PARADIGMA, VOL. VIII, No. 2, Diciembre de 1987

TRASCENDENCIA DE LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MATEMATICA

Fredy E. González
Departamento de Matemática
Instituto Universitario Pedagógico
Experimental de Maracay

RESUMEN

En este trabajo se muestra, de manera sucinta, cómo se ha desarrolado la Matemática a partir de los esfuerzos por resolver los problemas que ella misma se plantea; por esto, se sostiene que la resolución de problemas es una actividad de trascendental importancia en Matemática, no sólo porque contribuye al desarrollo de la misma como ciencia sino, además, porque posibilita la transferencia del aprendizaje, mejora la capacidad analítica, incrementa la motivación y contribuye a una mejor comprensión de la naturaleza de la Matemática. Además de lo anterior, también se establecen cuáles son los factores que deben estar presentes en una determinada situación para que ésta se convierta en un problema para un individuo en particular. Así, se sostiene que en todo problema, para que sea tal, deben darse factores objetivos (propios de la situación) y factores subjetivos (inherentes al sujeto que debe enfrentar la situación). Se establecen diferencias entre problemas y ejercicios y, finalmente, se detallan los Modelos de Resolución de Problemas mas conocidos (Dewey, Polya, Bell).

La Resolución de Problemas como Factor de Desarrollo de la Matemática

La resolución de problemas ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de la Matemática; muchas de sus ramas han surgido como consecuencia de la búsqueda de solución a problemas que han llamado la atención de numerosos matemáticos de diversas épocas. Mencionaremos a continuación algunos de los problemas que han tenido singular importancia para el desarrollo de la matemática.

El Problema de la Trisección del Angulo

Este problema condujo a importantes descubrimientos matemáticos en la teoría de ecuaciones. Dicho problema consiste en dividir un ángulo arbitrario en tres partes iguales usando, solamente, regla y compás; forma parte de una clase mucho más amplia de problemas de geometría que involucran la construcción de figuras utilizando únicamente una regla y un compás. El problema general se plantea en los siguientes términos: ***¿Cuáles problemas pueden resolverse usando sólo regla y compás?***.

La solución general de este problema fue proporcionada por Evariste Galois (1811—1832). El proceso para llegar a la solución fue el siguiente: Cada una de las etapas de un problema a resolver con regla y compás se reduce a una ecuación de primero o de segundo grado y, por consiguiente, todos los problemas resolubles con regla y compás se reducen a una ecuación algebráica con una incógnita cuya solución implica la extracción de una cadena de raíces cuadradas. Recíprocamente, si la solución de un problema geométrico se reduce a la solución de una ecuación algebraica de ese tipo, dicho problema puede ser resuelto con regla y compás; ello es así porque las raíces cuadradas pueden construirse con regla y compás. Entonces, para demostrar que un problema geométrico

puede ser resuelto con regla y compás debe plantearse, en primer lugar, una ecuación algebraica equivalente al problema dado (si no es posible hallar tal ecuación, entonces el problema no tiene solución); luego se selecciona el factor irreductible que se halle relacionado con la solución del problema y se determina si este factor irreductible puede ser resuelto por extracción de raíces cuadradas. El aporte de Galois consistió en demostrar que una ecuación puede ser resuelta por extracción de raíces cuadradas si y sólo si el número de las permutaciones que constituyen su grupo de Galois es una potencia de 2. Un enfoque eminentemente algebraico de los problemas de construcciones con regla y compás puede verse en Herstein (1975).

Otro importante desarrollo de la Matemática surgido como consecuencia de la resolución de problemas lo constituye el descubrimiento de los números trascendentes. Estos surgieron a raíz del intento de "cuadrar el círculo", problema que consiste en ***construir con regla y compás el lado de un cuadrado de área igual a la de un círculo de radio dado.***

Los intentos por resolver este problema condujeron a la demostración de que no existe una ecuación algebraica que relacione el lado de dicho cuadrado con el radio del círculo; en otras palabras, el lado de ese cuadrado ***no*** es expresable en función del radio a través de una cadena de raíces cuadradas.

Los esfuerzos por ***demostrar que el Postulado de las Paralelas de Euclides puede deducirse a partir de los demás postulados*** condujeron a un extraordinario desarrollo de la Matemática expresado en el surgimiento de las Geometrías no Euclideanas, las cuales están íntimamente asociadas a los nombres de Riemman, Bolyay y Lobachevski.

