente teorema sobre la continuidad de la composición de funciones continuas (TCFC):

Teorema (Continuidad de una función compuesta)
Sean $f : A \to IR$ y $g : B \to IR$ dos funciones donde $f(A) \subset B$. Si f es continua en un punto $c \in A$ y g es continua en $b = f(c)$, entonces la función compuesta gof es continua en $x=c$.

La primera innovación con relación a la manera habitual de impartir este tema se inició cuando se les solicitó a los alumnos que resolvieran, en grupos de 5 personas, dos problemas relacionados con este teorema. Se trata de dos problemas que los autores del libro de texto (Bartle y Sherbert, 2004) proponen al final de la sección 5.2, uno a continuación del otro. Los autores pretenden, en el primer problema, poner un ejemplo en el que la composición de funciones no es continua porque no se cumple alguna de las hipótesis de partida (en este caso la función *g* no es continua en $f(0)$). En el segundo problema se debilita una de las hipótesis − en lugar de exigir que *f* sea continua, se exige que exista el límite de la función en $x = c$, con lo cual se obtiene una tesis más débil que la continuidad de la composición, pero muy útil en el cálculo de límites, a saber que

$$\lim_{x\to c}(gof)(x) = g\left[\lim_{x\to c} f(X)\right]$$

es decir que si en una composición, la función de “afuera” es continua y el límite de la función de “adentro” existe, entonces se puede “introducir” el límite dentro de g. Reescribimos los problemas mencionados tal y como aparecen planteados en el libro de texto.

Problema 5. (P5)

Sea que g está definida en IR por $g(1)=0$ y $g(x):=2$ si $x \neq 1$, y sea $f(x):=x+1$ $\forall x \in IR$. Demostrar que $\lim_{x \to 0}(gof)(x) \neq (gof)(0)$. ¿Por qué este hecho no contradice el teorema de composición de funciones?

En la discusión de este problema, los estudiantes en principio no lograban entender que se les pedía, confundían las premisas con la tesis a demostrar, además mostraron falta de conexiones entre este problema y el (TCFC). La docente les dió una ficha con las siguientes preguntas guía para ayudar a la comprensión del enunciado del ejercicio.

Preguntas generadoras para Problema 5:

- ¿Cuáles son las premisas o supuestos de este problema?
- ¿Podría expresar en palabras qué significan dichas premisas?
- ¿Es la función f continua en IR? ¿Lo es en $x=0$?
- ¿Es la función g continua en IR? ¿Lo es en $x=1$?
- ¿Qué es lo que se pide probar? ¿Qué significa ésto en palabras?
- ¿Qué significaría tener la igualdad $\lim_{x \to 0}(gof)(x)=(gof)(0)$?
- Sea $F(x):=(gof)(x)$, escriba la igualdad anterior en términos de F. Ahora, ¿qué significa esta igualdad para $F=gof$?
- ¿Qué le dice entonces la desigualdad?
- Conteste la pregunta del problema: ¿Por qué este hecho no contradice el teorema de composición de funciones continuas?

Cada uno de los grupos trató de contestar las preguntas, nuevamente desligadas unas de otras, sin el sentido conector e intencionado de las mismas, por lo que se les pidió leerlas todas primero hasta dos veces para que así lograran relacionarlas entre sí y con el TCFC. Analizar el teorema, el problema P5 y la guía de preguntas, ayudó a que todos los estudiantes llegaran a la comprensión del ejercicio y de la intención del mismo. Al hacer estas comparaciones, se reafirmaron las hipótesis del mismo, llegando a concluir que, en este caso, la composición no resulta continua en $x=0$ pues g no lo es en $f(0)=1$. Para el siguiente problema, se siguió una metodología similar.

Problema 6. (P6)

Sea que f, g estén definidas en IR y sea $c \in IR$. Supóngase que $\lim_{x \to c} f(x) = b$ y que g es continua en b. Demostrar $\lim_{x \to c} (gof)(x) = g(b)$. Compare este resultado con el problema anterior y con el teorema de composición de funciones continuas.

