

# PAPEL DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS EN LA CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES

Mario José Arrieche Alvarado

UPEL-Maracay

## Resumen

Esta investigación se centra en la caracterización del papel de las nociones conjuntistas básicas en la construcción de los números naturales. El problema está inmerso en un proyecto macro sobre "el papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros de educación primaria". Como el currículo de los maestros es muy amplio delimitamos el problema a las relaciones ecológicas entre estas nociones y los números naturales. Para tal fin caracterizamos el papel de los conjuntos en las construcciones de los números naturales elaboradas por autores interesados en los fundamentos de la matemática (Frege, Dedekind y Peano) y las realizadas desde un enfoque constructivista (Weyl y Lorenzen). Para ello, usamos la noción de praxeología matemática descrita en el modelo semiótico-antropológico para la investigación en Didáctica de la Matemática (Godino y Batanero, 1994).

**Palabras clave:** Números naturales, formación de maestros, praxeología matemática, semiótico, antropológico.

## Abstract

This investigation itself centers in the characterization of the role of the basic notions of Set theory in the construction of the natural numbers. The problem is immersed in an extensive project on "the role of the set theory in the mathematical formation of the teachers of primary education". As the curriculum of the teachers is very extensive we delimit the problem to the ecological relations between the sets and the natural numbers. For such end we characterize the role of the sets in the constructions of the elaborate natural numbers by authors interested in the bases of the mathematics (Frege, Dedekind and Peano) and them carried out since a focus constructivista (Weyl and Lorenzen). For it, we use the notion of praxeología mathematical described in the semiotic-anthropological model for the investigation in teaching of the mathematics (Godino and Batanero, 1994)

**Keywords:** natural numbers, formation of teachers, praxeología mathematical, semiotic, anthropological.

**Recibido:** 05/12/2005

**Aceptado:** 08/03/2006

## Introducción

El problema abordado en esta investigación se centra en la caracterización del papel de las nociones conjuntistas básicas en la construcción de los números naturales.

Para tal fin, se realizó un estudio de las construcciones de los números elaboradas por autores interesados por los fundamentos de la matemática Frege (1884), Dedekind (1888) y Peano (1889) y las realizadas desde un enfoque constructivista Weyl (1949) y Lorenzen (1962). Para ello, abordamos los siguientes estudios:

- Descripción sucinta de los principales aspectos matemáticos considerados en las construcciones de los números naturales propuestas por los autores citados.
- Descripción e interpretación del papel de las nociones conjuntistas básicas en las construcciones en referencia, haciendo uso de la noción de praxeología matemática desarrollada en el modelo teórico propuesto por Godino y Batanero (1994, 1997) y designado como semiótico-antropológico para la Investigación en Didáctica de la Matemática.

En este contexto de construcción de los números naturales se ponen en juego una praxeología numérica (respecto a los números naturales) y una praxeología conjuntista (respecto a las nociones conjuntistas básicas). Nos proponemos caracterizar el papel de la praxeología conjuntista en la praxeología numérica. Para lograr esta meta, consideraremos las dimensiones praxémica (tipos de problemas, técnicas y los elementos notacionales o lingüísticos) y discursiva (conceptos - definiciones, propiedades - proposiciones, argumentaciones - justificaciones) de la praxeología numérica, puestas en funcionamiento en la mencionada construcción.

Este estudio nos va a permitir elaborar una visión integral de los números naturales, y de sus relaciones con los cardinales de conjuntos finitos y el lenguaje conjuntista, que será de utilidad para interpretar fenómenos didácticos y hacer propuestas fundadas de cambio en los currículos de matemáticas para la formación de profesores de primaria.

Cabe destacar que, por cuestiones de espacio, en este trabajo sólo describimos la construcción de los números elaborada por Frege (1884). Se remite al lector, interesado en este tema, a Arrieche (2002), donde se hace un análisis profundo y detallado de las construcciones elaboradas por los autores referidos.

