PARADIGMA, Vol. VII, Nos. 1 y 2, Junio–Diciembre de 1986

LA CONSTRUCCION DEL CONOCIMIENTO MATEMATICO EN NIÑOS DE EDUCACION BASICA*

DELIA LERNER DE ZUNINO
Fundación ME–VAL

RESUMEN

El propósito hacia el cual tiende la educación matemática se deriva de la concepción que se sustente acerca del proceso de aprendizaje y acerca de la Matemática misma. Si se considera que el niño sólo puede aprender recibiendo conocimientos impartidos por los docentes y los libros; si se piensa que la Matemática es un saber acabado e inmutable, el propósito de la enseñanza de la Matemática será lograr que los niños reproduzcan más o menos mecánicamente esos conocimientos que otros produjeron. Si, en cambio, se concibe a la Matemática como una ciencia en permanente construcción y se considera al niño como un ser activo intelectualmente, capaz de crear instrumentos que le permitan resolver los problemas que se le plantean, el propósito hacia el cual se orientará la acción educativa será mucho más ambicioso: lograr que el niño se apropie del modo de producción del conocimiento matemático. En el presente trabajo se relata una experiencia vivida por la autora con niños de tercer grado que pone en evidencia que, cuando se crean las condiciones adecuadas, sí es posible lograr que los niños construyan el conocimiento matemático.

---

* Trabajo presentado en el V Encuentro sobre Enseñanza de la Matemática, CENAMEC, Caracas 12–16/05/86.

Hace muchos años, un niño de tercer grado me preguntó: "¿Por qué la división se hace al revés que las demás cuentas?". Un tanto sorprendida, le pedí que me explicara mejor su pregunta. Con la ayuda de sus compañeros, la reformuló entonces en los siguientes términos: "Cuando uno suma, resta o multiplica, empieza por las unidades, sigue por las decenas, etc. Cuando uno divide, empieza por el número más grande —es decir, por el valor posicional mayor— y sólo al final divide las unidades. ¿Por qué?. Les dije que nunca se me había ocurrido plantearme esa interesante pregunta. Un niño agregó: "Yo pienso que, como en la división se reparte, es mejor repartir primero lo más grande y después lo más pequeño". Uno de sus compañeros objetó: "Sí, pero en ese caso tendría que pasar lo mismo en la resta, porque también sería lógico quitar primero de los números más grandes y después de los más chiquitos".

Les propuse que retomaríamos el problema al día siguiente, una vez que hubiera reflexionado lo suficiente como para encontrar junto con ellos una respuesta. Unas cuantas horas de trabajo con varias maestras de la escuela —resolviendo muchas sumas, restas, multiplicaciones y divisiones— nos revelaron que cualquiera de esos cálculos podía resolverse "al derecho" y "al revés", que era posible llegar al resultado correcto tanto comenzando por el valor posicional inferior como por el superior. Descubrimos también que, en algunos casos, los dos métodos eran igualmente económicos pero, en otros casos, resultaban mucho más económica la dirección convencional.

¿Cómo comunicar a los niños estos descubrimientos?. En ese entonces ya sabíamos que los descubrimientos no se transmiten, lo único que puede hacerse es crear las condiciones para que los demás también tengan la oportunidad de hacerlos. Por lo tanto, al volver al aula, no pretendimos explicar a los niños las soluciones que habíamos encontrado. Les dijimos, en cambio, que, para encontrar una respuesta a la pregunta que ellos se habían formulado, era necesario hacerse antes otra pregunta: ¿Es obligatorio multiplicar, sumar, restar y dividir en la forma habitual o bien es posible hacerlo también en dirección inversa?.

Las opiniones de los niños fueron diversas y pueden resumirse en las tres siguientes:

- No se puede hacer al revés
- Se puede, pero no dará el mismo resultado
- Se puede y dará el mismo resultado

Propusimos entonces buscar juntos formas de verificar o rechazar las diversas hipótesis planteadas. Opinaron que era necesario intentar resolver todas las operaciones en las dos direcciones y que lo más fácil era empezar por la suma. Cada niño inventó y resolvió una suma, pero esto no permitió llegar a un acuerdo: algunos sostenían que se obtenía el mismo resultado haciéndolo de cualquiera de las dos formas, otros sostenían que no era así. Decidimos entonces analizar las sumas que ellos habían hecho, para determinar las semejanzas y diferencias que pudieran existir entre las cuentas que permitían obtener el mismo resultado en las dos direcciones y las que, según ellos, no lo permitían.