En este problema todos los grupos iniciaron, lo cual es adecuado desde un punto de vista formal, partiendo de un ε > 0 para hallar un δ > 0 tal que si

$$|\mathrm{x} - \mathrm{c}| < \delta \Rightarrow \left|\mathrm{g}\left(\mathrm{f}(\mathrm{x})\right) - \mathrm{g}(\mathrm{b})\right| < \varepsilon$$

Casi todos, sin embargo, fallaron en hallar un delta adecuado, lo cual muestra que aunque tienen claro lo que debe demostrarse, hay fallas en lograr la prueba formal correctamente.

Dos de los cuatro grupos, propusieron el mínimo de entre varios deltas que fueron generando a partir de las hipótesis, hecho válido en otras pruebas vistas anteriormente, como en el caso de la suma o producto de funciones continuas, sin embargo esto no resulta válido en este caso. Esto evidencia que estos estudiantes no comprendieron el concepto inmerso en la definición formal de continuidad.

El tercer grupo, tenía un poco más clara de lo que se buscaba, sin embargo no logran concretar la idea. El cuarto grupo, sin embargo, escribió la siguiente prueba correcta.

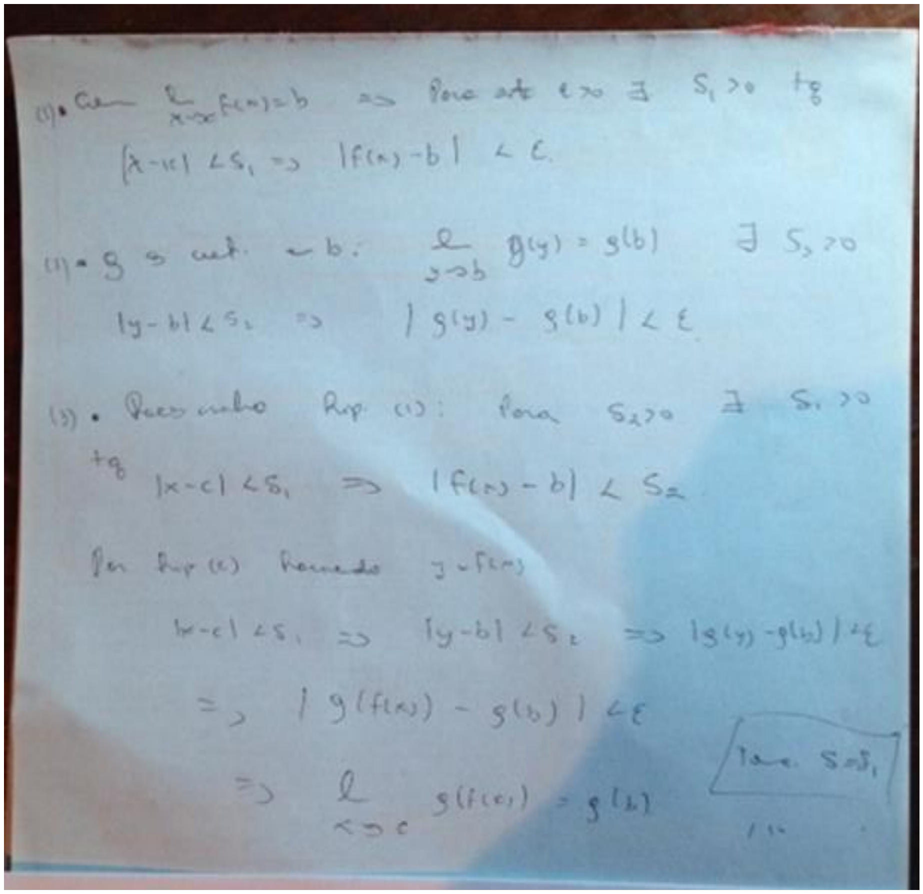


Figura 1. Prueba del grupo 4

Sin embargo, a pesar de dar una demostración formal correcta del ejercicio, éste y los demás grupos, evidenciaron, por sus respuestas verbales, que no entendían lo que habían probado y su relación con el TCFC y mostraron carencia de conexiones entre la parte matemática formal y el mensaje o resultado que pretende dar el ejercicio.

Nuevamente se les dió una ficha guía con preguntas generadoras que los guiara a la comprensión del ejercicio.

