ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE PRIMARIA COMO RESOLUTORES Y EVALUADORES DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

María Luz Callejo de la Vega (luz.callejo@ua.es)

Depto. de Innovación y Form. Didáctica; Universidad de Alicante, España

Maximina Márquez Torres (maximina.marquez@gmail.com**)**

Escuela Técnica Industrial "Capitán Anselmo Belloso"; Maracaibo, Venezuela

Recibido: 11/08/2010 **Aceptado:** 21/11/2010

Resumen

En este artículo se reporta un estudio con estudiantes para maestro (EPM) acerca de la relación entre el éxito en la resolución de problemas de estructura multiplicativa del tipo 'isomorfismo de medidas' y la evaluación de diferentes soluciones dadas por alumnos de Primaria a estos mismos problemas. Los resultados muestran que la relación entre la resolución de un problema de estructura multiplicativa y la forma de calificar no es causal, debido por un lado a que es más fácil identificar una solución correcta que elaborarla (problemas mal resueltos y bien calificados) y por otro a que los conocimientos profesionales son a veces insuficientes para valorar estrategias alternativas a la multiplicación y a la división o tienen creencias inadecuadas relativas a este tipo de problemas y a los criterios de evaluación (problemas bien resueltos y mal calificados). Además las tareas propuestas pueden ser potencialmente útiles para construir los conocimientos necesarios para enseñar matemáticas.

Palabras clave: problemas de estructura multiplicativa, formación de estudiantes para maestro, conocimiento profesional.

PRESERVICE ELEMENTARY TEACHERS AS SOLVERS AND REVIEWERS OF MULTIPLICATIVE STRUCTURE PROBLEMS

Abstract

The aim of this paper is to study the relationship between the success of pre-service teachers (EPM) when solving problems with a multiplicative structure (isomorphism of measures) and EPM scores of primary school pupils' answers to the same problems. Results show that there is not a causal relationship between solving a problem with a multiplicative structure and the way that EPM grade pupils' answers because it is easier to identify a correct solution than solve correctly a problem (incorrect resolution but well-graded pupils' answers), the professional knowledge of pre-service teachers is often insufficient to grade alternative strategies (different from multiplication and division) and finally, because they have inappropriate beliefs related to the type of problems and assessment criteria (correct resolution but poorly graded of pupils' answers). Moreover, the proposed tasks could be potentially useful for building the necessary knowledge to teach mathematics.

Key Words: problems with multiplicative structure, training pre-service teacher, professional knowledge.

Introducción

Un aspecto importante en la investigación en Educación Matemática es identificar los conocimientos necesarios para enseñar esta disciplina y cómo se relacionan entre sí (Llinares y Krainer, 2006). La caracterización de estos conocimientos emerge de identificar las tareas profesionales del profesor de matemáticas (Llinares, 2009): (a) planificar y organizar el contenido matemático para enseñar; (b) gestionar el contenido matemático en el aula; y (c) analizar, interpretar y valorar las producciones matemáticas de los alumnos. Una aportación clave en la identificación de los conocimientos necesarios para enseñar ha sido la de Shulman (1989) que distingue entre 'conocimiento de la materia' y 'conocimiento de contenido pedagógico'. Esta última expresión se ha utilizado para referirse a diversos aspectos relacionados con la disciplina a enseñar y con la enseñanza, por lo que es necesario un desarrollo teórico específico en el área de matemática en contenidos concretos. En este artículo nos centramos en el conocimiento del profesor sobre los problemas de estructura multiplicativa (Vergnaud, 1994).

La formulación de problemas de estructura multiplicativa por estudiantes para maestro (EPM) ha sido estudiada por Castro y Castro (1996). Estos autores propusieron a EPM de primer año formular un problema verbal que se resolviese con una división y que incluyese números naturales como datos. Los resultados obtenidos muestran que la mayoría de los maestros en formación redactan problemas del tipo división-partitiva, obviando los de división-medida, lo que parece mostrar que el modelo implícito primitivo es el de división partitiva.

En cuanto a la división, los estudios de Campbell (2002) han mostrado que los EPM tienen dificultad para resolver tareas que exigen una adecuada comprensión de los conceptos básicos relacionados con el uso del 'teorema de la división', es decir, la igualdad que relaciona los términos de la división (dividendo = divisor x cociente + resto), pues no fueron capaces de aplicar conocimientos relativos a la relación entre los términos de la división a nuevas situaciones. Ball (1990) ha investigado acerca de la comprensión de la división de futuros profesores de primaria y secundaria en tres contextos: división con fracciones, división por cero y división con expresiones algebraicas. Los EPM debían resolver las tareas, justificar el procedimiento empleado y generar explicaciones y representaciones adecuadas para sus alumnos. Los resultados mostraron que los conocimientos de los EPM estaban más basados en la memorización de algoritmos que en la comprensión conceptual, ya que respondían a cada tarea por separado buscando reglas particulares, sin relacionarlas ni encuadrarlas en el concepto de división. Por otra parte, aunque algunos EPM fueron capaces de dividir fracciones correctamente y de generar representaciones adecuadas, tuvieron dificultades para explicar su significado, pues consideraban la división sólo en términos de división- partitiva, que no es un modelo adecuado en el contexto de las fracciones. Este estudio muestra pues que el conocimiento matemático adquirido por los EPM en su etapa preuniversitaria era insuficiente para proporcionar una adecuada preparación para enseñar matemáticas que incida en la comprensión del significado de la división en diferentes contextos.