Otro problema que mantuvo ocupados durante más de 300 años a los matemáticos más notables de todos los países fue ***la resolución mediante radicales de las ecuaciones de grado mayor o igual que cinco.*** Hoy se sabe que este problema no tiene solución; sin embargo, los esfuerzos que se hicieron al intentar resolverlo produjeron significativos desarrollos en el álgebra, particularmente en la teoría de los grupos.

La búsqueda de solución a problemas tales como: a) hallar la velocidad, en cualquier instante, de un movimiento no uniforme ó, en general, encontrar la velocidad de variación de una magnitud dada, y b) trazar una tangente a una curva dada, condujo al desarrollo de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial; por otro lado, encontrar el área de una figura curvilínea o encontrar la distancia recorrida en un movimiento no uniforme forman parte del grupo de problemas que condujo al desarrollo de los conceptos básicos del cálculo integral.

Lo dicho anteriormente evidencia el valor que tiene la resolución de problemas en Matemática. Sin embargo, además de esta importancia intrínseca, pueden enumerarse otras razones que justifican el desarrollo de esta actividad dentro de los estudios matemáticos que se hacen en los diferentes niveles de escolaridad.

Utilidad de la Resolución de Problemas en Matemática

Puede afirmarse que la resolución de problemas es una apropiada e importante actividad en las matemáticas escolares por cuanto que: a) las estrategias generales de resolución de problemas aprendidas en las clases de Matemática pueden, en ciertos casos, ser transferidas y aplicadas a otras situaciones (Transferencia de Aprendizaje); b) la solución de problemas matemáticos puede ayudar a los estudiantes a mejorar su capacidad analítica y a aplicar esta capacidad en diversas situaciones (Mejoramiento de la Capacidad Analítica); c) la solución de problemas en los cursos de Matemática constituye una actividad fascinante para muchos estudiantes; por ello dicha actividad puede mejorar su motivación; esto es, puede hacer que la Matemática le resulte más interesante y d) la resolución de problemas en el aula puede conducir a los estudiantes hacia una

mejor comprensión de la naturaleza de la Matemática y de la actividad que llevan a cabo los matemáticos.

Condiciones que Deben Darse para que una Situación se Convierte en Problema

Es claro que la resolución de problemas es una actividad de mucha importancia en Matemática; sin embargo, cabe hacerse las interrogantes siguientes:

¿Qué es un problema?

¿Cuándo podemos decir que una determinada situación es un problema?

El término problema tiene diversas acepciones. Puede concebirse como sinónimo de dificultad; ésta se presenta cuando a alguien se le plantea una interrogante, al tiempo que se le exige una respuesta o solución. También puede decirse que un problema constituye una discrepancia entre una situación actual observada y una situación deseada, cuyo alcance exige la realización de un conjunto de acciones por parte de quien debe resolver el problema. Desde este punto de vista, en un problema se pueden identificar tres elementos fundamentales: a) las condiciones dadas u observadas; b) las condiciones deseadas o metas; y c) las operaciones que deben ser ejecutadas para disminuir la discrepancia existente entre las condiciones deseadas y las observadas. Estos tres elementos constituyen lo que se denomina Elementos Objetivos del Problema.

Sin embargo, aunque la presencia de una discrepancia que debe ser eliminada constituye una condición necesaria para que haya un problema, dicha condición no es suficiente. El que una situación particular constituya o no un problema para una persona dada, depende de la forma en que dicha persona considere tal situación; esto significa que para que una situación pueda constituir un problema para un individuo en particular se requieren dos componentes: a) Un componente objetivo (el objeto matemático al cual hay que enfrentar); y b) Un componente subjetivo (la manera como el individuo considere al objeto matemático con el cual se habría de enfrentar). Las condiciones que deben estar presentes en un sujeto para que una determinada situación constituya un problema ***para él*** se denominan **Elementos Subjetivos del Problema;** éstos son los siguientes: a) el individuo debe tener un objetivo deseado y claramente definido (Objetivo Deseado); b) Cuando el individuo se enfrente con la situación, entre él y la solución del problema se debe presentar una especie de bloqueo que haga que dicha solución no sea inmediatamente alcanzable sino que, por el contrario, obligue al sujeto a coordinar sus experiencias y conocimientos previos y, en algunos casos, su intuición para poder lograr un resultado satisfactorio (Bloqueo entre el Sujeto y la Solución) y c) El sujeto debe poseer una capacidad de reflexión tal que le permita identificar y probar posibles soluciones, con el fin de determinar y probar la más adecuada (Capacidad Reflexiva).