Sumas que permiten obtener el mismo resultado cualquiera sea la dirección utilizada al resolverlas:		Sumas cuyo resultado varía en función de la dirección en que se resuelven:	
$\begin{array}{r} 1326 \\ 612 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 125 \\ +\ 233 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 23 \\ +\ 38 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 153 \\ +\ 87 \\ \hline \end{array}$

Al comparar varias cuentas de cada clase, los niños descubrieron que, en el primer caso, se trataba de situaciones que no requerían ninguna reagrupación —sumas "sin dificultad"— en tanto que, en el segundo, era necesario reagrupar. Por lo tanto, en este último caso, los resultados que se obtenían al realizar la operación de izquierda a derecha era absurdos: como no se podía pasar al lugar de las decenas la nueva decena formada al reunir las unidades, se obtenían números mucho mayores de lo que era lógico esperar a partir de los sumandos.

Ejemplos:

$$\begin{array}{r} 23 \\ + \underline{38} \\ 511 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 52 \\ + \underline{38} \\ 810 \end{array}$$

Dije que me parecía muy raro que se pudiera obtener el mismo resultado en unos casos y no en otros y propuse buscar algún procedimiento que permitiera resolver el problema que nos planteaban las sumas en las que era necesario reagrupar. Después de una discusión en pequeños grupos, a lo largo de la cual los niños volvieron a hacer muchas sumas en ambas direcciones, varios de ellos encontraron la solución: formular una regla suplementaria que permitiera, aún cuando la suma se realizara "al revés", realizar la reagrupación en la dirección convencional.

Ejemplos:

$$\begin{array}{r} 328 \\ + \underline{584} \\ 802 \\ + \underline{11} \\ 912 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 275 \\ + \underline{896} \\ 1061 \\ + \underline{11} \\ 1171 \end{array}$$

Todos los niños consideraron que éste era el único procedimiento posible, puesto que, si no se utilizaba, había que colocar las decenas en el lugar de las centenas y esa era la razón por la cual los resultados eran tan absurdos.

Una vez logrado el acuerdo, les preguntamos: "Si se puede obtener el mismo resultado en las dos direcciones ¿por qué será que hacemos las sumas empezando por las unidades?". La respuesta fue unánime: " ¡Porque es más fácil ". Sin embargo, algunos niños dijeron que era más interesante hacerlo "al revés" porque uno se veía obligado a "pensar más". Pregunté en qué era necesario pensar tanto y ellos respondieron: "Uno no se puede olvidar qué es lo que está sumando, hay que prestar atención todo el tiempo para saber si se trata de decenas o de centenas".

Luego seguimos un proceso similar para las otras operaciones —muy rápido para la resta y la multiplicación, más difícil en el caso de la división— y los niños comprobaron que las conclusiones a las que habíamos llegado con respecto a la suma eran generalizables a las otras cuentas.

La actividad que acabamos de relatar no estaba en nuestro programa, no respondía a ningún objetivo específico previamente planteado y, en este sentido, puede clasificarse como "actividad no—formal" aunque se haya desarrollado en el marco del aula. Ahora bien, si aplicamos este criterio, casi todas las actividades que realizamos son no—formales, porque nuestro programa se ve permanentemente enriquecido con situaciones que surgen a partir de los problemas que los niños se plantean. Estos problemas son siempre legítimos y pertinentes si los analizamos a la luz del propósito general que perseguimos.

