PARADIGMA, VOL. IX, No. 2 –DICIEMBRE DE 1988

EPISTEMOLOGIA, INTERDISCIPLINARIEDAD Y DIDACTICA DE LA MATEMATICA

José Vívenes
Laboratorio de Investigación Educativa
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes

RESUMEN

En este artículo se intenta mostrar cómo, en la enseñanza de la Matemática hoy día, prevalece un enfoque dogmático, ahistórico; basado esencialmente en graves confusiones epistemológicas, cuando no directamente en la ignorancia, tanto del estado actual de la disciplina, como de la evolución histórica de la ciencia en general y de la Matemática en particular. Se propone un enfoque interdisciplinario, a partir de un análisis epistemológico e histórico crítico que considere el problema como eje del aprendizaje.

La práctica común en nuestros días, tanto en los textos como a nivel del discurso del maestro, de presentar la matemática a los alumnos como una ciencia ya hecha, organizada e incuestionable, sentada sobre prolijos y sólidos sistemas axiomáticos, expresada en un lenguaje rígido y pedante (aspirando al inmerecido reconocimiento de "formal") pareciera implicar al menos tres tipos de confusión.

Un ***primer tipo*** consistiría en pretender basar la enseñanza en los fundamentos y en el orden lógico del discurso, desconociendo así el distanciamiento que ha venido produciéndose en los últimos años entre las matemáticas y la lógica; distanciamiento al que alude el matemático Dieudonné (1982) en el apasionado estilo al que nos tiene acostumbrados. Para este autor, existe "una separación cada vez más neta entre lógica y matemática que ha llegado a un divorcio casi enteramente consumado, al menos en el espíritu de los jóvenes matemáticos, ya que muchos lógicos en su ignorancia de las matemáticas actuales, no se dan todavía cuenta. Sin embargo son los propios progresos y grandes éxitos de la lógica contemporánea, que de manera paradojal, constituyen la causa principal de este divorcio a partir de 1963" (p. 4). Esta confusión, que podríamos decir es de carácter histórico, es precisada por Dieudonne más adelante en este mismo artículo, al señalar que en el curso de los últimos 70 años, la casi totalidad de los matemáticos, con raras excepciones (principalmente especialistas en teoría de conjuntos o en alguna "rama exótica" de la topología general) han adoptado cómodamente, como base de sus trabajos y a veces de manera implícita e inconsciente, el sistema de axiomas de Zermelo–Fraenkel, restringido a considerar el axioma de elección solamente para conjuntos numerables. El hecho de que esto haya funcionado durante tanto tiempo sin crear dificultades de orden lógico, pareciera ser la razón por la cual, en opinión de Dieudonné, los jóvenes matemáticos de hoy han expulsado de sus preocupaciones, toda consideración acerca de los fundamentos.

Cuán exacta pueda ser esta apreciación no es posible establecerlo, desde la modesta perspectiva que nos da la limitada información que poseemos sobre el conjunto de la actividad matemática de nuestros

días; pero, sí suena plausible en la medida en que apreciamos, que la extraordinaria imbricación entre lógica y matemáticas ocurrida hacia fines del siglo pasado y comienzos de éste, alimentada por ese intento titánico e imposible de Whitehead y Russell de reducir la matemática a la lógica, ya ha quedado lejos. Los trabajos de Gödel quien, en 1931, demostró la imposibilidad de establecer la no contradicción de la aritmética clásica recurriendo únicamente a sus propios medios o a recursos más débiles (digamos, puramente lógicos), así como la posterior demostración lograda por Gentzen de la no contradicción de la aritmética clásica, pero en el contexto de la artimética transfinita, no sólo derrumban el sueño hilbertiano, sino que muestran una apertura ilimitada de las posibilidades de construcción matemática, reafirmada más aún, después que Cohen (1966) demuestra la independencia entre el Axioma de Elección y la hipótesis del continuo.

