

CONCEPTOS, RESULTADOS Y PROCEDIMIENTOS:
UN RECURSO PARA MEJORAR LA COMPRENSION
EN MATEMATICA*

Cipriano A. Cruz G.
Departamento de
Matemática Aplicada
Facultad de Ingeniería
U.C.V.

María Itriago C.
Dpto. Educativo de
Ingeniería
Facultad de Ingeniería
U.C.V.

RESUMEN

Este trabajo pretende demostrar que, si se proporciona al estudiante un organizador o codificador general y si se le entrena para utilizarlo, se puede mejorar significativamente su nivel de comprensión de la asignatura. El diseño del organizador nace como una respuesta a la interrogante: ¿Cómo estudiar Matemática? que, a menudo, se formulan los estudiantes que obtienen bajo rendimiento en el área. La experiencia se llevó a cabo en un Curso de repitientes de Análisis Matemático I, en la Facultad de Ingeniería de la U.C.V., durante el Segundo Semestre de 1986. Dos de las secciones se tomaron como grupo control y grupo experimental respectivamente. A ambos grupos se aplicó un Pre-Test, al comienzo del Semestre, y un Post-Test, al término del mismo, consistentes en: 1) La lectura detallada de un texto; 2) La elaboración de un resumen, para lo cual la mitad de cada grupo recibió instrucciones adicionales; y 3) Responder un cuestionario. Durante el semestre, el grupo experimental fue entrenado para usar el organizador en el estudio y en la resolución de problemas (clases prácticas). Se compararon los resultados obtenidos por los grupos experimentales y control y por los subgrupos que recibieron instrucciones diferentes en el Pre-Test y en el Post-Test. Aunque el grupo experimental muestra una ganancia mayor que el grupo control en algunas de las tareas de prueba, las diferencias no resultaron estadísticamente significativas ($p < 0.01$) y por lo tanto la ganancia no puede atribuirse al entrenamiento.

* Trabajo presentado en la VII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Santo Domingo, República Dominicana, Julio de 1987.

INTRODUCCION

¿Cómo estudiar Matemáticas?. He aquí una pregunta que se plantean muchos estudiantes, especialmente cuando su rendimiento en el área no es satisfactorio.

Cualquier docente ha escuchado en reiteradas oportunidades esta pregunta y, quizás, sólo le presta debida atención cuando quien la formula es un alumno que, por su excelente trayectoria académica previa, por su fuerte motivación y el considerable tiempo que dedica a sus estudios no debiera confrontar problemas de rendimiento.

Una vía para que "los novatos" comprendan mejor la Matemática puede ser mostrarles, en forma "transparente", cual es la estructura de esta ciencia ya que, cualquiera sea el tema que se esté estudiando, deben estar presentes los tres pilares fundamentales: CONCEPTOS, RESULTADOS y PROCEDIMIENTOS.

Asimismo, se ha señalado que una meta de la instrucción matemática debe ser la de ayudar al estudiante a adquirir un conocimiento bien estructurado (Resnick y Ford, 1981).

En esta investigación se intenta probar que puede mejorarse significativamente el nivel de comprensión en Matemáticas, si se proporciona al estudiante un recurso apropiado para organizar los materiales de estudio y se le da entrenamiento para utilizarlo. Una parte sustancial de los esfuerzos recientes de la investigación en Psicología Cognoscitiva e Inteligencia Artificial han estado dirigidos a determinar cuál es la estructura de conocimiento que hay en la mente de cada individuo y cuáles los mecanismos mediante los que se genera y se transforma el conocimiento.

En el ámbito de este trabajo, lo que se ha denominado conocimiento matemático bien estructurado correspondería, en primer tér-

mino, a unos ciertos conceptos centrales relacionados —de un modo específico y significativo— con un número relativamente grande de otros conceptos. En segundo término, la estructura de conocimiento matemático incluiría programas para ejecutar las tareas matemáticas de rutina, así como mecanismos o estrategias, para generar y probar relaciones entre conceptos (Resnick y Ford, 1981).

El logro de esta meta plantea al docente la necesidad de organizar las actividades y materiales de aprendizaje para influir sobre la estructura de conocimiento del alumno y facilitar la adquisición e integración de conocimientos. La búsqueda y el esfuerzo sistemático en esta dirección, han conducido al desarrollo de recursos o Procesadores de Información cuyo propósito es "facilitar la organización y procesamiento de la nueva información en términos de las estructuras conceptuales y de las características estructurales de los materiales de aprendizaje" (Orantes, 1983).