### **Construcción de los números naturales según Gottlob Frege**

En este apartado describimos el desarrollo de la construcción de los números naturales realizado por Gottlob Frege, proveniente de su trabajo denominado "Die Grundlagen der Arithmetik" (Fundamentos de la Aritmética) publicado en el año 1884. Es de hacer notar que toda la obra de Frege (inclusive toda su vida) la dedicó a tratar de entender qué son los números naturales y de dónde surge que los teoremas aritméticos sean tan seguros y confiables, matemáticamente hablando. Todo este esfuerzo, se tradujo en tratar de desarrollar su tesis logicista: reducir toda la aritmética a la lógica.

#### **Primera aproximación**

En su primera aproximación por definir el concepto de número, Frege sigue el siguiente procedimiento: empieza diciendo lo que no son los números, y en segundo lugar trata de responder a la pregunta, ¿qué son los números?

Al describir lo que no son los números expresa que "los números no son cosas materiales, ni conjuntos, montones o configuraciones de cosas materiales<sup>1</sup>; y no son propiedades de cosas materiales". Sigue diciendo que los números tampoco son algo subjetivo, no son nada físico, no son una imagen, y no se confunden con los signos que se refieren a ellos. Se señala que "el número no surge añadiendo una cosa a otra. También es irrelevante para él que demos una denominación a cada nuevo añadido" (Frege, 1884, p.72).

---

<sup>1</sup> Mosterín, 1972, p.p 5-6, prólogo de la obra de Frege Fundamentos de la Aritmética, 1884.

Frege expresa que los enunciados numéricos no se refieren a objetos, sino a conceptos. En este sentido, Frege (1884) señala que el soporte de los números es el concepto, resalta además que podemos ver cómo llegamos a la idea de número por abstracción, pero que ésto no puede ser así, ya que lo que se obtiene de esta manera es el concepto, en el cual se descubre el número.

"Los números sólo se asignan a los conceptos, bajo los cuales caen lo externo y lo interno, lo espacial y lo temporal, lo no espacial y lo atemporal" (Frege, 1884, p. 75). Al asignar un número se afirma algo sobre un concepto, por ejemplo: "Si decimos que la tierra tiene un satélite natural, o que nuestro sistema solar tiene nueve planetas, o que en la biblioteca municipal hay veinte mil libros, estamos diciendo algo de conceptos: que bajo el concepto "satélite natural de la Tierra" cae un objeto, bajo el concepto "planeta de nuestro sistema solar" caen nueve objetos, bajo el concepto "libros de la biblioteca municipal" caen veinte mil objetos" (Mosterin, 2000, p. 48).

Frege se plantea definir recursiva y contextualmente (en el contexto de un enunciado del tipo "el número  $n$  corresponde al concepto  $P$ ") los números naturales, para lo cual, enuncia las siguientes proposiciones:

a) El número 0 corresponde al concepto  $P$  si ningún objeto cae bajo  $P$ , y

b) El número  $n + 1$ , cae bajo el concepto  $P$ , si hay un objeto  $a$ ; tal que  $a$  cae bajo  $P$ , y el número  $n$  corresponde al concepto "cae bajo  $P$ ", pero es distinto de  $a$ .

Así, se habría definido cada número natural  $n$  "en enunciados del tipo el número  $n$  corresponde al concepto  $P$ , pero no en ecuaciones, que constituye el tipo más frecuente de teorema matemático"<sup>2</sup>. Frege argumenta que con este procedimiento, todavía no ha definido el concepto de número en forma general. Por lo que para presentar definitivamente el concepto de número, lo realiza en dos etapas:

a) Define el concepto de número cardinal (en general) y;

b) Se precisa el concepto de número natural o finito.

### **Definición de número cardinal**

Para describir el concepto de número cardinal Frege define una relación de equivalencia  $R$  sobre una clase  $A$ , como una relación reflexiva, simétrica y transitiva. Esta relación genera una partición de  $A$  en clases de equivalencia. Introduce, de esta manera, la definición de clase de equivalencia de un elemento  $b$  de  $A$ , como la clase de todos los elementos de  $A$  que están con  $b$  en la relación  $R$ . Cabe destacar que el término clase de  $A$  en el lenguaje conjuntista actual se refiere a un conjunto cualquiera, es decir, un conjunto en donde no importa la naturaleza de sus elementos.