En fin, podemos constatar fácilmente, que no se encuentran hoy día muchos matemáticos que se preocupen del carácter sintético o analítico de los axiomas de la geometría, aunque el problema de la naturaleza de los objetos matemáticos y de su adecuación a lo real subsiste como problema epistemológico central; Piaget (1967) señala que «si, por ejemplo, los objetos matemáticos son de la misma naturaleza que la realidad física, se comprende que, sacados de ella por una sucesión de abstracciones cada vez más refinadas, ellos continúen concordando con ella. Pero se comprende ya un poco menos que ellos puedan anticipar los resultados de la experiencia, a menudo con un desfase cronológico considerable. No se comprende por el contrario que ellos trasciendan en todos los sentidos esta realidad experimental o experimentable y sobre todo no se comprende absolutamente, como ellos alcanzan a originar construcciones deductivas mucho más rigurosas que las constataciones de hecho y sin ninguna comparación posible con ellas en cuanto a los procedimientos de demostración. Si por el contrario, la naturaleza de los seres matemáticos hay que buscarla del lado de las actividades del sujeto, se comprendería el rigor de los desarrollos deductivos así como, según los casos, su fecundidad indefinida; pero, el problema de la concordancia con lo real subsiste y sobre todo del carácter anticipador de los cuadros formales con respecto a un contenido experimental que los llena mucho después de su elaboración" (pp. 555–556).

Un ***segundo tipo*** de confusión subyace sin duda en el empeño de presentar los contenidos matemáticos a nivel elemental, con un enfoque estructuralista, mucho antes de que el alumno disponga de un "stock" suficientemente amplio de modelos particulares que permitan apreciar el valor de la estructura, así como capturar su verdadera significación. Esto probablemente proviene de una apreciación distorsionada de ese bello trabajo organizador y unificador que bien puede llamarse "revolución bourbakista". La portentosa y fundamental tarea llevada a cabo por N. Bourbaki, y que se expresa en "Eléments de Mathématiques", no constituye un reflejo de la actividad constructiva, productora, sino más bien organizadora del conocimiento matemático. De su simple estructura no puede inferirse el funcionamiento dialéctico de conceptos, problemas y modelos que acumularon durante más de mil años, tan colosal cantidad de conocimientos. Mucho menos puede fundarse en ella una pedagogía, dispuesta a favorecer la continuidad de ese trabajo.

La ***tercera confusión*** la consideramos de naturaleza epistemológica y tiene que ver con el concepto de "progreso" en ciencias, específicamente en lo que respecta al papel jugado por las diversas crisis en el desarrollo del pensamiento matemático y a la interpretación de las soluciones que se han propuesto para superarlas. Deliberadamente, hemos dejado para el final este aspecto del problema, en virtud de que su desarrollo va a ocuparnos considerable espacio porque va a requerir algunas puntualizaciones iniciales.

En primer lugar, pensamos que no se explica el desarrollo del conocimiento científico al margen de la historia, como pretende el positivismo lógico en su versión clásica, fundada en el análisis formalizante, invocando la permanencia y estabilidad normativa; y buscando en la expresión lingüística, deslastrada de toda (o casi toda) presencia subjetiva, una sintaxis universal de las ciencias. El desarrollo estaría

garantizado por la existencia de normas lógicas estables, pues los fenómenos se organizarán independientemente del sujeto cognoscente, limitándose la ciencia a construir copias cada vez más fieles y exactas. Menos aún en su versión popperiana reciente (racionalismo crítico) con sus criterios de falsificación y una propuesta metodológica que, al retornar a la vieja dicotomía de Reichenbach: "contexto del descubrimiento" vs. "contexto de la justificación", pareciera olvidar todo el dinamismo dialéctico de la ciencia, asentando una concepción lineal del progreso.

Tampoco se explica con la propuesta de Kuhn, (1972) que pareciera negar el concepto mismo de progreso y el recurso a toda racionalidad, pues para Kuhn no es la falsificación empírica el criterio que decide sobre la vigencia o reemplazo de un paradigma (y allí el papel minimizado de la lógica) sino criterios de fuerza o eficiencia relativas. Además, al postular la inconmensurabilidad de dos paradigmas sucesivos, niega el concepto de progreso, regresándonos a la posición de Brunschvig, para quien el desarrollo del conocimiento es un devenir radical, una sucesión contingente de paradigmas inconmensurables.