Entre estos recursos, el uso de materiales introductorios u organizadores ha sido objeto de interés y controversia.

La función esencial de un organizador es la de servir de "armazón ideativo" o "puente cognitivo" para la incorporación y retención estables de conocimiento.

Cuando el organizador se presenta antes de que ocurra el aprendizaje, tiene las ventajas de que proporciona una visión general del material más detallado antes de que el alumno se enfrente a él y, además, suministra elementos organizadores inclusivos y pertinentes al contenido que va a aprenderse (Ausubel, 1982).

El soporte teórico para el uso de los organizadores como recurso para estimular las actividades de comprensión y retención de los estudiantes, proviene del concepto de aprendizaje significativo de Ausubel.

Por aprendizaje significativo se entiende la incorporación de nuevos conocimientos a la estructura cognoscitiva mediante el esfuerzo consciente del que aprende para:

1. Relacionar el conocimiento nuevo con el que ya se tiene; y
2. Identificar los conceptos esenciales en el nuevo conocimiento y relacionarlos con los que ya se tienen.

Sin embargo, la evidencia experimental a favor del uso de los organizadores, no es concluyente. Barnes y Clawson, en una revisión de 32 trabajos con organizadores avanzados concluyeron que éstos no produjeron resultados positivos en 20 de las investigaciones y que en la forma en que estaban contruidos, no contribuyeron a facilitar el aprendizaje (cita de Mayer, 1979).

Dansereau (1979) ha señalado que, como estímulo para facilitar la comprensión y retención, tienen influencia positiva, pero bajo el control del maestro o experimentador y que tales hallazgos no son generalizables a situaciones menos controladas. Asimismo, ha señalado que la principal falla en la manipulación directa de la comprensión y la retención, mediante preguntas u organizadores previos y complementarios, ha estado en la "información sin entrenamiento" para usar la técnica.

La evidencia experimental más favorable proviene de los trabajos de Mayer. Según la hipótesis de asimilación-codificación, propuesta por este autor, puede mejorarse la calidad del aprendizaje más bien que la retención, si el organizador precede a aquél y además se cumplen las dos condiciones siguientes:

- 1) Que el organizador provea un contexto para asimilar el nuevo conocimiento; y 2) Que estimule al estudiante a usarlo activamente durante el aprendizaje.

Una implicación de la hipótesis es que el organizador tiene valor para una asignatura y un estudiante en particular. Por ello, para ser útil, tendría que satisfacer las siguientes condiciones:

1) Nivel de inclusividad y generalidad mayores que el material que va a aprenderse; 2) Permitir generar el mayor número de relaciones (lógicas) posibles en el material que va a aprenderse y, entre éste y el conocimiento que ya se tiene; 3) Fácil de adquirir y usar, aún bajo condiciones de "stress" o inexperiencia; 4) Preceder el aprendizaje de un cuerpo mayor de conocimientos; 5) Capaz de influir sobre el proceso de codificación del estudiante (Ausubel, 1982; Meyer, 1979).

El recurso o procedimiento cuya utilidad potencial se intenta probar en esta investigación, parece corresponder a la definición de organizador avanzado y satisface las condiciones descritas antes.

Desde el punto de vista de la estructura, toma en consideración los dos componentes o dimensiones del conocimiento matemático, tal como ha sido definido en el marco de este trabajo: la componente o dimensión conceptual y la procedimental.

El conocimiento conceptual correspondería, básicamente, a las secciones ¿Qué hay en un tema? y ¿Qué variedad?. El conocimiento procedimental corresponde fundamentalmente a la sección ¿Qué nivel de comprensión interesa?.

Los niveles de comprensión se expresan en términos de ejecuciones esperadas, ordenadas en función de complejidad creciente. La jerarquía se mantiene tanto dentro de cada categoría como entre categorías.

El contenido de la dimensión comprensión refleja algunas de las ideas de Polya (1969) en lo relativo a secuencias de solución de problemas específicamente las siguientes:

1) Reflexionar sobre el problema (reconocer datos, incógnitas y condiciones); y

2) Desarrollar el plan para resolver el problema (atender a los procesos más que a los resultados, pero verificar éstos últimos).