Frege continúa argumentando que una manera de definir entidades matemáticas, consiste en definir las como las clases de equivalencia inducidas por una determinada relación de equivalencia en una clase previamente dada de elementos. Para ilustrar esta situación presenta un ejemplo, considerando las rectas del plano, y la relación de paralelismo entre ellas, la cual es una relación de equivalencia que genera una partición de la clase de las rectas del plano, en clases de equivalencias, a las que se llama direcciones. Se deduce que la dirección de una recta  $b$ , no es sino la clase de equivalencia de  $b$  respecto a la relación de paralelismo, en otras palabras, la clase de todas las rectas paralelas a  $b$ .

<sup>2</sup> Mosterín, 1972, p.6, prólogo de la obra de Frege Fundamentos de la Aritmética, 1884.

Frege aplicó este mismo proceso para definir número cardinal, el cual desarrollamos a continuación. Para tal efecto, se exige contar con un dominio previamente dado de elementos, y definir en él una adecuada relación de equivalencia. En este contexto, dominio es un conjunto especial de elementos en donde se ha definido una relación binaria. Más concretamente, si se tiene una relación binaria de un conjunto A en un conjunto B, el dominio viene dado por el conjunto formado por los primeros elementos de los pares de  $A \times B$  que cumplen con la definición de la relación.

En el caso que nos ocupa, se elige como dominio la clase cuyos elementos son conceptos, sobre el cual se define como relación de equivalencia entre conceptos, la relación de biyectabilidad. El concepto P es biyectable (o está relacionado mediante la relación de biyectabilidad) con el concepto Q si y sólo si hay una biyección (aplicación biunívoca) entre los objetos que caen bajo P y los objetos que caen bajo Q. En otras palabras, P es biyectable con Q si y sólo si hay una relación que asocia cada objeto que cae bajo P con un (y sólo un) objeto que cae bajo Q, y a la inversa.

Como la relación de biyectabilidad es de equivalencia, genera una partición del dominio dado (clase de los conceptos) en clases de equivalencia, a las que llama números cardinales. El número cardinal de un concepto P es la clase de equivalencia de P respecto a la relación de biyectabilidad, es decir, la clase de todos los conceptos biyectables con P. Es lo que Frege expresa en su peculiar terminología diciendo que "el número que corresponde a un concepto F es la extensión del concepto equinúmero del concepto F" (Frege, 1884, p.92).

### **Definición de número natural**

En el desarrollo realizado anteriormente, se ha definido el concepto de número (cardinal) de una manera general, es decir, tanto para número finito o infinito. Para definir número natural se requiere de las definiciones previas siguientes:

El 0 se define como el número que corresponde al concepto "distinto de sí mismo", es decir, es la clase de todos los conceptos vacíos. Se argumenta que la clase de los conceptos vacíos es la clase de todos los conceptos bajo los que no cae objeto alguno. De igual manera, se define el 1 como el número que corresponde al concepto "igual a 0". Es decir, el 1 es la clase de los conceptos unitarios, en otras palabras, de todos los conceptos bajo los que cae un solo objeto.

Posteriormente, Frege enuncia que: n es el siguiente de m si hay un concepto P y un objeto a que cae bajo él, tales que n es el número de P y m es el número del concepto "cae bajo P y es distinto de a". Una vez dadas, las definiciones del 0 y de siguiente estamos en capacidad de dar la definición de número natural.

La definición que propone de número natural (o cardinal finito), es la que sigue: n es un número natural si n pertenece a la serie numérica que empieza por 0. Es decir, que n es 0 o que n cae bajo cada concepto bajo el que cae el 1, y bajo el que cae el siguiente de cada objeto que cae bajo él.