En resumen, puede decirse que un sujeto en particular está ante una situación problemática cuando, estando motivado (u obligado por las circunstancias académicas, personales o vitales) para alcanzar un determinado objetivo, se encuentra impedido o frustrado, de modo temporal, para lograrlo. Así, para que una situación constituya un problema para una persona ésta, según Bell (1978) debe: estar enterada de la existencia de la situación, reconocer que debe ejecutar algún tipo de acción ante ella, desear o necesitar actuar, hacerlo y no estar capacitado, al menos en lo inmediato, para superar la situación.

Diferencias entre Problemas y Ejercicios

De acuerdo con la concepción que se ha asumido acerca de lo que es un problema, puede concluirse que muchos de los "problemas" que aparecen al final de los capítulos de los textos escolares o que los docentes proponen en clase, no son tales. Dichos enunciados son propuestos, fundamentalmente, para reforzar conceptos previamente adquiridos; la idea que subyace en ellos es practicar o ejercitar algún conocimiento o procedimiento previamente explicado. Esas situaciones que constituyen sólo aplicaciones numéricas o gráficas, inmediatas y simples, de fórmulas o teoremas y cuyo objetivo es adiestrar al alumno en el manejo de la técnica de las operaciones y procedimientos de cálculo o de demostración, no constituyen problemas propiamente tales; Toranzos (1959) utiliza el término ejercicios para referirse a esas situaciones.

Tanto la realización de ejercicios como la resolución de problemas son dos actividades importantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Sin embargo, los objetivos que se logran con cada una son muy diferentes; mientras que la ejercitación es apropiada para el aprendizaje de hechos y habilidades específicas, la resolución de problemas permite la adquisición de enfoques generales que ayudan a enfrentar situaciones matemáticas diversas, posibilitan la realización de descubrimientos originales y ayudan a "aprender a aprender".

Modelos para el Proceso de Resolución de Problemas

La resolución de problemas en Matemática es un proceso que requiere cierta dosis de creatividad; por ello, no puede ser concebido un modelo o algoritmo universal cuyos pasos, en caso de ser seguidos estrictamente, garanticen la solución de todos los problemas. Sin embargo, sobre la base de la experiencia acumulada por muchos matemáticos y y "solucionadores" de problemas, algunos autores han esbozado "modelos" que, en líneas generales, pueden ayudar en la resolución de problemas.

Entre los más conocidos Modelos para el Proceso de Resolución de Problemas están: a) Modelo del Pensamiento Reflexivo de Dewey; b) Modelo de Resolución de Problemas de Polya y c) Modelo General de Resolución de Problemas de Bell.

A continuación se detallan las fases de cáda uno de los tres Modelos anteriormente mencionados

Fases del Proceso de Resolución de Problemas según Dewey

Este autor considera que la solución de un problema implica: a) Definir el problema; b) Considerar las condiciones que envuelve el problema; c) Formular hipótesis para la posible solución del problema; d) Considerar el valor probable de las diferentes hipótesis y, e) Decidir en relación a cuál es la mejor idea para la solución del problema.

Modelo de Resolución de Problema de Polya

La obra de Polya (1975) constituye un clásico en el área de la solución de problemas; este autor propone una serie pormenorizada de preguntas, convenientemente formuladas, que dirigen la acción de quien se enfrenta a un problema, con el fin de ayudarlo a eliminar la discrepancia entre el objeto del problema y la solución de éste. Polya divide en varias fases el proceso de solución de un problema y, dentro de cada una de éstas, sugiere un cuerpo de interrogantes. De seguidas se presenta el título de cada fase y sus respectivas preguntas.

Primera Fase: Entender el Problema

¿Cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición?, ¿es posible satisfacer la condición?, ¿la condición es suficiente para determinar la incógnita?, ¿es insuficiente?, ¿es redundante?, ¿es contradictoria?, dibuje una figura, use notación adecuada, separe las diferentes partes de la condición, ¿puede usted escribirla en sus propias palabras?.