La integración de los componentes conceptual y procedimental, muestra analogías con la categoría que Schoenfeld (1983) denomina Recursos, en la Matriz de Conductas Cognitivas que él propone para interpretar los procesos de solución de problemas. Por Recursos, Schoenfeld entiende el rango de hechos y procedimientos disponibles en el individuo al implementar la solución de un problema; esto lo llama Simon «cantidad de conocimiento que un experto o profesional en cierto dominio ha retenido en la memoria a largo plazo» (Cita de Schoenfeld, 1983).

La dimensión procedimental del organizador expresa el significado operacional que se ha dado a la variable comprensión en este trabajo: Comprender es procesar información de varios tipos (conceptos, resultados y técnicas) a varios niveles (recordar, interpretar críticamente, aplicar, optimizar).

METODO

Sujetos

Para este estudio se eligieron dos de las secciones de repitientes de Análisis Matemático I, asignatura del Primer semestre de Ingeniería de la U.C.V., una sección se usó como control y la otra como experimental.

El tamaño teórico de cada sección era de 70 estudiantes. Tomaron el Pre-test 33 estudiantes en el grupo control y 59 en el experimental. Tomaron el Post-Test 12 y 14 estudiantes, respectivamente. La reducción de tamaño de los grupos tiene tres razones principales: inasis-

tencia a clases, abandono de la asignatura a partir del segundo o tercer parcial o retiro legal en las 8 primeras semanas del semestre.

Materiales

1. Organizador
2. Pre-Test y Post-Test Formas A y B (Anexos 1 y 2)

PROCEDIMIENTO

1. El Pre-Test se administró simultáneamente en las dos secciones durante la primera clase de práctica del semestre; se procuró que la mitad de cada grupo llenase la Forma A y la otra mitad la Forma B. La diferencia entre una y otra, consiste en que se dan indicaciones complementarias para elaborar el resumen del texto estudiado. Ambos grupos recibieron información sobre el objetivo del Pre-Test. Se hizo énfasis en que los resultados del Pre-test no tendrían efecto alguno sobre la calificación en la asignatura.

Al término de la sesión el grupo experimental recibió el Organizador y la explicación detallada sobre la experiencia.

2. Durante todo el semestre una sesión semanal de práctica se destinó a mostrar cómo usar el organizador para: (a) identificar u ordenar los contenidos vistos en clase; (b) identificar en el Texto Guía los tópicos o ideas relevantes; (c) identificar y organizar los tópicos a ser estudiados para los exámenes parciales y final; (d) evaluar el nivel de dificultad y exigencia de los problemas propuestos como tareas o en los exámenes; y (e) orientar la solución de problemas, especialmente las fases de comprensión del problema y búsqueda de estrategias de solución.

La secuencia de entrenamiento consistió en: 1) demostración sobre cómo usar el organizador; 2) práctica supervisada en el aula; y

3) "feed-back" a partir de protocolos elaborados por el profesor o discusión de las fallas observadas en las ejecuciones del grupo, especialmente en los exámenes o en las asignaciones propuestas como tarea.

3. El Post-test se administró en la última clase de práctica del semestre. Debido a la pérdida de estudiantes, se citó a los alumnos para una fecha posterior a la del examen final. Con el Post-test se aplicó una Encuesta para conocer las reacciones y experiencias del estudiante con respecto al organizador. La estructura y condiciones del Pre y Post-test fueron idénticas: 1) Lectura y elaboración del resumen de un fragmento tomado del texto guía usado en todas las secciones de la asignatura (30 minutos); y 2) Prueba de comprensión (30 minutos). Se permitió a los sujetos usar el material textual y su propio resumen para contestar las preguntas de la Prueba.

Los contenidos del Resumen se evaluaron en función de la relevancia del tópico o idea. Del mismo modo, en la Prueba de Comprensión se asignaron pesos diferentes a las preguntas, según la complejidad del nivel de comprensión exigido: Escala 0-1 para reproducir un concepto; escala 0-2 para discutir validez de un resultado; escala 0-3 para demostrar o resolver.

RESULTADOS

Los efectos del entrenamiento fueron evaluados a partir de las diferencias de ejecución dentro de cada grupo (Tabla 1-4) y entre los grupos en las dos tareas de prueba.