Cos y Valls (2006) han estudiado las concepciones de los EPM de primer año sobre la resolución de problemas aritméticos elementales; sus resultados muestran que estos estudiantes consideran la resolución de problemas como un pretexto para trabajar los algoritmos de las operaciones, y no como un contexto de aprendizaje del significado de las operaciones, y asimilan la enseñanza de la resolución de problemas con la enseñanza de los algoritmos de cálculo.

En relación al análisis, interpretación y valoración de las producciones de los estudiantes, Verschaffel, De Corte y Borghart (1997) han investigado sobre cómo los EPM resuelven problemas aritméticos elementales en los que hay que hacer consideraciones de tipo realista para dar la respuesta correcta y cómo evalúan diferentes soluciones a los mismos. Los resultados muestran que la forma en que los EPM interpretan y valoran las producciones de los alumnos guarda relación con la manera en que resuelven estas tareas y con sus concepciones sobre las mismas.

En nuestro trabajo queremos profundizar en esta relación constatada por Verschaffel et al. (1997) en diferentes tipos de problemas de estructura multiplicativa, en concreto en la relación entre el éxito en la resolución de un problema y la forma de analizar e interpretar varias soluciones dadas por alumnos de Primaria a esos mismos problemas.

Marco Teórico

En este trabajo hemos seleccionado problemas de multiplicación y división que Vergnaud (1994) incluye dentro del campo conceptual de las estructuras multiplicativas, que define como el conjunto de situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporcionalidad simple o múltiple para los cuales generalmente es necesario realizar una multiplicación, una división o una combinación de esas operaciones. En estas situaciones están involucrados varios tipos de conceptos matemáticos como las funciones lineales, los espacios vectoriales, el análisis dimensional, las fracciones, la proporcionalidad, el número racional, la multiplicación y la división.

Desde esta perspectiva Vergnaud (1997) analiza los problemas que conllevan operaciones de multiplicación y/o división y distingue tres grandes estructuras: ‘isomorfismo de medidas’, ‘producto de medidas’ y problemas con ‘un espacio de medida’ El ‘isomorfismo de medidas’ es una estructura que engloba aquellos problemas de proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes M1 y M2 y pone en juego cuatro cantidades, tres de ellas son los datos del problema (1, a y b en Figura 1) y la cuarta es la incógnita (x en Figura 1). Se identifican tres subtipos de problemas: multiplicación, división-medida (búsqueda de la cantidad de unidades) y división-partitiva (búsqueda del valor unitario), según cuál sea la incógnita. La Figura 1 muestra la tabla de correspondencia entre las dos magnitudes en los tres tipos de problemas.

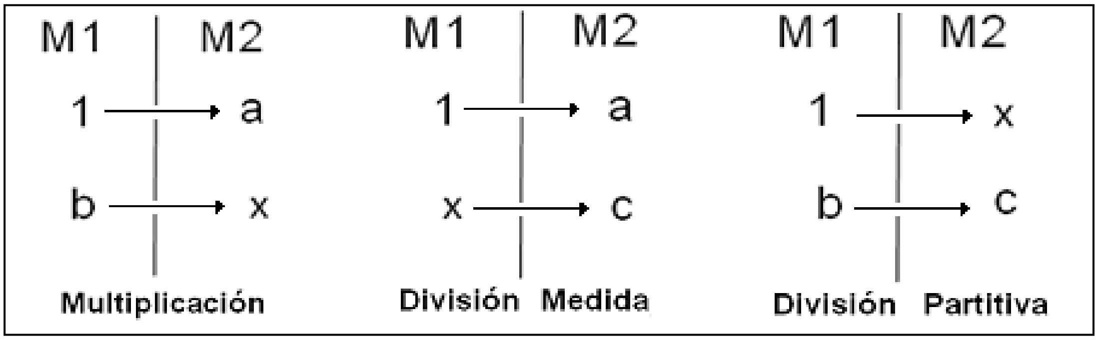


Figura 1. Tabla de correspondencia entre magnitudes en problemas de isomorfismos de medidas

El 'producto de medidas' es una estructura que engloba tres magnitudes M1, M2 y M3, una de las cuales es el producto cartesiano de la otras dos M1 x M2 = M3. Dentro de esta estructura se pueden distinguir dos subtipos de problemas: multiplicación, que consiste en encontrar la medida del producto, conociendo las medidas que se componen y división, donde hay que encontrar una de las cantidades elementales que se componen, conociendo la otra y la cantidad compuesta. Los problemas con 'un espacio de medida' contienen expresiones del tipo 'tantas veces más' o 'tantas veces menos'.