En la definición de Frege, se observa que los números naturales son los objetos que satisfacen el V axioma de Peano. En especial, se muestra que todo "número natural tiene un siguiente indicando que para cada número natural n, el número natural que corresponde al concepto "pertenece a la serie numérica que termina con n" es el siguiente de n"<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> Mosterín, 1972, p. 8, prólogo de la obra de Frege Fundamentos de la Aritmética, 1884

## **El papel de las nociones básicas de la teoría de conjuntos en la construcción de los números naturales realizada por Frege (1884)**

Para caracterizar el papel de las nociones conjuntistas básicas en la construcción de los números naturales realizada por Frege, consideraremos las dimensiones praxémica (situaciones-problema, técnica, lenguaje) y discursiva (conceptos, propiedades, argumentaciones) de una praxeología matemática.

### **Dimensión praxémica**

En esta dimensión, destacaremos los tipos de situación problema abordados por Frege, las técnicas y los elementos notacionales o lingüísticos usados en su construcción de los números. Con respecto a los tipos de situación problema, Mosterín (2000) señala que Frege se dedicó a dos tareas básicas: la fundamentación de la aritmética y la aclaración de las nociones semánticas. Pero su mayor esfuerzo lo dedicó por entender con profundidad qué son los números naturales y de dónde les viene a los teoremas aritméticos su solidez matemática.

En relación a las técnicas, tomaremos en cuenta el procedimiento empleado, es decir, el conjunto de pasos realizados para obtener el concepto de número natural y la serie numérica 0, 1, 2, 3,... de los números naturales. Dentro de este procedimiento, sólo enfatizaremos algunos aspectos desarrollados, tales como la definición recursiva y contextual de los números naturales (en el contexto de un enunciado del tipo "el número  $n$  corresponde al concepto  $P$ ), que consiste en dar los enunciados:

- a) El número 0 corresponde al concepto  $P$  si ningún objeto cae bajo  $P$ , y
- b) El número  $n + 1$ , cae bajo el concepto  $P$ , si hay un objeto  $a$ ; tal que  $a$  cae bajo  $P$ , y el número  $n$  corresponde al concepto "cae bajo  $P$ , pero es distinto de  $a$ ".

Para presentar definitivamente el concepto de número, lo realiza en dos etapas: define el concepto de número cardinal (en general) y precisa el de número natural o finito. A su vez, para elaborar la definición de número cardinal define una relación de equivalencia  $R$  sobre una clase  $A$ , como una relación reflexiva, simétrica y transitiva. Es de hacer notar que, esta definición de número cardinal dada por Frege es la que Russell denomina definición nominal (Russell, 1903).

Es notorio que desde el mismo planteamiento del procedimiento analizado, se nos presenta de una forma implícita el uso de las nociones básicas de la teoría de conjuntos. Más concretamente, para definir una relación  $R$  que sea de equivalencia se requiere obligatoriamente la existencia de un conjunto  $A$ , sobre el cual se definirá la propiedad o regla matemática que cumpla con las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva que en el contexto desarrollado lo identificamos con la clase  $A$ . Además, para demostrar el cumplimiento de las mencionadas propiedades, se exige determinar el conjunto de los pares ordenados del producto cartesiano  $A \times A$  que cumplen con la definición de la relación  $R$  definida sobre  $A$ .

Con respecto al uso de los elementos notacionales o lingüísticos, señalamos los siguientes:

- $n$ : denota un número cualquiera
- $P$ : se refiere a un concepto
- 0: símbolo para denotar el cero

- $n + 1$ : un número cualquiera más 1
- $a$ : denota un objeto cualquiera
- $R$ : denota una relación cualquiera
- $A$ : denota una clase cualquiera

En este aspecto de la praxeología numérica, identificamos las notaciones de un objeto y de una clase cualquiera con las notaciones de elemento de un conjunto y la de un conjunto cualquiera, respectivamente.