Pensamos que el propósito hacia el cual tiende la educación matemática se deriva de la concepción que se sustente acerca del proceso de aprendizaje y acerca de la Matemática misma. Si se considera que el niño sólo puede aprender recibiendo conocimientos impartidos por los docentes y los libros, si se piensa que la Matemática es un saber acabado e inmutable, el propósito de la enseñanza de la Matemática será lograr que los niños reproduzcan más o menos mecánicamente esos conocimientos que otros produjeron. Si, en cambio, se concibe a la Matemática como una ciencia en permanente construcción y se considera al niño como un ser activo intelectualmente, capaz de crear instrumentos que le permitan resolver los problemas que se le plantean, el propósito hacia el cual se orientarán las acciones será mucho más ambicioso: lograr que el niño se apropie del modo de producción del conocimiento matemático.

Este último es el camino que ha elegido ME—VAL[1] por eso, los problemas que los niños se plantean nos parecen siempre legítimos, porque plantearse problemas, inventar y poner a prueba diversas formas de resolverlos es la única vía posible para reconstruir los conocimientos y los instrumentos que hacen posible su producción.

Ahora bien, formular este propósito es mucho más sencillo que llevarlo a la práctica. Duckworth (1981) una educadora cuyo trabajo se fundamenta, como el nuestro, en la teoría piagetiana afirma que la esencia de la pedagogía es dar a los niños la ocasión de tener ideas brillantes[2] y agrega: "Este criterio ofrece dos aspectos:

— La pregunta correcta formulada en el momento exacto puede llevar a los niños a cumbres en su pensamiento que redundan en significativos pasos adelante y en verdadero estímulo intelectual.

— Aunque resulta casi imposible para un adulto detectar exactamente el momento preciso para hacer una pregunta específica a un niño determinado (especialmente para una maestra encargada de 30 o más niños), los pequeños pueden formularse la pregunta adecuada si el escenario es correcto.

¿Cuál es el escenario correcto?. ¿Cómo fue posible que los niños de nuestro relato, por ejemplo, se formularan una pregunta que jamás se les había ocurrido a sus maestros? Creemos que esto fue posible porque sabían que estaba permitido equivocarse y que el error es la única forma de llegar a la verdad, porque estaban acostumbrados a confrontar sus opiniones con las de los demás, a analizarlas críticamente y a poner a prueba las hipótesis que el grupo considerara verosímiles.

Esperamos que estas características del ambiente en el cual se desenvuelve nuestro trabajo estén suficientemente ilustradas por la actividad que hemos relatado al comienzo. Nos gustaría, en cambio, dar algunos ejemplos de otro aspecto que consideramos esencial para lograr que los niños construyan el conocimiento matemático: los problemas que nosotros les planteamos a ellos.

Cuando se aborda un tema nuevo, lo tradicional es que el docente comience por explicarlo para proponer luego a los niños ejercicios y pro-

blemas a través de los cuales ellos apliquen los conocimientos adquiridos. Nosotros empezamos por el final, empezamos planteando problemas.

Cuando iniciamos —en 2do. grado— el trabajo en multiplicación, por ejemplo, lo hacemos enunciando dos o tres situaciones que se resuelven a través de esa operación. En general, los niños encuentran de inmediato la solución. Supongamos que el primer problema propuesto fuera el siguiente: "Tengo tres cajitas y quiero poner dos lápices en cada una ¿cuántos lápices tengo que comprar?". Lo más habitual es que los niños establezcan una correspondencia utilizando para ello sus propias manos: "Estos (tres dedos de la mano izquierda) son las cajas y éstos (dos dedos de la mano derecha) son los lápices. Pongo dos lápices aquí, dos aquí.... préstame un dedo, por favor... son seis lápices".

Después de proponer otras dos o tres situaciones problemáticas, les pedimos que inventen ellos mismos otras parecidas. Así lo hacen y las resuelven utilizando materiales del aula. Proponemos entonces reflexionar acerca de las semejanzas y diferencias entre los diversos problemas. Al comparar las situaciones que quedaron representadas con material concreto, los niños dicen: "aquí a cada caja le corresponden dos lápices", "allí a cada niño le corresponden cinco bombas", "en este otro a cada torta le corresponden ocho velitas...". Preguntamos: "¿qué fue lo que hicieron Uds.?" Responden: "Siempre a cada cosa le hicimos corresponder varias otras cosas. A veces poníamos dos por cada una, otras veces cinco por cada una..."