En cada uno de estos subtipos, encontramos subclases de problemas donde se considera el tipo de magnitud implicada, discreta o continua; o el conjunto numérico, entero o racional. En el caso de la división hay que considerar el cociente (entero, no entero mayor que 1, no entero menor que 1) y el significado del resto (unas veces hay que tenerlo en cuenta para dar la respuesta y otras se ignora; en ocasiones el resto es la respuesta o la respuesta incluye una parte fraccionaria para que no quede resto).

Nuestro objetivo es estudiar la relación entre dos tareas realizadas por EPM recién ingresados en la universidad: la resolución de problemas de estructura multiplicativa del tipo 'isomorfismo de medidas' y el análisis de diferentes soluciones dadas por alumnos de Primaria a estos mismos problemas; estas soluciones emplean la multiplicación, la división y otros métodos alternativos (sumas o restas repetidas, modelización con representaciones gráficas o métodos constructivos).

Método

Participantes. Los participantes de este estudio son 46 estudiantes para maestro de enseñanza primaria en su primer año de estudios, con una edad media de 19 años. En el momento de realizar la experiencia los estudiantes estaban recién ingresados en el centro universitario y no habían estudiado los problemas de estructura multiplicativa desde la perspectiva del conocimiento profesional.

Recogida de datos. Los datos son las respuestas de los EPM a las siguientes dos tareas:

1. Resolución de cuatro problemas de estructura multiplicativa del tipo 'isomorfismo de medidas' (Test 1).

2. Evaluación de cuatro soluciones dadas por alumnos de Primaria a cada uno de estos problemas: dando una puntuación (0, 0.5 ó 1) y justificándola (Test 2).

Problemas propuestos (Test 1)

Para verificar si el fenómeno observado por Verschaffel y col. (1997) de la relación entre la resolución de problemas y la forma en que los EPM analizan las soluciones dadas por alumnos de Primaria se produce con distintos tipos de problemas de estructura multiplicativa, se seleccionaron seis problemas de isomorfismo de medidas (3 de división-medida, 2 de división-partitiva y 1 de multiplicación) en los que aparecen diferentes conjuntos numéricos (naturales, fracciones y decimales) y tienen distintos niveles de dificultad (Tabla 1).

Los dos problemas de división-partitiva son relativamente fáciles: en ‘Faroles’ hay que hacer grupos de 3 farolas (35 divido entre 3) y tener en cuenta que el resto es 2; en ‘Leche’ el cálculo 4 ½ entre 6 puede resultar difícil, pero un dibujo permite obtener fácilmente la respuesta. Del mismo modo el problema de multiplicación ‘Losetas’ puede parecer difícil a priori, pero la respuesta se puede apoyar con un dibujo.

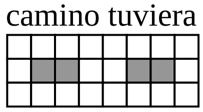
Los problemas de división-medida son los que presentan mayor dificultad: En ‘Pasteles’ es preciso conocer el significado de la división de un entero entre una fracción como división-medida e interpretar el resultado de la división 4 entre 3/5 (20/3) como ‘relación parte-todo’ para poder responder a las dos preguntas formuladas (lo que se reparte y lo que sobra), en el sentido de interpretar la fracción resultante 20/3 (20 = 3 x 6 + 2) como que se puede dar a 6 niños y sobran 2/5. Pero si la resolución se apoya en un dibujo se puede encontrar más fácilmente la respuesta.

Tabla 1. Categorización de los problemas propuestos en el Test 1

Tipo de Problemas	**Problemas**
División medida	**Pasteles** Tengo 4 pasteles. Tengo que dar 3/5 de pastel a cada niño. ¿A cuántos niños puedo dar, y qué me sobra? **Cuerdas** Un hombre quiere tener una cuerda suficientemente larga para tender entre dos postes que distan 12 metros, pero solo tiene trozos de 1,5 metros de largo. ¿Cuántos trozos necesitará para unir los dos postes? **Playa** 103 estudiantes universitarios planean un viaje a la playa. El autobús que contratan sólo tiene 20 plazas. El trayecto de la universidad a la playa es de 15 Km. Si no se puede sobrepasar el límite de plazas. ¿Cuántos viajes (ida y vuelta) realizará el autobús para trasladar a los estudiantes?

Continúa

Tabla 1. Categorización de los problemas propuestos en el Test 1 *(Continuación)*

División partitiva	**Farolas** Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió enumerar y pintar las farolas de los tres colores de su bandera. La número uno la pintó de rojo, la número dos de verde, la número tres de azul, y así sucesivamente. Si se pintaron 35 farolas. ¿Cuántas farolas se pintaron de cada color? **Leche** Se quiere distribuir 4 ½ litros de leche en 6 botellas iguales, repartiendo la misma cantidad de leche en cada botella. ¿Qué cantidad de litros de leche debo colocar en cada botella?
Multiplicación	**Losetas** En el jardín de mi casa queremos hacer un camino enlosado que vaya desde la casa a la piscina. El albañil ha propuesto un diseño combinando losetas claras y oscuras. El resultado variará según la longitud del camino. El siguiente dibujo muestra cómo se colocarían las losetas si el camino tuviera una longitud de dos metros  Si el camino tiene 5 metros y tengo 17 losetas oscuras y 47 losetas claras ¿Podré terminar el camino? ¿Sobrarán o faltarán losetas?