Piaget (1967), a diferencia de Brunschvig, abandona el terreno filosófico para situarse en el interior del proceso constructor de las ciencias; logrando mostrar el carácter integrador progresivo del movimiento histórico. Para él, "el problema crucial a este respecto, sobre el terreno histórico crítico, es el de establecer lo que se produce cuando una teoría reemplaza a otra, o más precisamente, cuando un sistema de nociones y de procedimientos deductivos o experimentales es reemplazado por otro" (p. 113). En vez de considerar la manera en que una conceptualización filosófica, por ejemplo la cantoriana, reemplaza a otras, por ejemplo el ideal implícito en la artimetización del análisis de Kronecker ("Dios creó los números, lo demás es obra del hombre") Piaget al examinar la manera en que una teoría nueva (como la teoría de conjuntos de Cantor) sucede a las precedentes (como la teoría de números) advierte que el desarrollo histórico nada tiene de un devenir radical y fortuito; al contrario, la imagen es de una integración de las estructuras anteriores en las siguientes, pese al desarrollo indefinido de éstas: "los conjuntos no proceden a la abolición de los números, puesto que ellos permiten, al contrario, reinterpretarlos más detenidamente así como crear nuevas clases transfinitas" (Piaget, 1967, p. 114).

De la misma forma, si bien lo no–euclideano (las diversas geometrías y sus posteriores desarrollos hacia los grupos de transformaciones y más recientemente los espacios fibrados de Cartan) han cuestionado profundamente nuestra concepción del espacio y comenzado por hacer impacto en la estructura de los fundamentos de la geometría (Poincaré, Couturat, Russell), no menos cierto es que el prefijo "no", no niega ni sugiere la abolición de la geometría euclidiana (como algunos docentes ingenuamente interpretan), sino más bien representa una síntesis, una integración, al redefinir, mediante un cambio de escala, los límites de validez funcional de la geometría euclidiana, como representación de una cierta realidad (el espacio físico ordinario, en el sentido ingenuo del término).

Esta integración progresiva tiene también lugar, a su manera, en el dominio de las ciencias físicas. En este caso, nuevos descubrimientos imprevisibles pueden llegar a reemplazamientos parciales, pero una teoría nueva no conduce a la abolición total de las adquisiciones precedentes y la integración de estas últimas en la construcción nueva puede tomar la forma de una aproximación ligada a una cierta escala de observación: la teoría de la relatividad no ha anulado en este sentido la teoría newtoniana de la gravitación, puesto que a pequeñas velocidades y distancias, el espacio físico (en el sentido señalado antes), permanece euclidiano en primera aproximación .

En síntesis, tanto lo no–euclidiano como lo no–newtoniano (mecánica cuántica, mecánica relativista), aunque conducen al reemplazamiento de las nociones de espacio, tiempo y movimiento, no niegan ni conducen a abolir ni la geometría euclidena ni la mecánica clásica; sólo replantean (y he aquí uno de sus aportes fundamentales al pensamiento científico contemporáneo) la noción de ***límite de validez de las teorías***. En este caso el carácter "localmente euclideano" del espacio físico (como fue apuntado antes) sirve de soporte a esta integración. Pero Piaget (1967) va más lejos, al considerar el desarrollo y la evolución del aparato normativo. "La cuestión es –dice Piaget– establecer si la razón evoluciona sin razón o si la razón de constitución de una nueva estructura comporta además la necesidad de una integración de las estructuras precedentes" (p. 114). Yendo directamente a los fundamentos de la lógica misma; constatando también, en su construcción histórica, la presencia de un devenir de integración progresiva, en vez de una sucesión contingente y fortuita, en la forma de extensiones tales que los sistemas anteriores sostienen con los siguientes, relaciones bien definidas: relaciones de integración simple (como el silogismo de Aristóteles respecto de la lógica moderna bivalente de las proposiciones); de integración parcial (como cuando dos sistemas tienen una parte común y cada uno de ellos una parte distinta de vicariancia). Piaget concluye diciendo que: "ningún sistema es definitivo y que no hay fundamento estable, cada construcción permanece así relativa a una situación particular y a un momento determinado de la historia. Pero esto no entraña ninguna concepción relativista, en el sentido peyorativo del término, dado que lo adquirido no sufre amenaza de desaparecer, sino que es simplemente integrado en construcciones más extensas y comprensivas" (p. 115).