Tal como lo demostraron Piaget y Szeminska (1967) se comprueba una vez más que los niños no necesitan la intervención de la enseñanza sistemática para construir la correspondencia multiplicativa.

En otros casos, encontrar la solución del problema planteado por los adultos no resulta tan fácil. Voy a dar un ejemplo concreto: estamos en quinto grado y nos proponemos comenzar a trabajar sobre adición de fracciones de diferente denominador. Preguntamos: "¿Cómo podríamos hacer para sumar 1/2 y 1/4?". Primera respuesta: ¡"Muy fácil $1 + 1 = 2$ y $2 + 4 = 6$, son dos sextos". Ante el silencio pensativo de los otros niños, el coordinador de la actividad propone: "Vamos a ver si es cierto, imaginemos que alguien nos regaló una torta, ayer comimos la mitad y hoy comimos una cuarta parte ¿cuánto comimos hasta ahora?" Alguien responde: "¡Ya se, comimos un medio coma dos". Le pedimos que nos explique mejor su idea, entonces escribe $\frac{1}{2{,}2}$ y dice: "Comimos la mitad (1/2) más la mitad de la mitad (señalando el 2 que está a la derecha de la coma "decimal". Aunque se aleja mucho de lo convencionalmente aceptado, nos parece una representación muy buena del resultado de la suma, ya que 1/2 está tomado como una unidad y se indica —después de la coma— una fracción de esa unidad que, indudablemente, resulta de una nueva división por dos. Sin embargo, al pedir su opinión a los otros niños, vemos muchas caras de duda. Preguntamos entonces: "¿Alguien tiene otra idea?". Los niños comienzan a dibujar "tortas" y a partirlas en mitades o en cuartos. Un niño exclama: "¡No sé cómo sumar medios con cuartos! " "Ese es el problema precisamente —contestamos— ¿cómo hacer para sumar partes diferentes?". "No se puede " —dicen— pero alguien agrega: "¡Lo que hay que hacer es transformarlas en lo mismo ". Todos pensamos que es una excelente idea pero... ¿cómo hacerlo?. Nosotros preguntamos: "¿Transformamos el cuarto en medios? Ellos se ríen y dicen "Tendríamos que habernos comido 2/4 y nos comimos uno solo?. ¿Y entonces? Varios gritan: "Ah transformamos el medio en cuartos, ¡nos comimos tres cuartas partes de la torta".

Les recordamos que uno de los niños había dicho al principio que $1/2 + 1/4 = 2/6$. El mismo ya no está de acuerdo, sin embargo proponemos buscar una forma de verificar la diferencia entre 2/6 y 3/4. Los niños dibujan nuevamente, pero ahora parten las "tortas" en sextos. Se dan cuenta inmediatamente de que 2/6 es menos de la mitad de la torta y que, por ello, sería imposible que $1/2 + 1/4$ fuera igual a 2/6.

Preguntamos: "¿Para qué nos sirvió esta actividad? ¿qué descubrimos?. Los niños contestan:

- Que no se pueden sumar directamente fracciones que se obtienen partiendo "la torta" de diferentes maneras.

- Que, para poder sumar, hay que transformarlas en "lo mismo".

- Que hay fracciones que "se dicen" y "se escriben" en forma diferente, pero que significan lo mismo.

Preguntamos si esta última afirmación es válida sólo para las fracciones sobre las que hemos trabajado ($1/2 = 2/4$) o si lo será también para otras. Cómo podemos verificarlo?. Otra actividad comienza... La equivalencia entre fracciones no apareció como un "punto del programa", sino como un instrumento, para resolver un problema.

Por otra parte, si bien es cierto que nosotros comenzamos al revés de lo que tradicionamente se hace —por el final— también es cierto que nunca llegamos al principio: nunca explicamos el tema. Piaget ha dicho que, cuando un adulto explica a un niño cómo resolver un problema, está impidiendo que él lo reinvente. Y D. Hawkins citado por Duckworth (1981) —refiriéndose al desarrollo del curriculum— agrega: "No se quiere cubrir un tema, sino descubrirlo".