El problema ‘Playa’ presenta un obstáculo clásico pues hay que responder con el cociente por exceso (Carpenter, Lindquist, Matthews y Silver, 1983). Aunque el procedimiento más empleado suele ser la división y la respuesta más frecuente el cociente de esta división, con o sin decimales, sin atender al significado del cociente, también se han identificado otros procedimientos alternativos como sumas o restas repetidas o una multiplicación, que son más intuitivos aunque difíciles de aplicar cuando las cantidades que se manejan son grandes (Li y Silver, 2000). En este problema se ha introducido un dato pertinente pero superfluo para la resolución (15 km).

El problema ‘Cuerdas’ fue propuesto por Verschaffel et al. (1997) a EPM. La mayoría de los EPM se limitaron a hacer una división y respondieron sin considerar el aspecto realista de la situación, pues hay que tener en cuenta que al atar los trozos de cuerda se pierde cuerda, por tanto hay que añadir una unidad al cociente de la división entera.

Como sólo se disponía de una sesión de 50 minutos para aplicar cada uno de los Tests, se decidió proponer a cada EPM cuatro problemas para que tuvieran tiempo suficiente para responder: dos de división-medida, uno de división-partitiva y uno de multiplicación: a 22 se les propusieron los problemas ‘Pasteles’, ‘Cuerdas’, ‘Losetas’ y ‘Leche’, y a 24 los problemas ‘Playa’, ‘Farolas’, ‘Losetas’ y ‘Leche’.

Evaluación de las soluciones de los alumnos de Primaria (Test 2)

El Test 2 se elaboró con 4 soluciones dadas por alumnos de 6º curso de Primaria (11-12 años) a los problemas del Test 1. Para la selección se tuvieron en cuenta dos aspectos: el tipo de procedimiento empleado y la corrección o no del procedimiento y/o la respuesta.

Los procedimientos que se seleccionaron fueron ‘convencionales’, como la multiplicación o la división, y ‘alternativos’, como sumas o restas repetidas, modelización con una representación gráfica; y, constructivos, que han sido identificados en diversas investigaciones sobre este tipo de problemas (Li y Silver, 2000; Downton, 2009).

Se pedía a los EPM que evaluasen cada una de las soluciones de la siguiente manera: con 1 punto cuando creyesen que la respuesta era *totalmente correcta;* con 0 puntos si era *absolutamente incorrecta* y con medio punto (0.5) si era *parcialmente correcta*. Podían utilizar una misma puntuación cuantas veces considerasen necesario. En un recuadro con el título ‘comentarios’ debían escribir la explicación de la puntuación de cada solución. También se pedía que si no calificaban alguna solución expresasen la razón, y que si no entendían alguna solución lo indicasen.

Aplicación de los instrumentos. Las tareas se propusieron en dos momentos distintos: al inicio del curso (Test 1) y quince días después (Test 2). La aplicación fue de forma colectiva durante el horario de clase (50 minutos). Se explicó a los EPM el objeto del estudio, la forma de responder y su carácter voluntario. Así mismo, se brindó la posibilidad de solicitar aclaraciones a las preguntas en caso de duda.

Análisis de datos. Se analizaron, por una parte, las respuestas de los EPM al Test 1 tomando en cuenta el grado de corrección de la solución y el procedimiento de resolución y por otra, las puntuaciones numéricas al Test 2 y sus justificaciones. El análisis conjunto de estos datos permitió clasificar a los estudiantes en diferentes grupos que llamamos perfiles de comportamiento de los estudiantes.

Análisis conjunto de las respuestas al Test 1 y las calificaciones en el Test 2. La resolución de los problemas se clasificaron como ‘bien’, ‘regular’ o ‘mal’: ‘bien’ cuando el procedimiento de resolución y la respuesta eran correctos; ‘regular’ cuando el procedimiento era parcialmente correcto (por ejemplo con un error de conteo o de cálculo o que no hacía alusión al significado del resto de una división) y ‘mal’ si el procedimiento era incorrecto, aunque la respuesta fuese correcta. En cuanto al análisis de la puntuación de las soluciones, los investigadores asignaron una puntuación a cada una de las 4 soluciones de cada problema utilizando los mismos criterios que se le habían dado a los EPM. Se consideró que la puntuación de los EPM era correcta si coincidía con la asignada por los investigadores.

Perfiles de comportamiento de los estudiantes. Considerando que se ‘puntúa bien’ un problema cuando al menos tres puntuaciones coinciden con las asignadas por los expertos, los EPM se clasificaron en tres grupos atendiendo a las siguientes características:

1. Puntuaron bien exactamente los mismos problemas que resolvieron bien.
2. Puntuaron bien más problemas de los que resolvieron bien.
3. Puntuaron bien menos problemas de los que resolvieron bien.