La tarea de Lectura y Resumen se consideró como indicador de la eficiencia para identificar y estructurar información. La Prueba de Comprensión se usó para evaluar los Niveles de Comprensión, tal como se los ha definido en este estudio.

Además se incluyeron en el estudio otros tres resultados: 1) La relación entre habilidad para reconocer y organizar material y la eje-

cución de los exámenes parciales; 2) La correlación entre las variables del estudio y la nota definitiva en la asignatura y 3) El análisis de opinión de los sujetos del grupo experimental acerca de usos y resultados obtenidos con el organizador.

1. Diferencias Pre y Post-Test

Tabla 1.1: PRE-TEST-LR: Puntajes promedio por área de prueba
Diferenciación según Grupo y Forma (A-B)

Grupo	LR-Forma	Conceptos	Resultados	Procedimientos (*)
Experimental N = 12	A	1.66	3.00	0.16
	B	1.66	1.82	0.66
Control N = 8	A	1.75	2.25	0.00
	B	1.80	4.00	0.40

GE $M_t = 5.2$ DT = 1.5

GC $M_t = 5.2$ DT = 1.4

(*) Puntuación máxima posible:

Pre-Test 2, 5, 2 Post-Test 2, 8, 1

Tabla 1.2: POST-TEST-LR: Puntaje promedio por área de prueba
Diferenciación según Grupo y Forma (A-B)

Grupo	LR-Forma	Conceptos	Resultados	Procedimientos (*)
Experimental N = 12	A	2.00	4.00	0.55
	B	1.60	4.20	0.60
Control N = 8	A	2.00	3.40	0.60
	B	2.00	2.33	0.00

GE $M_t = 7.5$ DT = 3

GC $M_t = 5.2$ DT = 1.2

Tabla 1.3: PRE-TEST-C: Puntaje promedio por área de prueba
Diferenciación según Grupo y Forma (A-B)

Grupo	C-Forma	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3 (**)
Experimental N = 12	A	0.66	5.66	3.00
	B	0.33	5.33	1.66
Control N = 8	A	0.25	4.00	1.00
	B	1.00	6.00	2.50

GE $M_t = 8.4$ DT = 3.9 GC $M_t = 7.5$ DT = 3.0

(**) Puntuación máxima posible:

Pre y Pos-Test 2, 13, 5

Tabla 1.4 . POST-TEST-C: Puntaje promedio por área de prueba

Diferenciación según Grupo y Forma (A-B)

Grupo	C-Forma	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Experimental N = 12	A	1.14	9.55	0.28
	B	1.00	10.60	0.40
Control N = 8	A	0.80	8.80	1.20
	B	1.00	5.66	0.66

GE $M_t = 11.5$ DT = 2.2 GC $M_t = 9.7$ DT = 2.3

Los dos grupos mejoran su ejecución en el Post-Test LR; pueden identificar los conceptos esenciales y la mitad o más de los resultados. El grupo experimental obtiene una ganancia promedio entre uno y dos puntos mayor que la del grupo control.

La ejecución en la identificación de procedimientos no muestra una tendencia definida en ninguno de los grupos.

En la Prueba de Comprensión la ganancia es mayor para ambos grupos en dos de los Niveles: 1) Reproducir e interpretar un concepto; 2) reproducir o interpretar un resultado y discutir la validez de un resultado.

En el grupo experimental la ganancia es similar para los subgrupos A y B, en el grupo control no hay ganancia para el subgrupo B.

Los dos grupos muestran un rendimiento menor en la parte que evalúa las conductas de comprensión en el Nivel 3.

La disminución observada en ambos grupos en el Nivel 3 del Post-Test-C podría explicarse por dos hechos: la mayor complejidad de la conducta específica requerida —Demostrar— en contraste con las requeridas en el Pretest —Resolver y Aplicar— y la mayor dificultad del contenido matemático en el Post-Test—Algebra y Funciones Hiperbólicas.

En lo que se refiere al grupo experimental, tal ejecución es consistente con la que se observa cuando se comparan los resultados de los exámenes parciales con una tarea de entrenamiento que consistió en usar el organizador para identificar y ordenar los contenidos a evaluarse en dichos exámenes (Anexos 3 y 4).

Al ejecutar la tarea una mayoría demostró facilidad para ubicar los conceptos y resultados más importantes. En cambio, no pudo identificar la mitad o más de los procedimientos. En los exámenes los mayores errores fueron de procedimiento; la situación fue crítica en el tercer parcial por la extensión de la materia a evaluar.

