PARADIGMA, Vol. VII, Nos. 1 y 2, Junio—Diciembre de 1986

ALGUNAS INNOVACIONES NECESARIAS EN LOS PROGRAMAS DE MATEMATICA QUE SE IMPARTEN A NIVEL DE EDUCACION MEDIA EN VENEZUELA*

WALTER BEYER
Universidad Nacional Abierta

RESUMEN

Tijonov, A. y D. Kostomárov (1983) expresan que "La creación de los ordenadores a mediados del siglo XX puede compararse, en cierto sentido, con la invención de la máquina de vapor o con la utilización de la electricidad. Sin embargo, los ordenadores ocupan entre los logros más grandes de la humanidad un lugar especial: Si las máquinas ordinarias aumentaban las posibilidades físicas del hombre, los ordenadores aumentaron considerablemente su potencial intelectual". A pesar de la importancia de los computadores, puesta de manifiesto en el juicio antes citado, la evolución de los programas de estudio y la metodología de la enseñanza de la matemática sufren un inmenso retraso, por lo menos en lo que a Venezuela se refiere, respecto al avance vertiginoso de la ciencia en general y de la computación en particular.

Este trabajo, por una parte presenta un grupo de contenidos, que son susceptibles de ser incorporados en la enseñanza media, y por otra parte, muestra diversos temas que actualmente se enseñan en el nivel medio pero tienen un enfoque y objetivos en completa discordancia con las necesidades del mundo actual. Entre los primeros cabe destacar: Iniciación a los cálculos aproximados (verbigracia: cálculo aproximado de raíces de ecuaciones), teoría de grafos, iniciación a los procesos de optimización, etc.; entre los segundos cabe mencionar los temas de combinatoria, probabilidad y estadística.

En el trabajo se expone el por qué y el para qué deben ser estudiados estos temas en la enseñanza, media y se incursiona en el cómo enseñarlos.

---

* Ponencia presentada en el V Encuentro sobre Enseñanza de la Matemática. CENAMEC, Caracas 12 al 16 de mayo de 1986.

INTRODUCCION

La enseñanza que se proporciona en la educación media en general y en la matemática en particular se encuentra en un notable desfase con respecto al avance vertiginoso de la tecnología, convirtiéndose paulatinamente dicha enseñanza en un conocimiento que podría calificarse de muerto e inoperante en la medida en que no sirve para comprender el complejo mundo actual, el mundo de la informática, de la energía nuclear y de los transbordadores.

Otra de las rémoras que arrastra la enseñanza media, a la cual no escapa la matemática, es la de convertir las clases en un maremagnum de conceptos, definiciones, fórmulas, ecuaciones, etc. induciendo al alumno a "aprender" todo esto memorísticamente, no quedando nunca en claro las ideas ni su trasfondo que es lo que verdaderamente importa; esto significa que se obvia lo sustancial, la síntesis, el proporcionarle al alumno un hilo conductor.

Los problemas planteados en los párrafos anteriores son la motivación principal de este trabajo, su leit motiv. Cabe destacar que gran parte de la motivación vino inspirada por una frase de Tijonov, A. y D. Kostomárov (1983):

> "La creación de los ordenadores a mediados del siglo XX puede compararse, en cierto sentido, con la invención de la máquina de vapor o con la utilización de la electricidad. Sin embargo los ordenadores ocupan entre los logros más grandes de la humanidad un lugar especial: si las máquinas ordinarias aumentaban las posibilidades físicas del hombre, los ordenadores aumentaron considerablemente su potencial intelectual" (p. 7)

Otra fuente de inspiración fue Varsavsky (1964) quien afirma que:

> "Estamos en época de grandes cambios en la enseñanza secundaria, en todas partes del mundo. Es que los educadores tienen la sensación que la brecha existente entre la enseñanza actual y las necesidades culturales del hombre moderno, debe ser llenada urgentemente o se convertirá en un abismo infranqueable. El Maravilloso mundo de la ciencia está convirtiéndose en algo cada vez más extraño e incomprensible para el hombre común. Eso es peligroso e innecesario."

La ciencia y la tecnología han hecho avances meteóricos en lo que va de siglo y muy especialmente en la segunda mitad de éste a partir de la Segunda Guerra Mundial. Algunos aspectos de estos avances son, entre otros, los siguientes:

Informática:

1943 COLOSSUS, Primer Ordenador electromecánico del mundo.
1946 ENIAC, primer ordenador a válvulas.
1948 Se inventa el TRANSISTOR.
1957 Se crea el FORTRAN.
1959 RCA produce el RCA–501 que usa COBOL.
1960 Se inicia la multiprogramación.
1962 Se crea el BASIC.
1964 IBM desarrolla el PL/1.
1972 Aparece el LSI (Large Scale Integration).

Teoría de Juegos: Von Neumann y Morgenstern (1944)
Programación Lineal: Método Simplex: Dantzig (1947)
Dualidad Von Neumann (1947)

Programación Entera: Problema del agente viajero:

Dantzig, Fulkerson, Johnson (1954). Gomory (1958)
Los trabajos de Beale, Houthakker, Markowitz y Wolfe sobre PROGRAMACION CUADRATICA.