Para explicar el comportamiento del grupo 2 se hizo un análisis de los errores cometidos por estos EPM en la resolución de aquellos problemas del Test 1 que resolvieron mal y puntuaron bien al menos 3 soluciones. Los errores se clasificaron en las siguientes categorías (Rico, 1995): datos mal utilizados, uso incorrecto del lenguaje, falta de verificación de la solución en problemas en que cada paso en la realización de la tarea es correcto pero el resultado final no es la respuesta a la pregunta planteada, o errores técnicos ya sean de cálculo, en la ejecución de algoritmos o repeticiones en un conteo.

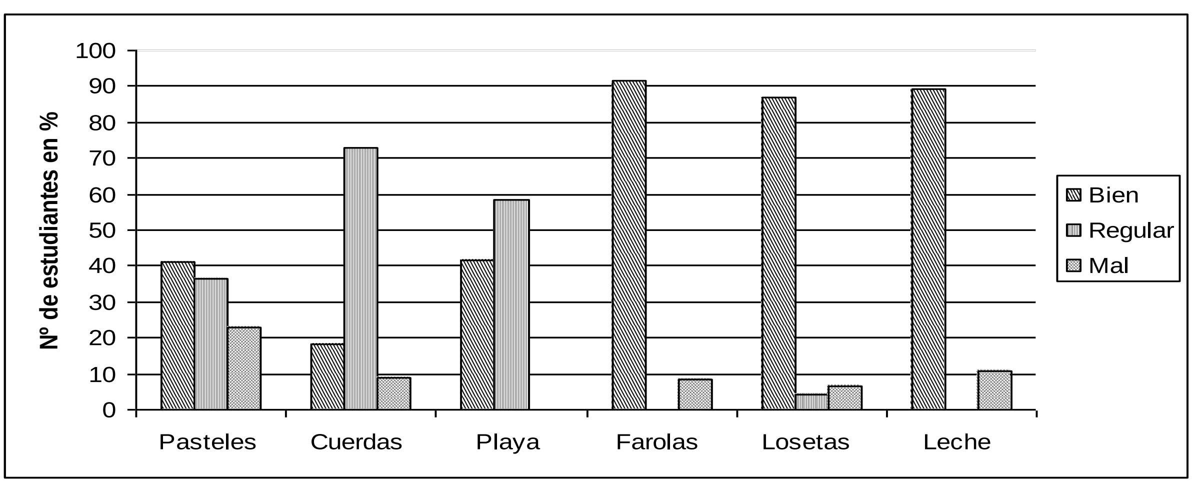
Para explicar el comportamiento del grupo 3 se hizo un análisis de las justificaciones dadas a las calificaciones de aquellos problemas que resolvieron bien y puntuaron mal. Las justificaciones se agruparon en las siguientes categorías: criterios didácticos de tipo general (por ejemplo, puntuar con 1 con la única condición de que la respuesta sea correcta); criterios específicos relativos a las estrategias de resolución (por ejemplo, valorar más la estrategia de la división que otras estrategias alternativas) o a los errores cometidos (por ejemplo, no tener en cuenta los errores de cálculo). Una misma justificación se podría encuadrar en más de una categoría.

Resultados

Los resultados los hemos organizado en dos secciones. En la primera se expone el éxito en la resolución de los problemas y en la puntuación de estos problemas por parte del grupo; en la segunda se expone el análisis de los perfiles de los estudiantes atendiendo a la relación entre el éxito en la resolución y en la evaluación.

Resolución de los problemas y puntuación de las soluciones. En la Figura 2 se muestra el porcentaje de EPM que resolvieron 'bien', 'regular' o 'mal' cada problema. Se observa que los problemas mejor resueltos fueron: 'Farolas', 'Leche', y 'Losetas' y los peor resueltos 'Pasteles', 'Cuerdas' y 'Playa'.

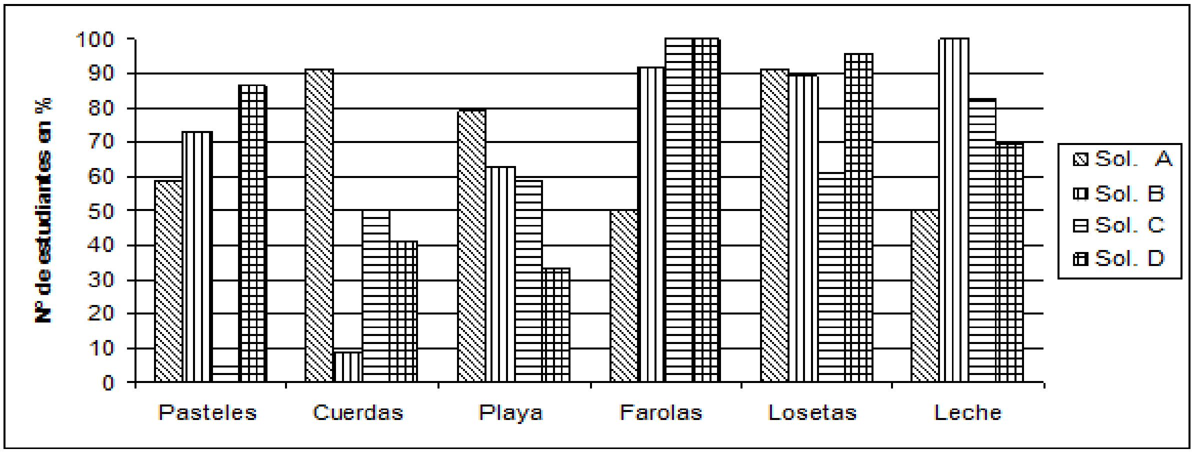
Figura 2. Porcentaje de EPM que resolvieron los problemas bien, regular o mal