Si la función del docente no es explicar ¿cuál es entonces?. Esperamos que nuestros ejemplos hayan logrado mostrar que su función —que es esencial para el desarrollo del proceso— consiste en formular problemas que los niños no se hubieran planteado espontáneamente, propiciar la formulación de hipótesis, alentar a los niños a poner a prueba sus ideas y a reflexionar sobre sus acciones, favorecer la discusión entre los niños, coordinar los intercambios entre ellos de tal modo que se evidencien las contradicciones y se intente llegar a acuerdos, proponer contra—ejemplos que lleven a revisar las hipótesis planteadas.

Para hacer esto, es imprescindible haber asumido como propios algunos de los descubrimientos fundamentales de la Psicología Genética, cuales son:

- El niño construye activamente el conocimiento
- Esta construcción no comienza cuando el docente decide enseñar una noción o plantear un problema, sino cuando la estructura cognoscitiva del sujeto —que se enriquece y complejiza a partir de su interacción permanente con el medio— lo hace posible.
- El error no es una desviación del proceso de aprendizaje, sino un aspecto constitutivo y necesario del mismo.
- La cooperación es uno de los factores esenciales para el avance del proceso constructivo.
- El conocimiento matemático prolonga naturalmente la lógica de las acciones y consiste en abstraer las propiedades de estas acciones y de la forma en que ellas se coordinan.

Desde hace un tiempo, la práctica pedagógica —al menos en la escuela primaria— ha comenzado a incorporar la idea de que el aprendizaje de la Matemática debe basarse en la ejecución, por parte de los niños, de acciones concretas sobre objetos también concretos. Esto es alentador, pero no es suficiente. Si la acción está supeditada a indicaciones suministradas por el maestro ("Toma tres paletas, ahora agrega otras cuatro ¿cuántas paletas tienes?"), el niño manipulará objetos, pero no estará actuando intelectualmente. La acción efectiva tiene sentido en la medida en que surja como medio para resolver un problema, para verificar o rechazar hipótesis previamente formuladas, para reflexionar y discutir acerca de los resultados de la acción, para inferir a partir de éstos las propiedades de la acción que los generó, para descubrir semejanzas cuantitativas entre acciones cualitativamente diferentes, para comparar los resultados que se obtienen al coordinar de diversas maneras las acciones...

Hemos intentado compartir con Uds. algunos de los aspectos básicos de la Propuesta Pedagógica de ME—VAL. Esperamos que este trabajo haya planteado algunos nuevos problemas a los educadores que —como nosotros— están preocupados por encontrar caminos que ayuden a los niños a apropiarse del conocimiento matemático.

NOTAS

[1] ME—VAL es una Fundación que, en forma conjunta con el Ministerio de Educación, desarrolla un Programa de Educación Creativa. Tiene su sede en la Calle Cristóbal Rojas, Quinta "Inés Magdalena", Urbanización Santa Mónica, Caracas.

[2] Nos parece oportuno aclarar la concepción de la autora acerca de las "ideas brillantes" utilizando sus propias palabras: "Las ideas brillantes a las que me refiero no tienen por qué parecerlo al mundo exterior. No advierto diferencias entre las que puedan haber tenido ya otras personas y las que nadie ha tenido todavía. Es decir, que la naturaleza de los actos intelectuales creativos es siempre la misma; trátese de un bebé que por primera vez establece la relación entre ver las cosas y tomarlas; de un niño —como Kevin— que tuvo la idea de poner los pitillos según el orden de longitud; de un cocinero que crea una nueva salsa o de un astrónomo que desarrolla una nueva teoría sobre la creación del universo. En todos los casos, se establecen nuevas relaciones entre cosas que ya se dominan. Cuanto más ayudemos a los niños a tener sus ideas brillantes y a sentir satisfacción por ello, más posible será que algún día ellos tengan alguna que a nadie se le había ocurrido antes".

REFERENCIAS

DUCKWORTH, Eleanor. "El Tener Ideas Brillantes" en Piaget en el Aula, M. Scwebel y J. Raph (compiladores), Buenos Aires: Ed. Huemul 1981.

PIAGET, J. y A. Szeminska. La Génesis del Número en el Niño. Buenos Aires: Editorial Guadalupe, 1967.