Para precisar el grado de asociación entre variables independientes y ejecución en el Post-test (LR y C) se utilizó el análisis de regresión paso a paso, además de la correlación bivariada. La correlación es positiva y significativa ($P < 0.01$) entre el Pre-Test-C y el Post-Test-LR (0.70) y entre Pre y Post-Test-C (0.68) para el grupo experimental). Para el grupo control es de 0.86 entre Pre y Post-Test-C, pero es baja y negativa con el Post-test-LR.

Las correlaciones entre el Pre y Post-test LR son bajas y cercanas a cero para el grupo experimental y para la sección unida experimental control.

En la regresión paso a paso, de nuevo es significativa ($P < 0.01$) y positiva la correlación entre el Pre y Post Test-C (0.70) y entre el Pre-Test-C y el Post Test LR (0.49) para la sección unida.

El análisis de varianza sobre resultados del Post Test (LR y C) favorece la hipótesis de no diferencia entre los grupos experimental y control a nivel de significación elegido. Sin embargo, la prueba F da valores significativos para $p < 0.05$ con las variables Sección (Experimental-Control), Post-Test-C, Post-Test-LR y Pre-Test-C.

2. Reacciones y experiencias de los estudiantes con el organizador

Durante la experiencia, el grupo experimental se mostró interesado en utilizar el organizador, especialmente para prepararse para los parciales. En la encuesta de opinión, el 60% y más, reportó haber usado el recurso para:

1) Seleccionar u organizar el material a estudiar; 2) Identificar la estructura del capítulo o subcapítulo a estudiar en el texto guía; y 3) Identificar los aspectos o ideas relevantes del capítulo.

Un 85% respondió que pensaba utilizar el organizador para estudiar la asignatura en los Semestres siguientes y todos recomendaron que se extendiese su uso a los otros Cursos de Análisis Matemático I.

DISCUSION

Un factor que ha de tenerse en cuenta al evaluar los resultados de este estudio es el de la homogeneidad de los grupos por la pérdida gradual de estudiantes durante el semestre. Es posible que con N mayores las diferencias observadas en el grupo control y el experimental se hiciesen significativas como para poder atribuir las al entrenamiento. En el presente estudio, no puede aceptarse la hipótesis de que el uso del organizador produce un incremento significativo en los niveles de comprensión.

Otro resultado que merece destacarse es la no diferencia en la ejecución de los subgrupos con o sin instrucciones para realizar la tarea de Lectura y Resumen. Este hecho concuerda con la hipótesis que las direcciones verbales no son suficientes para inducir las actividades

aunque pueden orientar acerca de la información que se necesita (Rothkopf, 1982).

La dificultad de los sujetos para operar en los niveles de procesamiento más complejos, una vez más, sugiere la necesidad del entrenamiento en estrategias o heurísticas dentro de contextos específicos.

CONCLUSIONES

Los resultados de este estudio sugieren interesantes posibilidades para trabajos posteriores.

La primera, y más evidente, es la de replicar la investigación tomando la precaución de elegir muestras más heterogéneas. En el presente caso, la condición de repitiendo, de hecho, reduce el rango de variabilidad posible entre los sujetos, y al término de un semestre, cabe esperar una mayor reducción. Por esta misma razón deben seleccionarse muestras de mayor tamaño.

Algunos aspectos del organizador que deben revisarse son el nivel de complejidad y las posibles jerarquías de las conductas que denotan comprensión. Por ejemplo, valdría la pena subdividir las del Nivel 3 o reagrupar las de Nivel 2 y 3.

El estudio sugirió también nuevos usos del organizador. Se probó su utilidad para obtener una visión clara y rápida de los contenidos de materia enseñada y evaluada, así como para orientar la tarea de analizar en qué aspectos y por qué fallan los estudiantes.

Para finalizar, aunque escapa al marco de esta investigación conviene subrayar que, si bien investigar en los ambientes educativos reales es mucho más difícil, la validez ecológica y la aplicabilidad de los hallazgos, estimulan esta modalidad, especialmente en las condiciones restrictivas de tiempo y recurso humano que afectan a nuestras instituciones, y que probablemente no sufrirán modificaciones en el futuro inmediato.