Se puede constatar que los problemas mejor resueltos fueron los de multiplicación y división partitiva y los peor resueltos los de división medida. El problema en el que tuvieron mayor dificultad fue 'Cuerdas' donde hay que hacer consideraciones de tipo realista.

La Figura 3 muestra los porcentajes de soluciones bien calificadas en cada uno de los problemas.

Figura 3. Porcentaje de calificaciones asignadas por los EPM a cada solución que coincide con las asignadas por los investigadores



Comparando la Figura 3 con la Figura 2 se observa que: a) los problemas peor resueltos fueron los peor calificados y los mejor resueltos los mejor calificados; y b) el nivel de éxito ha sido mayor en la puntuación que en la resolución de los problemas.

Perfiles de estudiantes. Los estudiantes se subdividieron en tres grupos, que agruparon a 38 de los 46 participantes:

G1: Formado por los EPM que puntuaron bien exactamente los mismos problemas que resolvieron bien (10 EPM; 21.8%).

G2: Formado por los EPM que puntuaron bien más problemas de los que resolvieron bien (10 EPM; 21.8%).

G3: Formado por los EPM que puntuaron bien menos problemas de los que resolvieron bien (18 EPM; 39.1%).

Como el perfil G1 se corresponde con la tendencia general según hemos visto en los apartados anteriores, hemos estudiado los grupos G2 y G3, en concreto el tipo de errores cometidos por los EPM del grupo G2 en la resolución (Test 1) de aquellos problemas que resolvieron regular o mal y puntuaron bien (Test 2), y la justificación de la puntuación de aquellos EPM del grupo G3 que resolvieron bien un problema (Test 2) pero la puntuación no coincide con las asignadas por los expertos.

G2: *Problemas mal resueltos y bien calificados*

Estos estudiantes tuvieron los siguientes errores en la resolución de aquellos problemas que resolvieron mal y puntuaron bien:

1. Interpretación incorrecta del lenguaje:
2. Interpretación de que cada niño toma 3/5 de cada pastel ('Pasteles', 3 estudiantes).
3. Interpretación del número 4 ½ como 4:2 ('Leche', 1 estudiante).
4. Confusión del dividendo con el divisor ('Leche', 2 estudiantes).
5. Falta de precisión en la respuesta: ('Playa', 3 estudiantes y 'Pasteles', "me sobran 2 trozos de pastel", 1 estudiante).
6. Técnico: Mal recuento en 'Losetas' (1 estudiante).

G3: *Problemas bien resueltos y mal calificados*

Los estudiantes que resolvieron bien algún problema pero no lo puntuaron bien expusieron razones relacionadas con criterios de evaluación de tipo general o específico o mostraron deficiencias en su conocimiento matemático.

Criterios generales:

1. Si el procedimiento es correcto se debe dar al menos 0,5 puntos, sin que importe el tipo o el número de errores cometidos a lo largo del mismo (2 estudiantes).
2. Si la respuesta es correcta, aunque no lo sea el procedimiento, se debe calificar con al menos 0,5 puntos y si la respuesta no es correcta se debe calificar con 0 puntos (1 estudiante).
3. 0,5 puntos si se ha hecho algo bien, sin más consideraciones (transformar 4 ½ en la fracción 9/2 en la solución D del problema 'Leche', 4 estudiantes).

Criterios específicos: Valorar prioritariamente la realización de una división aunque presente errores como invertir los términos o realizar mal el algoritmo (5 estudiantes).

1. Problema 'Playa': 1 estudiante considera que el procedimiento adecuado es la división (soluciones A y D), aunque presente errores, pero no las sumas o restas repetidas (soluciones B y C).
2. Problema 'Pasteles': 3 estudiantes puntuaron la solución C con 0,5 puntos por el sólo hecho de hacer una división de fracciones, a pesar de que invierte los términos de la división.
3. Problema 'Leche': 1 estudiante califica las soluciones A, B y C con 1 punto por el hecho de dividir.
4. Las estrategias 'sumas o restas repetidas' o la realización de una representación gráfica se consideran poco elaboradas, y aunque el problema esté bien resuelto se califica con 0 ó 0.5 (2 estudiantes).

Conocimientos matemáticos:

1. No advertir errores, en concreto respuestas poco precisas en 'Pasteles' y 'Cuerdas' (4 estudiantes)
2. Identificar más errores de los que hay en el problema 'Playa' (1 estudiante).