Preguntas generadoras para Problema 6:

- ¿Cuáles son las premisas o supuestos de este problema?
- ¿Cuál es la tesis que se probó?
- ¿Podría expresar en palabras qué significan dichas premisas y la tesis?
- ¿Qué significa qué $\lim_{x\to c} f(x) = b$? ¿Qué sucede si $b = f(c)$? ¿ $b \neq f(c)$?
- ¿Es la función *f* continua en *x*=*c*? ¿Es discontinua en *x*=*c*? ¿es evitable?
- ¿Es g continua en c? ¿Lo es en *b*?
- Exprese formalmente que *g* es continua en *b*
- Observe que $b = \lim_{x\to c} f(x)$, sustitúyalo en la tesis probada $\lim_{x\to c}(g\circ f)(x) = g(b)$ ¿Qué concluye?
- Nuevamente, ¿qué dice este problema? ¿Cuál cree fue la intención de los autores al proponer este ejercicio?

Esta vez, a diferencia de la guía de preguntas del problema P6, los estudiantes sí realizaron las conexiones entre la secuencia de las preguntas, el teorema y ejercicio, llegando a la conclusión deseada. Cabe destacar que algunos estudiantes, lograron el objetivo sin necesidad de contestar todas las preguntas, pero otros si ocuparon contestar cada una de ellas.

Segunda sesión: Planteamiento de problemas

La segunda sesión fue de 2,5 horas. Se les propuso formarse en los mismos grupos que trabajaron en la priemera sesión y se les dió las siguientes consignas:

Consigna 1:

A partir del teorema de la continuidad de la composición de funciones y de los problemas 5 y 6 (denotados por P5 y P6), formule un problema que involucre dos funciones que satisfagan las hipótesis descritas en cada uno de los tres escenarios: el teorema y los problemas P5 y P6.

En esta primera consigna, se pretendió que los estudiantes realizaran una variación muy sencilla de los problemas analizados en la sesión 1. Los diferentes grupos formularon tres problemas, el primero consistió en buscar dos funciones continuas cuya composición fuese continua, en el segundo se limitaron a repetir el problema P5 con una par de funciones diferentes, una continua y otra con una discontinuidad evitable de un punto, muy similar al resuelto anteriormente. Finalmente, en el tercero buscaron dos funciones particulares, que ilustraran el enunciado del problema P6. Esta tarea la realizaron todos los grupos sin mayor contratiempo, usando ejemplos sencillos como polinomios, funciones trascendentales, etc.

Los futuros profesores propusieron problemas como los siguientes, que iban desde una variación muy pequeña, hasta algunos más interesantes. Algunos de ellos se muestran a continuación.

- Problema 1: Sea $g(x) = e^x$ y $f(x) = x^2$. Justifique porqué se cumple que $\lim_{x\to c} (g \circ f)(x) = g(f(c))$.
- Problema 2: Sea $g(x) = \ln(x)$ y $f(x) = x+1$. Justifique porqué $\lim_{x\to -1} (g \circ f)(x) \neq g(f(-1))$.
- Problema 3: Sea $g(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = x^2 - 4$. Determine los valores de $x=c$ para los cuales se da la igualdad $\lim_{x\to c} (g \circ f)(x) = g(f(c))$.
- Problema 4: Sea $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $f(x) = \frac{1}{x}$. Justifique el hecho de que $\lim_{x\to 0} (g \circ f)(x) \neq g(f(0))$.

La clase siguió con la siguiente consigna, cuyo objetivo fue lograr variación de problemas con un grado de dificultad mayor: hacer cambio en las premisas y analizar los resultados.

Consigna 2:

A partir del teorema de la continuidad de la composición de funciones y de los problemas P5 y P6, formule tres problemas que ilustren, debiliten o fortalezcan alguna de las hipótesis de cada uno de los tres escenarios y plantee la tesis que puede lograrse a partir de estos cambios.

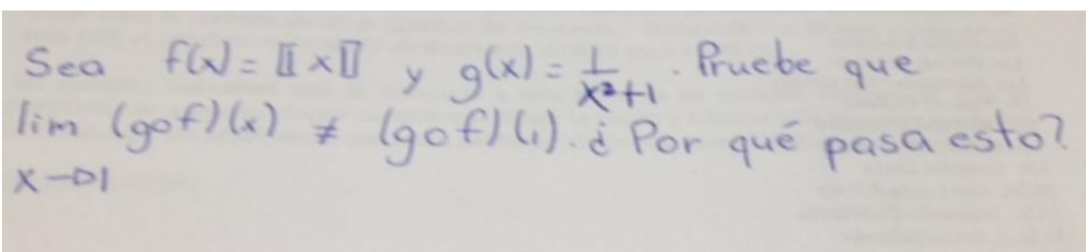
Los alumnos no tuvieron dificultades para formular un problema con alguna hipótesis fortalecida. Por ejemplo, en el teorema de la composición de funciones continuas, un grupo planteó el siguiente problema.