### **Dimensión discursiva**

En esta componente de la praxeología numérica, mostraremos sólo aquellos elementos (conceptos-definiciones, propiedades y argumentaciones) que involucran implícita o explícitamente nociones conjuntistas en su descripción. En este sentido, en la argumentación dada por Frege, la relación de equivalencia definida sobre la clase  $A$  para definir el número cardinal genera una partición de  $A$  en clases de equivalencia, tiene implícitas nociones conjuntistas básicas, las cuales especificamos a continuación. Para definir el concepto de partición se requiere de las nociones de familia de conjuntos, conjunto vacío, intersección de conjuntos y unión de conjuntos, puesto que una partición sobre un conjunto  $A$  es una familia de conjuntos no vacíos, disjuntos dos a dos, cuya unión es el conjunto  $A$ .

Además en la definición de la noción de clase de equivalencia de un elemento  $b$  de  $A$  como la clase de todos los elementos de  $A$  que están con  $b$  en la relación  $R$ , se observa, prácticamente en forma explícita, que la noción de clase corresponde a la noción de conjunto. También se puede resaltar que las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva que debe cumplir la relación  $R$  para ser de equivalencia involucran las nociones de conjunto, elemento de un conjunto, subconjunto, producto cartesiano, etc.

En los conceptos-definiciones se elige como dominio la clase cuyos elementos son conceptos y se define la relación de equivalencia entre conceptos, como relación de biyectabilidad, se expresa de la manera siguiente: el concepto  $P$  es biyectable (o están relacionados mediante la relación de biyectabilidad) con el concepto  $Q$  si y solo si hay una biyección (aplicación biunívoca) entre los objetos que caen bajo  $P$  y los objetos que caen bajo  $Q$ . Esta definición contiene implícitamente nociones conjuntistas, que señalamos a continuación.

Por las características de la relación definida (relación de biyectabilidad) en el dominio cuyos elementos son conceptos, identificamos a los conceptos con la noción de conjunto, puesto que la relación de biyectabilidad debe ser definida en un dominio cuyos elementos son conjuntos. Por otra parte, la noción de aplicación biunívoca abarca las nociones de conjunto y de elemento de un conjunto, ya que para establecer este tipo de aplicación se requiere de dos conjuntos, de tal manera que a cada elemento del primer conjunto se le haga corresponder un único elemento del segundo, y viceversa.

Veamos el concepto-definición, el número cardinal de un concepto  $P$  es la clase de equivalencia de  $P$  respecto a la relación de biyectabilidad, es decir, la clase de todos los conceptos biyectables con  $P$ . En esta definición se involucra la noción de conjunto, resaltándose que un número cardinal es un conjunto, y que a su vez, sus elementos son conjuntos, lo que, como decíamos anteriormente, coincide con la definición de número cardinal dada por Russell.

El concepto-definición 0 se define como el número que corresponde al concepto "distinto de sí mismo", es decir, es la clase de todos los conceptos vacíos (la clase de los conceptos vacíos es la clase de todos los conceptos bajo los que no cae objeto alguno). Se define el 1 como el número que corresponde al concepto "igual a 0", es decir, el 1 es la clase de los conceptos unitarios (todos los conceptos bajo los que cae un solo objeto). Se presentan casi de forma explícita las nociones de conjunto vacío y conjunto unitario, que identificamos con las nociones de concepto vacío y concepto unitario, respectivamente.

### Conclusiones

En este trabajo hemos complementado el análisis epistemológico realizado por Arrieche (2002), ejemplificando el papel de la teoría de conjuntos en la matemática, a través del análisis de las construcciones de los números naturales dadas por Frege (1884), Dedekind (1888), Peano (1889), Weyl (1949) y Lorenzen (1962). Este análisis nos ha permitido caracterizar el papel de las nociones básicas de la teoría de conjuntos en las construcciones numéricas estudiadas.

Hemos encontrado que las construcciones de los números naturales realizadas por los matemáticos referidos, presentadas con diversos enfoques (logicista, formal y constructivista), están conectadas por el uso de nociones básicas de la teoría de conjuntos, debido a que sus desarrollos utilizan implícita o explícitamente estas nociones.

Nuestra indagación de las diversas aproximaciones filosóficas sobre los números nos lleva a considerar los números naturales como la estructura matemática común de los sistemas de objetos usados para expresar las situaciones de cardinación y ordenación.