El análisis de varianza sobre resultados del Post Test (LR y C) favorece la hipótesis de no diferencia entre los grupos experimental y control a nivel de significación elegido. Sin embargo, la prueba F da valores significativos para $p < 0.05$ con las variables Sección (Experimental-Control), Post-Test-C, Post-Test-LR y Pre-Test-C.

2. Reacciones y experiencias de los estudiantes con el organizador

Durante la experiencia, el grupo experimental se mostró interesado en utilizar el organizador, especialmente para prepararse para los parciales. En la encuesta de opinión, el 60% y más, reportó haber usado el recurso para:

1) Seleccionar u organizar el material a estudiar; 2) Identificar la estructura del capítulo o subcapítulo a estudiar en el texto guía; y 3) Identificar los aspectos o ideas relevantes del capítulo.

Un 85% respondió que pensaba utilizar el organizador para estudiar la asignatura en los Semestres siguientes y todos recomendaron que se extendiese su uso a los otros Cursos de Análisis Matemático I.

DISCUSION

Un factor que ha de tenerse en cuenta al evaluar los resultados de este estudio es el de la homogeneidad de los grupos por la pérdida gradual de estudiantes durante el semestre. Es posible que con N mayores las diferencias observadas en el grupo control y el experimental se hiciesen significativas como para poder atribuir las al entrenamiento. En el presente estudio, no puede aceptarse la hipótesis de que el uso del organizador produce un incremento significativo en los niveles de comprensión.

Otro resultado que merece destacarse es la no diferencia en la ejecución de los subgrupos con o sin instrucciones para realizar la tarea de Lectura y Resumen. Este hecho concuerda con la hipótesis que las direcciones verbales no son suficientes para inducir las actividades

aunque pueden orientar acerca de la información que se necesita (Rothkopf, 1982).

La dificultad de los sujetos para operar en los niveles de procesamiento más complejos, una vez más, sugiere la necesidad del entrenamiento en estrategias o heurísticas dentro de contextos específicos.

CONCLUSIONES

Los resultados de este estudio sugieren interesantes posibilidades para trabajos posteriores.

La primera, y más evidente, es la de replicar la investigación tomando la precaución de elegir muestras más heterogéneas. En el presente caso, la condición de repitiendo, de hecho, reduce el rango de variabilidad posible entre los sujetos, y al término de un semestre, cabe esperar una mayor reducción. Por esta misma razón deben seleccionarse muestras de mayor tamaño.

Algunos aspectos del organizador que deben revisarse son el nivel de complejidad y las posibles jerarquías de las conductas que denotan comprensión. Por ejemplo, valdría la pena subdividir las del Nivel 3 o reagrupar las de Nivel 2 y 3.

El estudio sugirió también nuevos usos del organizador. Se probó su utilidad para obtener una visión clara y rápida de los contenidos de materia enseñada y evaluada, así como para orientar la tarea de analizar en qué aspectos y por qué fallan los estudiantes.

Para finalizar, aunque escapa al marco de esta investigación conviene subrayar que, si bien investigar en los ambientes educativos reales es mucho más difícil, la validez ecológica y la aplicabilidad de los hallazgos, estimulan esta modalidad, especialmente en las condiciones restrictivas de tiempo y recurso humano que afectan a nuestras instituciones, y que probablemente no sufrirán modificaciones en el futuro inmediato.

U.C.V. FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO MATEMATICA APLICADA
CATEDRA ANALISIS MATEMATICO I Per. 2/86
POST-TEST C.A.C.G./M.I.C.

Apellido(s): _____ Nombre(s): _____

FORMA A

INSTRUCCIONES

Este examen consta de tres partes:

- 1) Lectura de un escrito (tomado del Texto que se usará en el Curso).
- 2) Una media página en blanco, en la cual usted debe hacer un resumen de la lectura del escrito.
- 3) Un cuestionario que usted debe responder en los espacios indicados para tal efecto.

ESCRITO

Ciertas combinaciones de e^x y e^{-x} aparecen con tal insistencia en ecuaciones diferenciales y en ingeniería, que se les asigna nombre. En esta sección definiremos las llamadas *funciones hiperbólicas* y obtendremos sus propiedades básicas. Como la letra x la emplearemos para otros propósitos, vamos a usar la t en estas exponenciales, escribiendo, por tanto, e^t y e^{-t} .