Problema:

Sean $f: A \rightarrow IR$ y $g: B \rightarrow IR$ donde $f(A) \subset B$. Si **f es derivable** en un punto $c \in A$, y g es **derivable** en $b = f(c)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua es $x = c$.

Cambiaron la hipótesis de continuidad de f y g, por la derivabilidad de la misma en el punto x=c y f(c) respectivamente. Se hizo aquí una reflexión de si esto abarcaba más funciones que cumplan el teorema o lo restringía, y si era necesario incluir una hipótesis más fuerte que la original. ¿Cuál es la idea de los teoremas? Los estudiantes llegaron a la conclusión de que las hipótesis de un teorema, dicho en términos metafóricos, deben ser "lo justo y necesario" para obtener el resultado. También se cuestionó de si, con tales hipótesis tan fuertes, se podría obtener una tesis más fuerte, como la derivabilidad de la composición.

Los estudiantes si tuvieron dificultades en "debilitar" alguna condición, lo cual es natural, pues esto conlleva a un nivel de comprensión mucho mayor. Lo que consiguieron fué formular algunos contraejemplos como el que sigue a continuación:



Los estudiantes de este grupo crearon este problema con la intención clara de enfatizar la hipótesis de P6 (la función f debe tener una discontinuidad evitable en el punto en cuestión) creando un contraejemplo, pues en este caso particular, f es discontinua en x =1, pero la discontinuidad es inevitable. Su intención fue que el grupo al que le tuviera que resolver este problema, pusieran atención a la importancia de que $\lim_{x \to c} f(x) = b$ para concluir que se dé la igualdad $\lim_{x \to c} (g \circ f)(x) = g(b)$.

Finalmente se les propuso trabajo para realizar por su cuenta individualmente fuera de clase. En concreto, se les dio las siguientes dos consignas.

Consigna 3: Resuelva individualmente los problemas creados por los grupos ajenos al suyo, justificando adecuadamente

Se les pidió además reflexionar sobre el resto de los ejercicios de la misma sección, usando la metodología realizada en clase.

Consigna 4: Lea los enunciados de los problemas 7-16 que están al final de la sección 5.2 , y en lugar de resolverlos piense qué quiere decir el enunciado y cuál era la intención que tenía el autor del libro de texto al formularlos.

Se diseñó este trabajo individual para permitir que cada estudiante pudiese tener un espacio que le permitiera seguir su propio ritmo para llevar a cabo los procesos necesarios para la comprensión de la teoría.

Tercera sesión: Intención de los problemas

En la tercera sesión, los alumnos se volvieron a organizar en los mismos grupos que trabajaron en las sesiones anteriores y comentaron entre ellos el resultado de lo que habían hecho individualmente para contestar las consignas 3 y 4 propuestas en la clase anterior. Esta tarea resultó muy provechosa e interesante para los futuros profesores. Se trataba de consignas que les enfrentaban al reto de analizar los enunciados, en lugar de resolverlos.

El resultado fue que se generó en los alumnos, entre otros aspectos, la comprensión de que el objetivo de los problemas en los libros de texto, no es solo llegar a una solución, sino que también se pretende ayudar a comprender mejor la teoría. Los futuros profesores fueron conscientes de que reflexionar sobre su enunciado les ayudaba a poner más atención a las hipótesis, premisas y resultados de los problemas propuestos. De esta manera, se convertían en un medio para estudiar y comprender mejor la teoría. No sólo ayudaban a entender el desarrollo teórico sino que incluso lo aumentaban, puesto que en varios problemas se hallan resultados, importantes en sí mismos. Uno de los estudiantes comento: "…*profesora, de ahora en adelante no me voy a un examen sin leer los ejercicios, aunque no me hayan salido*." Después de esto se les pidió leer los teoremas y corolarios (6 en total) de la siguiente sección sobre funciones continuas sobre intervalos cerrados y acotados y reflexionar sobre ellos mediante la siguiente consigna:

Consigna 5: Lea los enunciados de los teoremas y corolarios de sección 5.3 del libro de texto sobre funciones continuas en intervalos cerrados y acotados; y, sin leer la demostración, piense qué quiere decir el enunciado y las consecuencias de modificar alguna de las hipótesis (por ejemplo, tome un teorema que se cumple en un intervalo cerrado y piense que pasaría si el intervalo no lo fuera, por ejemplo que fuera abierto en uno de los extremos).