Conclusión y Discusión

El objetivo de este artículo es estudiar la relación entre dos tareas realizadas por EPM recién ingresados en la universidad: la resolución de diferentes tipos problemas de estructura multiplicativa de 'isomorfismo de medidas' y el análisis de varias soluciones dadas por alumnos de Primaria a estos mismos problemas. El estudio se ha hecho desde dos perspectivas: la tendencia global del grupo y la identificación de diferentes perfiles.

En el momento de recoger los datos de este estudio, los EPM debían disponer de conocimientos dentro del campo conceptual de las estructuras multiplicativas con números naturales, fracciones y decimales como significados de las operaciones de multiplicación y división y de sus términos y realización de los algoritmos de la multiplicación y división, que eran suficientes para resolver con éxito las tareas propuestas (Test 1), pero aún no habían recibido 'conocimiento de contenido pedagógico' sobre este tema, pues estaban iniciando sus estudios para maestro, para responder al Test 2.

Estudio global del grupo

El resultado del estudio global de las respuestas de los EPM indica que los problemas mejor resueltos fueron el de multiplicación y los dos de división-partitiva y los peor resueltos los tres de división-medida; en dos de estos últimos ('Cuerdas' y 'Playa') hay que hacer también consideraciones de tipo realista para dar la respuesta correcta. Estos resultados concuerdan con los de Ball (1990) que muestran que el conocimiento matemático adquirido por los EPM en la etapa previa a la universidad acerca de la división es insuficiente para la realización de tareas profesionales relacionadas con el significado de la división. Uno de los contextos utilizados por esta autora es la división de fracciones; en nuestra investigación propusimos dos problemas de este tipo: 'Pasteles', de división-medida y 'Leche' de división-partitiva. Esta autora refiere que los participantes en la investigación, futuros profesores de primaria y secundaria, consideran el significado de la división como partición y no como medida, lo que puede explicar el poco éxito en el problema 'Pasteles' y el mayor éxito en el problema 'Leche'.

Además los problemas mejor resueltos fueron los mejor calificados y los peor resueltos los peor calificados, pero en cada uno de los problemas una o varias soluciones han sido evaluadas con un porcentaje mayor de éxito que el obtenido en la resolución (Figuras 2 y 3). Esto puede deberse a que es más fácil reconocer y discriminar una solución correcta que producirla, y una vez identificada se pueden valorar otras soluciones a partir de la misma. En las soluciones propuestas para calificar había una o dos correctas en las que se empleaban métodos como la modelización con un dibujo o sumas y restas repetidas, que aunque son de difícil aplicación cuando los datos del problema son números grandes, son más intuitivas para relacionar la estrategia utilizada con la situación descrita en el problema (Li y Silver, 2000).

Entre los problemas peor resueltos y peor evaluados figuran dos problemas en que hay que hacer consideraciones de tipo realista ('Cuerdas' y 'Playa'); en ellos los EPM excluyen el conocimiento del mundo real tanto para dar la respuesta a estos problemas (60% en 'Playa' y

82% en 'Cuerdas') como para evaluar las soluciones. Este resultado concuerda con el obtenido por Verschaffel et al. (1997) que muestra una fuerte tendencia entre los EPM a excluir el conocimiento del mundo real tanto para dar soluciones a los problemas escolares como para valorar las respuestas de los alumnos.

Perfiles de EPM

La caracterización de perfiles de estudiantes matiza los resultados globales en el sentido de que sólo 10 EPM (21.8%) resuelven y evalúan bien los mismos problemas. Hemos identificado EPM que resuelven bien un problema y no saben calificar correctamente al menos 3 soluciones del mismo (18 EPM; 39.1%) y otros que resuelven mal un problema y evalúan bien al menos 3 soluciones (10 EPM; 21.8%). Ante ello nos hemos preguntado:

1. ¿Cómo podemos explicar que algunos EPM que no han sabido resolver un problema, han sabido evaluarlo?

2. ¿Por qué algunos EPM que han sabido resolver un problema no han sabido evaluarlo?

Se podría dar una posible respuesta a la primera pregunta desde la propia naturaleza de la tarea propuesta en el Test 2. En efecto, la 'calificación de tareas' se utiliza en el marco de la 'enseñanza diagnóstica en matemáticas' (Bell, 1987) en los niveles obligatorios de la enseñanza. Esta propuesta de enseñanza de las matemáticas considera que la calificación debidamente justificada de tareas es potencialmente útil para provocar lo que Piaget denomina conflicto cognitivo y adecuada para provocar la reflexión y la discusión. En nuestro caso, el análisis de cuatro soluciones a un mismo problema, ha podido ayudar a los estudiantes a comprenderlo, a discriminar las soluciones correctas de las que no lo son y a identificar los errores cometidos. En este sentido creemos que proponer este tipo de tarea profesional puede ayudar a los EPM a profundizar en los problemas de estructura multiplicativa desde una perspectiva profesional abordando las tipologías de problemas de estructura multiplicativa atendiendo a distintas variables didácticas; la extensión de la multiplicación y división con naturales a otros conjuntos numéricos como fracciones o decimales; los niveles de dificultad de los distintos tipos de problemas; las formas de abordar los errores cometidos por los alumnos de Primaria en la resolución de los problemas; o las ventajas e inconvenientes del uso de distintos sistemas de representación.