Segunda Fase: Elaborar un Plan

¿Ha visto usted un problema semejante?, ¿ha visto usted el problema planteado en forma un poco diferente?, ¿conoce algún teorema que

le pueda ser útil?, ¿conoce usted un problema relacionado?, si existe un problema relacionado con el suyo que haya sido resuelto, ¿podría usted utilizarlo?, ¿podría usted utilizar su resultado o su método?, ¿necesita usted introducir algún elemento auxiliar para utilizar su método?, ¿podría enunciar el problema en forma distinta?, ¿podría plantearlo en otra forma?, si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero alguno similar; ¿puede usted imaginarse un problem análogo pero más accesible o uno más general o uno más particular?, ¿puede resolver una parte del problema?, considere sólo una parte de la condición, descarte la otra, ¿en qué medida queda la incógnita determinada, en qué forma puede variar?, ¿puede usted cambiar la incógnita, los datos o ambos si es necesario, de forma tal que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre si?, ¿ha empleado todos los datos?, ¿toda la condición?, ¿ha considerado todas las nociones esenciales concernientes al problema?.

Tercera Fase: Ejecutar el Plan

Comprobar cada uno de los pasos; ¿puede usted demostrar que cada paso dado es correcto?.

Cuarta Fase: Volver Atrás

¿Puede comprobar el resultado, el razonamiento?, ¿Puede obtener el resultado en forma diferente?, ¿puede verse inmediatamente?, ¿puede usarse el método?, ¿puede usarse el resultado en algún otro problema?.

Modelo General de Resolución de Problemas de Bell

Este Modelo está enmarcado dentro de la línea propuesta por Polya. Bell también divide en pasos el proceso de resolución de un problema y sugiere, en cada uno de éstos, un conjunto de técnicas o estrategias cuya implementación, potencialmente, conduce a la solución. Los pasos del Modelo de Bell, así como su caracterización son mostrados a continuación.

Paso 1: Presentar el Problema en Forma General

El problema no debe ser planteado en una forma explícita sino de forma tal que estimule el pensamiento creativo y divergente y así el estudiante o el potencial solucionador del problema pueda descubrirlo o percatarse de su existencia. Algunas de las sugerencias que Bell hace para encontrar problemas en Matemática son las siguientes: a) Observar modelos; b) Buscar relaciones; c) Observar correspondencias; es decir, tratar de encontrar similitudes entre diferentes objetos matemáticos; d) Tratar de encontrar variaciones en los problemas que ya han sido resueltos; e) Tratar de establecer generalizaciones y, f) Buscar propiedades comunes en diferentes problemas.

Paso 2: Reformular el Problema en Forma Operacional

Este paso consiste en reenunciar el problema en una forma más accesible, estableciéndolo en otros términos a fin de incrementar las oportunidades de encontrar un método para resolverlo. El propio Bell sugiere las siguientes preguntas para ayudar a la reformulación de un problema: ¿tiene sentido este problema?, ¿vale la pena o es interesante este problema?, ¿entiende usted este problema?, ¿qué significa el problema?, ¿es este problema muy general?, ¿qué es lo conocido?, ¿qué es lo desconocido?, ¿existe suficiente información en este enunciado del problema?, ¿puede ser establecido el problema de una manera más significativa?, ¿puede el problema ser dividido en varios subproblemas?.

Paso 3: Formular Hipótesis y Procedimientos Alternativos para Atacar el Problema

En este paso de lo que se trata es de buscar enfoques que probablemente conduzcan a la solución del problema. Para esta búsqueda de estrategias y enfoques que permitan atacar el problema, el sujeto debe preguntarse: ¿qué es lo dado, es decir, qué conocemos?, ¿qué debe ser encontrado?, ¿qué actividades pueden proporcionar nueva información?, ¿qué especulaciones parecen ser razonables?, ¿qué procedimientos pueden ser usados para probar o desaprobar conjeturas?.