Los teoremas y resultados que debían leer son los siguientes

- **Teorema de acotabilidad:** Sea $\mathrm{I} := [a,b]$ un intervalo cerrado y acotado y sea $\mathrm{f}:\ \mathrm{I} \to \mathrm{IR}$ continua en I. Entonces f está acotada en I.
- **Teorema del máximo-mínimo:** Sea $\mathrm{I} := [a,b]$ un intervalo cerrado y acotado y sea $\mathrm{f}:\ \mathrm{I} \to \mathrm{IR}$ continua en I. Entonces f tiene un máximo y un mínimo absoluto en I.
- **Teorema de localización de raíces**: Sea I un intervalo y sea $\mathrm{f}:\ \mathrm{I} \to \mathrm{IR}$ continua en I. Si $\alpha < \beta$ son números en I tales que $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$, entonces existe un número $c \in]\alpha, \beta[$ tal que $f(c) = 0$.
- **Teorema del valor intermedio de Bolzano**: Sea I un intervalo y sea $\mathrm{f}:\ \mathrm{I} \to \mathrm{IR}$ continua en I. Si a,b $\in$ I y si $\mathrm{k} \in \mathrm{IR}$ satisface $f(a) < k < f(b)$, entonces existe un punto $c \in I$ entre a y b tal que $f(c) = k$.
- **Corolario:** Sea $\mathrm{I} := [a,b]$ un intervalo cerrado y acotado y sea $\mathrm{f}:\ \mathrm{I} \to \mathrm{IR}$ continua en I. Si $\mathrm{k} \in \mathrm{IR}$ es cualquier número que satisface $\inf f(I) < k < \sup f(I)$, entonces existe un número $c \in I$ tal que $f(c) = k$.
- **Teorema**: Sea I un intervalo cerrado y acotado y sea $\mathrm{f}:\ \mathrm{I} \to \mathrm{IR}$ continua en I. Entonces el conjunto $\mathrm{f}(\mathrm{I}) := \{\mathrm{f}(\mathrm{x}):\ \mathrm{x} \in\ \mathrm{I}\}$ es un intervalo cerrado y acotado.

- **Lema:** Sea $S \subset IR$ un conjunto no vacío con la propiedad si $x, y \in S$ y $x < y$, entonces $[x, y] \subset S$. Entonces S es un intervalo.
- **Teorema de preservación de intervalo:** Sea I un intervalo y sea $f : I \to IR$ continua en I. Entonces el conjunto f (I) es un intervalo.

Inmediatamente se les asignó una guía de preguntas para que, al igual que en los casos anetriores, les ayudara a visualizar algunos detalles de los resultados. Los estudiantes comentaron los teoremas y resultados de dicha sección, buscando contestarse ¿por qué se pide tal hipótesis? Al llegar a la lectura del lema, se les pidió que discutieran la diferencia entre lo que es un teorema, corolario y el lema. Pudieron dar la demostración verbalmente del corolario, y porqué se podía deducir inmediatamente del teorema anterior.

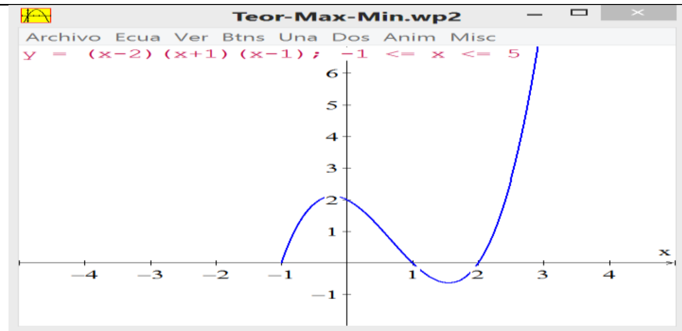
Otro punto importante que no podía dejarse de lado, fue el uso de software dinámico que les ayudara a lograr una visualización gráfica de los teoremas. Se les pidió realizar la siguiente consigna.