EL COSENO HIPERBOLICO

DEFINICION El *coseno hiperbólico*. Sea t un número real. El coseno hiperbólico de t , denotado por $\cosh t$, viene dado por la fórmula

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Para representarlo gráficamente, notemos que

$$\begin{aligned}\cosh(-t) &= \frac{e^{-t} + e^{t+0}}{2} \\ &= \frac{e^{-t} + e^t}{2} \\ &= \cosh t.\end{aligned}$$

Luego, al ser $\cosh(-t) = \cosh t$, \cosh es función par, y su gráfico será simétrico respecto al eje vertical. Más aún, $\cosh t$ es suma de dos términos

$$\cosh t = \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2}.$$

Cuando $t \rightarrow \infty$, el segundo término $e^{-t}/2$ tiende a 0. Luego para $t > 0$ y grande, el gráfico del $\cosh t$ estará ligeramente por encima del de $e^t/2$. Todo eso, junto al hecho de que $\cosh 0 = (e^0 + e^{-0})/2 = 1$, es la base de la Figura 6.43.

La curva $y = \cosh t$ en la Figura 6.43 se llama una *catenaria* (del latín *catena* = cadena). Una cadena o una cuerda, suspendida de sus extremos, forma una curva que es parte de una catenaria.

EL SENO HIPERBOLICO

La otra función hiperbólica de uso frecuente es el seno.

DEFINICION El *seno hiperbólico*. Sea t un número real. El seno hiperbólico de t , que se denota $\sinh t$, se define como

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

$\sinh t$ es una función impar

Se comprueba sin dificultad que $\sinh 0 = 0$ y $\sinh(-t) = -\sinh t$, de modo que el gráfico de $\sinh t$ es simétrico respecto al origen. Además está por debajo del de $e^t/2$. Cuando $t \rightarrow \infty$, ambos gráficos se aproximan entre sí, porque $e^{-t}/2 \rightarrow 0$. La Figura 6.44 muestra el gráfico de $\sinh t$.

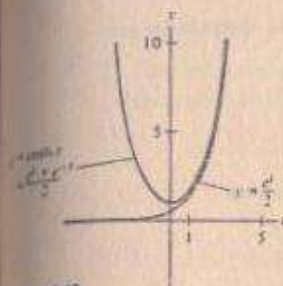
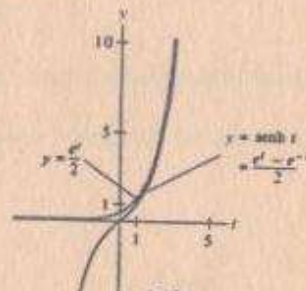


Figura 6.43

Para $|t| \rightarrow \infty$, el gráfico de $y = \cosh t$ es asintótico al de $y = \frac{e^t}{2}$, o $y = \frac{e^{-t}}{2}$.

Señalemos el contraste entre $\sinh t$ y $\sin t$. Cuando t se hace grande, el seno hiperbólico se hace grande, $\lim_{t \rightarrow \infty} \sinh t = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} \sinh t = -\infty$. Hay un contraste similar entre $\cosh t$ y $\cos t$. Mientras las funciones trigonométricas son periódicas, las hiperbólicas no lo son.

Por qué se llaman hiperbólicas

El Ejemplo 1 revela por qué ese calificativo de «hiperbólicas» para las funciones $(e^t + e^{-t})/2$ y $(e^t - e^{-t})/2$.

EJEMPLO 1 Demostrar que para cada t real el punto

$$x = \cosh t, \quad y = \sinh t$$

pertenece a la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

SOLUCION Calcular $\cosh^2 t - \sinh^2 t$ y ver si es igual a 1. Se tiene

$$\begin{aligned} \cosh^2 t - \sinh^2 t &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} \\ &= \frac{2 + 2}{4} \quad \text{cancelando} \\ &= 1. \end{aligned}$$

RESUMEN

CUESTIONARIO

1) Escriba, usando exclusivamente palabras, el concepto de seno hiperbólico de un número real.

2) Dibuje el gráfico aproximado de la función $y = \cosh x$.