Así pues, una enseñanza de las ciencias que no tome en cuenta los procesos de formación de los grandes cambios del pensamiento científico; o que se apoye en una visión estática, limitándose a sus propios resultados, a presentarse bajo el aspecto de ciencia hecha; o que, finalmente, tergiverse el sentido de este proceso de integración progresiva, claramente perceptible en el terreno del funcionamiento de los conceptos y relaciones de las diversas teorías, estará vehiculizando una concepción dogmática y a–histórica de la ciencia; y además, transmitiendo una visión alienada y mitificante de la misma. Así, al alumno se le escamotea, no sólo la posibilidad de situarse claramente respecto al estado actual de los conocimientos disponibles, de calibrar su verdadera significación (alcances, limitantes) y de comprender los mecanismos profundos que han operado en su constitución, también se le restringe, drásticamente, la posibilidad de un ejercicio verdaderamente auténtico del quehacer productor de la ciencia.

Junto a estas tres grandes fuentes de confusión no pocas veces operan otras, no por menores menos graves. Entre éstas cabe destacar el papel del rigor científico, especialmente en presencia de un conocimiento erróneo de la significación y el uso de los conceptos de axiomatización y formalización.

Por supuesto, una visión distorsionada del rigor está muchas veces en la base de esas presentaciones de la "ciencia espectáculo"; de esa inflexible presentación de los resultados de la ciencia actual como una cadena de resultados revelados e indiscutibles, tributarios de una pedagogía escrupulosamente ajena a toda reflexión sobre la ciencia en sus aspectos epistemológicos, culturales, políticos, etc.

No se trata de proponer aquí que la enseñanza de la ciencia deba reducirse a la enseñanza de su historia y menos aún a la reproducción de ésta, tampoco al análisis epistemológico genético de los procesos de apropiación del conocimiento y menos aún al estudio de los esquemas formales de validación. Pero rechazamos la postura pedagógica que, so pretexto del "rigor", presenta inflexiblemente, para dar un ejemplo, la secuencia: construcción de $\mathbb{R}$, funciones, límites, continuidad derivación e integración, en los cursos de cálculo; donde los conocimientos surgen y se encadenan unos a otros como provocados por un acto de magia. Porque hubo análisis con Euler y Lagrange, antes de que la noción de límite estuviera bien establecida, así como con Cauchy y Riemann, aunque todavía $\mathbb{R}$ no hubiese sido construido aritméticamente, así como hubo cálculo de probabilidad antes de que Kolmogorof lo integrara por la vía axiomática a la teoría de la medida, tal como hoy tenemos, al margen de toda fundamentación formal, Estadística Matemática, Automática y Teoría de la Información.

Por otra parte, pareciera querer ignorarse que la axiomatización ha representado, en determinado momento del desarrollo de una teoría, un proceso voluntario de organización, de ordenamiento de resultados

más o menos dispersos, en una totalidad coherente. Esta actividad estructurante parece haber estado presente en la elaboración de los Elementos de Euclides. Seguidamente (veintidós siglos después, fines del siglo pasado), la noción de ***axioma como "propiedad fundamental y evidente"***, que subtiende la construcción euclidiana, cambiará hasta aparecer en su forma moderna que lo presenta ***como un enunciado vacío de todo contenido figurativo, situado al origen de toda cadena deductiva, cuya elección, por demás arbitraria, sólo debe estar limitada por las reglas del sistema que define.*** Sin embargo, tan radical cambio de postura no altera ni su propósito ni su ubicación en el proceso constructivo de la ciencia y por tanto no puede trastocar el sentido educativo de tal proceso.