Consigna 6:

Ilustre el teorema gráficamente, usando una función específica en cada caso. Haga el gráfico manualmente o usando algún software graficador. Discuta la omisión de alguna de las hipótesis.

Los estudiantes obtuvieron diferentes ilustraciones para ilustrar los teoremas. Para ello usaron el software libre winplot, el cual es un graficador muy fácil de usar y muy liviano. Con el mismo, ellos fueron editando varias funciones y sus gráficos, hasta obtener uno que satisfaciera lo que querían ilustrar. Sin el uso de este software, es claro que la búsqueda de una función adecuada, les llevaría mucho más tiempo. Uno de los gráficos hallados por un grupo es el siguiente:

Problema: Sea $f(x) = (x-2)(x+1)(x-1)$ en el intervalo $[-1, 3]$. Verifique que el mínimo absoluto se obtiene en $x = -1$ y su máximo absoluto en $x = 3$, pero si se toma el intervalo $[-1, 3[$, la función no tiene máximo absoluto, como puede observarse en el gráfico de dicha función.



Finalmente, la docente pasó a demostrar estos teoremas y resultados, desde la óptica de la matemática formal, resultando que la comprensión por parte de los estudiantes, resultó mejor que en cursos anteriores. Esto se deduce de las preguntas y comentarios de los estudiantes, e incluso de su actitud frente a un resultado cuyo enunciado ya comprendían de manera más amplia y detallada. Tuvieron claro las hipótesis, la tesis a demostrar, el porqué de los pasos de las demostraciones, pues sabían hacia donde se dirigía cada procedimiento y razonamiento. Esto, en cursos anteriores no se daba, limitándose los estudiantes a copiar la demostración con poco o ningún interés.

Consideraciones Finales

Uno de los aspectos de la introducción de tareas de modificación de problemas fue que aumentó la motivación de los participantes, en concreto el grupo de los alumnos con menor rendimiento y actitud poco participativa, mostró mayor frecuencia de intervenciones verbales que antes de la actividad. Otro aspecto que hay que destacar, es que el rendimiento de los alumnos en la prueba escrita específica de evaluación del tema de continuidad, fue superior al que tuvieron en la prueba de evaluación del contenido estudiado anteriormente (límites y sucesiones), donde se había seguido la metodología tradicional. Por otro lado, los argumentos matemáticos usados en dicha prueba, en general, revelaron mayor madurez matemática, mayor formalismo y una forma adecuada de expresar sus argumentos.

Otro de los resultados observados, es que los alumnos, después de la experiencia descrita, modificaron sus conductas respecto a otros temas que habían estudiado previamente, en concreto ahora no se limitaban a intentar resolver la tarea propuesta sino que reflexionaban sobre su enunciado, consiguiendo de esta manera una mejor comprensión de la teoría que se tenía que utilizar en su resolución. Dicha comprensión se pudo inferir por el tipo de preguntas y comentarios que hicieron los alumnos.

Otro ejemplo de mejora de su comprensión es que la reflexión sobre el enunciado de la tarea les permitió darse cuenta de la aplicación limitada de ciertas reglas que ellos habían generado y que en algunos casos aplicaban en contextos donde no eran válidas. Tal es el caso del cálculo de límites como $\lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{1}{x}\right), \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donde se omiten la hipótesis de la existencia de $\lim_{x\to 0} f(x)$ para usar el resultado que indica que $\lim_{x\to c}(gof)(x) = g\left[\lim_{x\to c} f(X)\right]$.

Por último, en esta experiencia se ha evidenciado la importancia de proponer tareas con consignas como la 3 y la 4 (en la que los alumnos deban pensar sobre el enunciado del problema, sobre la intención del autor del problema y sobre qué quiere decir el enunciado de un teorema y las consecuencias de modificar alguna de sus hipótesis). Una evidencia de la relevancia de este tipo de tareas es que los alumnos entendieron mucho mejor, y más rápidamente, las demostraciones de la siguiente sección sobre funciones continuas en intervalos cerrados y acotados, en particular fueron muy conscientes del papel de las diferentes hipótesis en la demostración.