Es frecuente encontrar en los textos matemáticos y filosóficos definiciones de números naturales tales como los números naturales son:

- "los cardinales finitos"
- "las clases de equivalencia de los conjuntos finitos equipotentes entre sí"
- "la propiedad común de los conjuntos finitos que son equipotentes" (expresión inapropiada como criticó Russell)

En estos casos no se explicita que los números son los elementos de cualquier conjunto con una estructura específica, de modo que cada número en particular lo es en tanto que forma parte del sistema correspondiente. Esas expresiones metafóricas ocultan la verdadera realidad de los números, y además confunden un ejemplar de los infinitos sistema numéricos posibles con el tipo estructural correspondiente.

Interesa concebir los cardinales finitos como cantidades, mientras que los números son las medidas de los cardinales, esto es, maneras de expresar las cantidades. Los cardinales de conjuntos son la razón genética de los números, pero los números tienen una realidad diferente de la numerosidad de los conjuntos. Sin embargo, es cierto que cualquier sistema de cantidades discretas (una colección de palotes o piedrecitas, por ejemplo) se puede estructurar recursivamente y ser usado como sistema numérico.

De acuerdo a nuestra concepción, cualquier sistema de numerales con una secuencia recursiva sirve para representar los números. En este sentido, resaltamos que la definición de Frege (1884) y de Russell (1903) de número natural como una clase de equivalencia podría ser recuperada, aunque no para efectos didácticos, como una representación de número natural; ya

que, si somos estrictos, la colección de clases de equivalencias que representan a los números puede ser vista como un sistema numeral con una secuencia recursiva. Esto es, si la clase  $\{0\}$  representa al natural 1, si le agregamos un elemento a esta clase se obtiene la clase  $\{0, 1\}$  que representa al natural 2, y así sucesivamente.

El análisis realizado a las construcciones de los números naturales consideradas, nos permite concluir que todos los enfoques estudiados en esta investigación, excepto la definición por abstracción que consideramos incorrecta al igual que Russell, nos conducen a concebir los números como una estructura abstracta que tiene una secuencia recursiva, teniendo presente que para efectos didácticos se utilice la definición que hemos propuesto anteriormente.

### Referencias

- Arrieche, M. (2002). Papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Dedekind, R. (1888). ¿Qué son y para qué sirven los números? [Traducción e introducción de José Ferreirós]. Madrid: Alianza Editorial, 1998.
- Frege, G. (1884). Fundamentos de la aritmética. [Traducción de Ulises Moulines]. Barcelona: Laia, 1972.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1997). A semiotic and antropological approach to research in mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 10. [URL: <http://ww.ex.ac.uk/local/PERnest/pome10/art7.htm>].
- Lorenzen, P. (1962). *Metamatemática*. [Traducción Jacobo Muñoz]. Madrid: Tecnos, 1971.
- Mosterín, J. (2000). *Los lógicos*. Madrid: Espasa.
- Peano, G. (1889). *Los principios de la aritmética*. [Traducción de Julián Velarde]. Oviedo: Clásicos El Basilisco, 1979.
- Russell, B. (1903). *Los principios de la matemática*. [Traducción de Juan Carlos Grimberg]. Madrid: Espasa-Calpe, 1967.
- Weyl, H. (1949). *Filosofía de las matemáticas y de la ciencia natural*. [Traducción de Carlos Ímaz]. México: Universidad Nacional Autónoma de México, 1965.

**EL AUTOR**

**Mario José Arrieche Alvarado:**

Profesor de Matemática, Magíster en Educación Superior mención Matemática, Doctor en Didáctica de la Matemática, Miembro fundador del Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina". [marioarrieche@hotmail.com](mailto:marioarrieche@hotmail.com)



## **Datos de la Edición Original Impresa**

Arrieché Alvarado, M. (2006, Junio) Papel de la teoría de conjuntos en la construcción de los números naturales. *Paradigma* Vol. XXVII, N° 1, Junio de 2006. /225-235