Por si esto no fuese suficiente, recordemos que este esfuerzo de abstracción que constituye la axiomaticación, no está en modo alguno situado en el nacimiento de las ideas matemáticas, de los objetos matemáticos y de sus relaciones; ella aparece más bien como una consecuencia de nuestra actividad organizativa de las ideas, (en el sentido matemático), es decir, en la identificación de los invariantes de lo esencial y permanente que define la totalidad.

Otro hecho común es la ***confusión entre axiomatización y formalización*** y a menudo sucede en la enseñanza elemental que docentes, mal inspirados por sentimientos de falso formalismo, reducen su labor a la enseñanza rígida de terminología y manipulación de vocabulario matemático. Además, formalizar no es axiomatizar. ***Se formaliza cuando se recurre a medios simbólicos propios de la matemática o de la lógica, para organizar el discurso matemático. Esto no requiere tan siquiera la presencia de axiomas.*** Además, raras veces se intenta formalizar un sistema axiomático y casi nunca se logra. Al menos en las ramas más vitales de la matemática, los sistemas de axiomas están por lo general mal formalizados.

Los matemáticos, comúnmente no piensan en términos de un lenguaje formalizado, ni ello constituye en general, motivo de preocupación. Las razones que animarían un proyecto de formalización de una teoría matemática caen, con seguridad, en áreas de preocupación metamatemática y suelen corresponder a niveles avanzados de desarrollo de la teoría.

Hay, por supuesto, por razones de necesidad de síntesis y de economía, una tendencia creciente a adaptar el lenguaje corriente a las necesidades de la Matemática. Esto podría, en cierto sentido, interpretarse como una tendencia hacia su formalización. Ahora bien, este aspecto resulta delicado a nivel de los adolescentes, pues se corre el riesgo de dotarlos de un lenguaje vacío de sustancia conceptual matemática, no vinculado a las aplicaciones, rígido y acartonado que le aisle de las ideas fértiles. El lenguaje matemático (que no el formalizado), debe ser enseñado a un ritmo compatible con los ritmos de maduración cognoscitiva y especialmente de madurez matemática, teniendo el cuidado de insertarlo en los procesos de matematización y no en el marco de un proceso "terminologicista per se".

Insistimos en que ***la actividad matemática consiste esencialmente en resolver problemas, o mejor aún, en abordar problemas (generarlos o asumirlos), es decir, proponer o asumir preguntas y organizar recursos y procesos tendientes a buscarle respuestas, y en caso de obtenerlas, calibrar la validez y alcances verdaderos de esas respuestas, así como de controlar la aplicación y/o extensiones de los resultados, cuando hubiere lugar.*** Es sólo un incremento del poder resolutivo de las interrogantes planteadas, bien por la matemática misma, bien por las otras disciplinas "matematizables", que pueden justificarse las teorías matemáticas así como los cursos que pretenden organizar su enseñanza.

El funcionamiento coherente y eficiente de los conceptos, no depende necesariamente del rigor lógico (axiomatización) de la formalización. El razonamiento necesario a la resolución de problemas más que ser el fruto de una tal postura, es principalmente tributario de una práctica más o menos intensa: de la práctica intersectorial sobre modelos (en el sentido de la lógica), así como de la actividad matematizante del sujeto en la construcción de modelos (en el sentido de las aplicaciones).

Llegamos así a referirnos a esos términos un tanto inasibles de "matematizable", "matematizante", "matematización". En una primera aproximación, se entiende por matematización esa actividad estructurante que se manifiesta tanto al interior de la matemática en los aspectos ya señalados, como la actividad que conduce a tratar de describir las leyes que gobiernan los procesos en otras áreas de conocimiento.

Un sector importante de esta actividad lo constituye la ***construcción de modelos de situaciones físicas. Se trataría, básicamente, de una representación necesariamente simplificada*** de un sistema de la vida real, elaborada con intención descriptiva de estructuras existentes, con el propósito de comprender y tratar de mejorar su funcionamiento, o bien en el caso de situaciones prospectivas, con miras a optimizar lo realizable.