Además de la formulación y modificación de problemas, hay que tomar en cuenta una fase previa en que los alumnos piensen en la intención que tuvo el autor del problema. En la experiencia que se ha descrito, esta fase resultó tanta o más útil para la comprensión de los alumnos que la misma fase de variación de problemas. Esta es una fase previa a las fases de variación y creación de problemas, que puede ser muy útil para facilitar la transición de las clases formales típicas a otro tipo de clases en las que los alumnos, además de hacer matemáticas, tengan que pensar sobre las matemáticas.

Referencias

Badillo, E., Azcárate, C., y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) de profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(2), 191-206.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59*(5)*, 389-407.

Bartle, R. y Sherbert, D. (2004). *Introducción al análisis matemático de una varaible*. México: Limusa.

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 87-101.

Espinoza, L. y Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de una función": una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias, 18*(3), 355-368.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 26, 9-25.

Giménez, J., Font, V. y Vanegas, Y. (2013). Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process, en C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22*, (Vol. 1, 581-590). Oxford: ICMI

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39* (4), 372-400.

Hill, H., Blunk, M., Charambous, Y., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L. y Ball, D. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction. An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430-511.

Lerman, S. (2001). Cultural, Discursive Psychology: a Sociocultural Approach to Studying the Teaching and Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 46(1-3), 87-113.

Llinares, S. (2000). Secondary school mathematics teacher's professional knowledge. A case from the teaching of the concept of function. *Teachers and Teaching: theory and practice, 6*, 41-62.

Malaspina, U. (2013). Nuevos horizontes matemáticos mediante variaciones de un problema. *Unión*, 35, 135-143**.**

Marcelo, C. (2002). La investigación sobre el conocimiento de los profesores y el proceso de aprender a enseñar. En Perafrán, G. A. y Adúriz-Bravo, A. (Eds.), *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debate y perspectivas internacionales* (pp. 45-60). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional-Colciencias.

Margolinas, C (2013), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22*, (Vol. 1, 581-590). Oxford: ICMI

Mason, J. y Johnston-Wilder, S. (2004). *Designing and Using Mathematical Tasks*. London: Tarquin.

Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(1), 85-98.

Ramos, A. B. (2006). *Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales.* Tesis Doctoral, Universitat de Barcelona, España. **[**disponible en: http://www.tesisenxarxa.net/TESIS_UB/AVAILABLE/TDX-0330106-090457]

Ramos, A.B., y Font, V. (2006). Cambio institucional, una perspectiva desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemàtica. *Paradigma*, *XXVII* (1), 237-264.

Ramos, A. B., y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática Educativa, 11*(2), 233-265.

Ron, G., Zaslavsky, O. y Zodik, I. (2013). Engaging teachers in the web of considerations underlying the design of tasks that foster the need for new mathematical concepts or tools: The case of calculus, en C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22,* (Vol. 1, 643-649). Oxford: ICMI.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemático*. Tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona, España.

Sensevy, G., Schubauer-Leoni, M.L., Mercier, A., Ligozat, F., & Perrot, G. (2005). An Attempt to Model the Teacher's Action in the Mathematics Class. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), 153-181.

Silverman, J. y Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of mathematics teacher education*, 11(6), 499-511.

Singer. F. M. y Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 9-26.

Shulman, L. S. (1986): Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), pp. 4-14.

Simon, M. A. & Tzur, R. (1999). Explicating the Teachers' Perspective from the Researchers' Perspectives: Generating Accounts of Mathematics Teachers' Practice. *Journal forResearch in Mathematics Education, 30*(3), 252-264.

Tichá, M. y Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 133-143

Tzur, R., Sullivan, P., & Zaslavsky, O. (2008). Examining teachers' use of (non-routine) mathematical tasks in classrooms from three complementary perspectives: Teacher, teacher educator, researcher. In O. Figueras & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, and the 30th North American Chapter* (Vol. 1, pp. 133-137). México: PME.

Van Harpen, X. Y, y Presmeg, N. C. (2013). An investigation of relationships between students' mathematical problem-posing abilities and their mathematical content knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 117-132.

Zaslavsky, O., & Sullivan, P. (Eds.). (2011). *Constructing knowledge for teaching: Secondary mathematics tasks to enhance prospective and practicing teacher learning*. New-York: Springer.

Autora:

Lorena Salazar Solórzano**:** Magíster en Matemática, Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica. **Líneas de investigación:** Formación de profesores de matemáticas de secundaria. lorena.salazarsolorzano@ucr.ac.cr