3) Para cada una de las siguientes proposiciones se pide:
Señalar con una V la que considere verdadera
Señalar con una F la que le sea falsa

- a) $\cosh x = \cosh y \implies x = y$
- b) $y = \cosh x$ es una función par
- c) $u < v \implies \sinh u < \sinh v$

4) Discutir la validez de cada uno de los siguientes resultados:

a) $\cosh t + \sinh t = e^t$

b) $\lim_{t \rightarrow \infty} \cosh t = +\infty$

c) $\sinh 0 = 0$

d) $y = \sinh x$ tiene una asíntota oblicua.

5) a) Si $y = \cosh x$ "despeje" la variable x en función de la variable y

b) Demuestre la identidad:

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

Solo para uso del corrector

1 | 1 | 2 | 3a | b | 3c | 4a | 4b | 4c | 4d | 4e | 5a | 5b | TOTAL

| | | | | | | | | | | | | | |

PRE-TEST C.A.C.G./M.I.C.

Apellido(s) _____ Nombre(s) _____

FORMA B

INSTRUCCIONES

Este examen consta de tres partes:

- 1) Lectura de un escrito (tomado del Texto que se usará en el Curso).
- 2) Una media página en blanco, en la cual usted debe resumir la lectura del escrito. Tal resumen debe contener: los conceptos fundamentales que usted encuentra. Los resultados (notaciones, reglas, axiomas, teoremas, propiedades) más importantes. Los procedimientos (de Cálculo, descriptivos, explicativos y de modelación) que usted encuentre en la lectura.
- 3) Un cuestionario que usted debe responder en los espacios dejados para tal efecto.

ESCRITO

VALOR ABSOLUTO (O MÓDULO) El valor absoluto (o módulo) de un número real indica «lo alejado que está del 0». La próxima definición precisa esta idea.

DEFINICIÓN *Valor absoluto (o módulo).* El valor absoluto de un número x positivo es el propio x . El valor absoluto de un número x negativo es $-x$. El valor absoluto de 0 es 0.

Si $x \geq 0$, $|x| = x$. Si $x < 0$, $|x| = -x$. El valor absoluto de x se denotará $|x|$. Por definición, $|3| = 3$ y $|-3| = -(-3) = 3$. Para todo x , $|-x| = |x|$; x y $-x$ tienen el mismo valor absoluto. En algunas calculadoras programables, el «valor absoluto» figura en una tecla rotulada como «abs». Ocasionalmente usaremos abs x en vez de $|x|$.

El valor absoluto se comporta mejor respecto a la multiplicación que respecto a la suma. Para cualquier par x e y de números reales,

$$|xy| = |x| |y| \quad (\text{El valor absoluto del producto es el producto de los valores absolutos.})$$

La desigualdad triangular $|x + y| \leq |x| + |y|$ (El valor absoluto de la suma es menor o igual que la suma de valores absolutos.)

La segunda afirmación se conoce como *desigualdad triangular*. Por ejemplo, $|(-3) + 7| \leq |-3| + |7|$, como se ve fácilmente con un poco de aritmética.

EJEMPLO 4 Representar en la recta numérica el conjunto de números x tales que $|x| < 2$.

SOLUCIÓN Un número positivo tiene módulo menor que 2 si el mismo es menor que 2. Un número negativo tiene módulo menor que 2 si el mismo es mayor que -2 . Como también $|0| < 2$, el conjunto pedido es el intervalo abierto de la Figura A.6.



Figura A.6

El intervalo $(-2, 2)$ está formado por todos aquellos números que distan menos de 2 del origen. ■

Hagamos notar que para cualquier $a > 0$, $|x| < a$ describe el intervalo abierto $(-a, a)$.

EJEMPLO 5 Representar sobre la recta numérica el conjunto de números x tales que $|5(x-1)| < 3$.

SOLUCIÓN

$ 5(x-1) < 3$.. dada
$5 x-1 < 3$	valor absoluto del producto
$ x-1 < \frac{3}{5}$	dividiendo por 5
$-\frac{3}{5} < x-1 < \frac{3}{5}$	$x-1$ tiene valor absoluto menor que $\frac{3}{5}$
$1 - \frac{3}{5} < x < 1 + \frac{3}{5}$	sumamos 1 a la desigualdad
$\frac{2}{5} < x < \frac{8}{5}$	aritmética

176

176

En resumen, x está en el intervalo abierto $(\frac{2}{5}, \frac{8}{5})$, que se muestra en la Figura A.7.

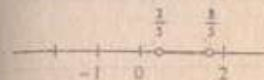


Figura A.7

RESUMEN

177