Paso 4: Probar las Hipótesis y Llevar a Cabo Procedimientos que Permitan Obtener una Solución o Conjunto de Soluciones

Esta es la etapa crucial según el Modelo de Bell, porque es durante ésta cuando, realmente se resuelve el problema o se aprueban o rechazan las conjeturas que el solucionador se haya planteado en torno al problema. Las técnicas que Bell propone para desarrollar este paso coinciden con las sugeridas por Polya, pero este último las ha propuesto en fases diferentes. Así, entre las técnicas sugeridas por Bell para darle alguna dirección al proceso general de resolución de problemas están: a) Asegúrese de que usted conoce la definición correcta de cada uno de los conceptos que son usados en el enunciado del problema; b) Asegúrese de que usted comprende el problema; c) Trate de recordar si usted ha resuelto ya un problema similar; d) Tome en cuenta que es posible que la resolución del problema para un caso particular puede indicarle algún procedimiento válido para el caso general; e) También puede ocurrir que al resolver un problema más general, el problema que usted esté considerando quede como un caso particular; f) Asegúrese de que usted no ha dejado de tomar en cuenta alguna parte de la información dada que podría ser usada para resolver el problema; g) Observe las implicaciones directas en la información dada que podrían proporcionar información adicional; h) Trate de comenzar en el medio y trabajar en ambas direcciones o comenzar con la solución deseada y trabajar hacia la información dada; i) Trate de descomponer el problema en partes relacionadas y resuelva cada parte separadamente; j) Trate de escribir el problema en una secuencia ordenada de problemas más sencillos; k) Considere la posibilidad de usar técnicas de otras ramas de estudio para resolver el problema; l) Trate de localizar fuentes adicionales que contengan información que pueda ser útil en la solución del problema; m) Si el problema es demostrar un teorema, trate de dibujar una figura o considere el uso de construcciones auxiliares; n) Vea qué conclusiones pueden ser sacadas de la información dada aún cuando parezca que no tienen relación con la solución que se está tratando de encontrar; ñ) Agregue alguna condición adicional al problema que pueda restringirlo y, a la vez, hacerlo más fácil; o) Tome el enfoque opuesto y trate de probar que el problema no tiene solución; p) Discuta el problema con otras personas; q) Deje el problema por un tiempo y póngase a hacer otra cosa; r) Tenga cuidado de no desarrollar un círculo vicioso y plantear una estrategia que no conduzca a nada; pero, no descarte una estrategia muy rápidamente.

Paso 5: Analizar y Evaluar las Soluciones, las Estrategias Usadas para Obtenerlas y los Métodos que Condujeron al Descubrimiento de Estrategias para Resolver el Problema.

En este paso se pretende analizar y evaluar el método empleado para resolver el problema con el fin de determinar cuán eficiente es, si puede ser mejorado o no y si puede ser aplicado a alguna clase general de problemas. El solucionador del problema evalúa tanto la solución como el proceso para alcanzarla, haciéndose preguntas tales como; ¿es correcta la solución?, ¿cómo chequeó usted su resultado?, si existen soluciones alternativas, ¿es alguna de ellas más apropiada que las otras ¿existen otras formas de resolver el problema?, ¿los argumentos empleados para obtener la solución, son válidos?, ¿qué formas específicas de argumentación fueron empleadas?, ¿usó usted alguna forma de argumentación no familiar que pueda ser útil en la solución de otros problemas?, ¿su estrategia para resolver este problema puede ser empleada para resolver otros problemas del mismo tipo?, ¿puede usted usar la misma estrategia para resolver problemas relacionados?, ¿qué aprendió usted acerca de la resolución de problemas en general como consecuencia de la resolución de este problema particular? ¿qué dificultades particulares encontró usted resolviendo este problema y cómo puede evitarlas en el futuro?, ¿intentó usted usar una estrategia que probó no ser útil?.

REFERENCIAS

Bell, Frederick. **Teaching and Learning Mathematics** (In Secondary Schools). Dubuque, Iowa (U.S.A.): Wm. C. Brown Company publishers, 1978.

Herstein, I.N. **Topics in Algebra** (Second Edition) New York: Jonn Wiley and Sons, Inc. 1975.

Toranzos, Fausto. **Enseñanza de la Matemática** (Segunda Edición). Buenos Aires: Editorial Kapelusz, 1963.

Polya, G. **Cómo Plantear y Resolver Problemas.** México: Editorial Trillas, 1975.

EL AUTOR

FREDY ENRIQUE GONZALEZ
Profesor de Matemática y Contabilidad
Instituto Universitario Pedagógico de Caracas (1974).
Master en Matemática, Mención Docencia,
Universidad de Carabobo (1984)
Profesor Asociado adscrito al área de Análisis Matemático
en el Instituto Universitario Pedagógico
Experimental de Maracay.