Por otra parte, algunos estudiantes que resolvieron bien algún problema no supieron evaluarlo bien. El análisis de las justificaciones permite explicar que este resultado puede deberse a la dificultad de identificar errores o a los criterios de evaluación utilizados, ya se trate de criterios de tipo general o sobre la evaluación de tareas matemáticas en particular. Esto pone de manifiesto que la realización de las tareas que se piden en el Test 2 puede ayudar a explorar los criterios de los EPM sobre la evaluación en matemáticas y a trabajarlas desde los marcos teóricos de Didáctica de la Matemática. Este trabajo muestra que más allá de los resultados obtenidos podemos decir que las tareas propuestas en este trabajo pueden ser potencialmente útiles para construir los conocimientos necesarios para enseñar matemáticas.

Por tanto nuestra investigación muestra que la relación entre la resolución de un problema de estructura multiplicativa y la forma de calificar no es causal debido por un lado a que es más fácil identificar una solución correcta que elaborarla (problemas mal resueltos y bien calificados), por otro a que los conocimientos profesionales son a veces insuficientes para valorar estrategias alternativas a la multiplicación y a la división o a que los EPM tienen creencias inadecuadas relativas a este tipo de problemas y a los criterios de evaluación (problemas bien resueltos y mal calificados).

Referencias

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education , 21*(2), 132-144.

Bell, A. (1987). Diseño de enseñanza diagnóstica en matemáticas. En Álvarez, A. (Comp.): Psicología y educación. Realizaciones y tendencias actuales en investigación y en la práctica. Actas de las II jornadas internacionales de psicología y educación (pp. 73-93). Madrid: Visor.

Campbell, S. R. (2002). Coming to terms with division preservice teachers' understanding. In S.R. Campbell & R. Zazkis (Eds.), *Learning and Teaching Number Theory. Research in Cognition and Instruction* (pp. 15-40). Westport, CT: Greenwood.

Carpenter, T. P., Lindquist, M. M, Matthews, W. & Silver E. A. (1983). Result of the third NAEP Mathematics Assessment: Secondary School. *Mathematics Teacher*, 76(9), 652-659.

Castro, E. & Castro, E. (1996). Conocimiento de contenido pedagógico de los estudiantes de magisterio sobre la estructura multiplicativa. En J. Jiménez, S. Llinares & V. Sánchez (Eds.): *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 119-141). Granada: Comares.

Cos, A. & Valls, J. (2006). Debates virtuales y concepciones de estudiantes para maestro sobre resolución de problemas. *Zetetiké 14* (25), 7-28.

Downton, A. (2009). A study of comparative performance on partitive and quotitive division in solving division word problems. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M.& Sakonidis, H. (Eds). *Proceedings of the International Group for the Psicology of Mathematics Education*. (Vol. 2, pp 465-472). Thessaloniki, Greece: PME.

Li, Y. & Silver, E.A. (2000). Can younger students succeed where older students fail? An examination of third graders' solutions of a division-with-remainder (DWR) problem. *Journal of Mathematical Behavior, 19*(2), 233-246.

Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 51*, 92-101

Llinares, S. & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teacher and teacher educator as learners. En: A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 429-459). Rotterdam: Sense Publishers

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de la Matemática. En: J. Kilpatrick, P. Gómez & L. Rico (Eds.): *Educación Matemática* (pp. 69 – 108). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Shulman, L. S. (1989). Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: Una perspectiva contemporánea. En M.C. Wittrock (Ed.), *La investigación de la enseñanza, I. Enfoques, teorías y métodos* (pp. 9-91). Barcelona: Paidós/MEC.

Vergnaud, G. (1997). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* México: Trillas.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? En G. Harel & J. Confrey (Eds.): *The development of multiplicative reasoning in the learning of the mathematics* (pp. 41-59). Nueva York: State University of New York Press.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Borghart, E. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction*, *7*(4), 339-359.

Las Autoras

María Luz Callejo de la Vega, Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante, España. Licenciada en Ciencias Matemáticas y Doctora en Didáctica y su Disciplina, opción Matemáticas por la universidad de Paris 7. Profesora de didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Alicante. Área Didáctica de la matemática, línea Desarrollo Profesional del Profesorado. Correo: luz.callejo@ua.es

Maximina del Carmen Márquez Torres, Licenciada en Educación Mención Matemática y Física, Candidata a Doctora del Doctorado Formación e Investigación Didáctica: Didáctica de la Matemática de la Universidad de Alicante, España. Profesora de Matemáticas de la Escuela Técnica Industrial Capitán Anselmo Belloso, Maracaibo, Venezuela. Línea: Desarrollo Profesional del Profesorado. Correo: maximina.marquez@gmail.com