La complejidad del sistema está en relación directa con el número de variables presentes y esto puede llegar a jugar un rol decisivo en la naturaleza y validez del modelo a lograr. En la necesidad de analizar un cierto sector de la realidad convergen los siguientes ingredientes:

Los observables de primer orden, cuyos componentes son capturados según el curso de alguna actividad perceptiva del sujeto y que pueden aparecer estructurados en mayor o menor grado por las diversas formas del lenguaje. ***Un sistema de elementos y relaciones abstractas de naturaleza simbólica.*** Algunas de estas relaciones constituyen axiomas de existencia o relaciones de funcionamiento operativo, que sería lo que se conoce de ordinario como el modelo matemático. Finalmente un funtor que pone en correspondencia los observables con el modelo.

A estos aspectos se agrega, cuando la complejidad del modelo hace su tratamiento extremadamente "difícil," un conjunto de condiciones simplificadoras en la búsqueda de soluciones aproximadas admisibles. Así, se supone a veces que una determinada ley es normal o Poison, que un determinado sistema dinámico está en estado estacionario, que se decide convertir variables discretas en contínuas, o la linealización de funciones no lineales y finalmente la supresión de posibles restricciones superfluas o redundantes.

Toda la argumentación anterior, converge desde distintos ángulos a plantear el carácter interdisciplinario de una enseñanza matemática basada en la resolución de problemas.

Por todo lo expuesto previamente pensamos que son los ***problemas planteados por el funcionamiento de los conceptos***, más que la ***seguridad de los fundamentos*** lo que debe guiar la enseñanza. En ***Matemática como en toda ciencia, los fundamentos son secundarios y por consiguiente no pueden constituir la base de la enseñanza.*** Funcionamiento en el seno de la matemática misma y funcionamiento fuera de la propia disciplina. Se trata de funcionamiento real a partir de la solución de problemas, pués este es el punto esencial de toda actividad matemática. Ha sido la resolución de problemas lo que ha forzado la construcción de teorías más o menos sofisticadas y han sido los problemas los que le dan su significación.

REFERENCIAS

Bunge, M. (1966). **La Ciencia, su Método y su Filosofía.** Buenos Aires: Ediciones siglo veinte.

Bunge, M. (1978). **Filosofía de la Física.** Barcelona (España): Ariel.

Bourbaki, N. (1956). **Elements de Mathématiques.** Paris: Hermann.

Brouche, R. (1979). Du Mauvais Usage de l'epistemólogie. **Bulletin Interirem No. 18.**

Cohen, P.J. (1966). **Set Theory and the Continuum Hypothesis.** Reading, Massachusetts: W.A. Benjamin, INC. Adwanest Book Program.

Coprem. (197/). De l'enseignement des **Mothématiques, quelques reflections d'ordre scientifique et epistémologique.**

Dieudonne, J. (1982). L'épistemologie des Mathématiques chez Jean Piaget. **Archives de Psychologie, 50.**

Kuhn, T. (1972). **The Structure of Scientific Revolutions.** Chicago: University of Chicago Press.

Piaget, J. (1967). **Logique et conaissance scientifique.** Gallimard Dijon.

Popper, K. (1962). **La Lógica de la Investigación Científica.** Madrid: Tecnos.

Popper, K. (1967). **El desarrollo del conocimiento científico: Conjeturas y refutaciones.** Buenos Aires: Editorial Paidós.

Popper, K. (1972). **Objetive Knowledge.** Oxford: Clarendon Press.

Reto, L. (1980). Histoire des sciences et épistémologie genetique. **Archives de psychologie, 48.**

Vinner, S. (1982). The teaching of mathematics. **Mathematical Review** pp. 752–756.

Vívenes, J. (1985). **Aprendizaje de la matemática y procesos de matematización.** I Jornada Oriental de Enseñanza de las Ciencias, U.D.O.

Vívenes, J. (1982). **El problema como motor del aprendizaje de la matemática.** XXXII Convención de ASOVAC.

Vívenes, J. (1984). A propósito de la Enseñanza de la Matemática en el Medio Venezolano. **Boletín de la Sociedad Venezolana de Matemáticas.** No. 4.