Los Trabajos de Norbert Wiener sobre CIBERNETICA.

1945 se detona la primera bomba atómica.
1951 se construye el primer reactor atómico.

1951 se detona la primera bomba de hidrógeno.
1957 lanzamiento del SPUTKNIK.
1958 se inventa el rayo laser.
1969 el hombre llegó a la Luna.

Comparando esta brevísima lista de adelantos de la ciencia y la tecnología, con el bagaje de conocimientos que proporciona la secundaria (o la escuela básica hoy día) se nota el "abismo infranqueable" del que habla Varsavsky y ello genera una profunda inquietud.

Este trabajo presenta algunos temas que pueden ser incorporados a la enseñanza media y muestra otros que actualmente se enseñan en ese nivel, pero con un enfoque y objetivos en completa discordancia con las necesidades planteadas por la realidad científico—tecnológica del mundo actual.

En el trabajo se expondrán el por qué y el para qué deben ser enseñados estos temas en el nivel medio y se incursionará en el cómo enseñarlos. En relación con el cómo enseñar en este nivel se acoge plenamente el sentido y filosofía de Santaló (1970) quien sostiene que:

> "... para empezar a estudiar una teoría, no siempre es el camino axiomático el más recomendable. Los axiomas son elaborados por quienes conocen muy bien la teoría y su verdadero sentido y necesidad se comprenden con claridad tan solo cuando se está ya familiarizado con los elementos y relaciones básicas que ellos tratan de afirmar de manera abstracta y precisa. Es mejor empezar por definiciones tal vez no muy exactas y con ejemplos simples, pero sustanciales, para poder comprender luego el verdadero sentido de los axiomas, y para que los mismos aparezcan de manera natural como expresión sintética y firme de conocimientos ya adquiridos" (p. 1)

También se comparten las ideas de Poincaré (1963), quien expresa:

> "¿Qué es una buena definición?. Para el filósofo o para el sabio es la que se aplica a todos los objetos definidos y nada más que a ellos, lo que satisface las reglas de la lógica. Pero en la enseñanza no es así; una buena definición es la comprendida por los alumnos"

NUEVOS ENFOQUES DE ALGUNOS TEMAS QUE SE ENSEÑAN ACTUALMENTE EN EDUCACION MEDIA

Resolución de Ecuaciones:

En primer lugar se analizará el tema Resolución de Ecuaciones. Al formular las siguientes interrogantes: ¿Sabe el alumno lo que es una ecuación? ¿Sabe lo que es una solución de una ecuación?. La respuesta mas probable que se obtendría es que el alumno desconoce totalmente el significado de los términos ECUACION y SOLUCION o RAIZ DE UNA ECUACION; a lo sumo el alumno podría mostrar una ecuación de primer grado como: $2x - 3 = 0$ y despejar el valor de equis (x): $x = 3/2$ y el profesor de matemática sonreirá feliz por la sapiencia de su alumno. Pero, ¿comprende realmente el alumno lo que está haciendo, o simplemente efectúa un cálculo mecánico? ¿sabrá el alumno interpretar geométricamente el problema planteado?. Quien esto escribe piensa que, en general, el alumno procede en forma mecánica y no tiene la menor idea del significado geométrico del problema. Pero, tal vez el alumno muestre la ecuación $x^2 - 3x - 2 = 0$ y nos diga que la respectiva solución es:

$$X = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Llegados a este punto podrían reiterarse las anteriores preguntas y responderlas en forma similar al caso de la ecuación de primer grado. Más aún, aquí puede ampliarse el espectro de interrogantes:

¿Sabe el alumno que es $\sqrt{17}$ y como se trabaja con este número? El profesor dirá con orgullo que sí y seguramente el alumno toma una calculadora y obtiene el valor 4,1231056. Tomando este valor el alumno procede a sustituirlo y obtiene el "valor" de las raíces de la ecuación planteada. La respuesta del autor a la interrogante formulada es que el alumno no sabe distinguir entre $\sqrt{17}$ y una aproximación de este número; lo que ha obtenido el alumno es:

$$\sqrt{17} = 4.1231056 \text{ y no } \sqrt{17} = 4.1231056$$

Puede constatarse que el alumno desconoce el hecho de aproximar y la noción de error; más aún el alumno no maneja las expresiones decimales con que frecuentemente representamos a los números reales.

Los comentarios anteriores conducen a la necesidad de replantearse la enseñanza de este tema, siendo necesario que le quede claro al alumno el concepto de ecuación (sus relaciones y sus diferencias con los conceptos de identidad, función, relación) y el concepto de solución de una ecuación; haciendo énfasis en el significado geométrico que tiene la resolución de ecuaciones, entendiendo que resolver la ecuación:

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

consiste en encontrar (si existen) los valores de x tales que al ser sustituidos en (1) convierten a (1) en una identidad y hacer ver que geométricamente ello significa determinar la abscisa del punto de corte de la gráfica de la función f con el eje de abscisas, como se ilustra en la figura 1.

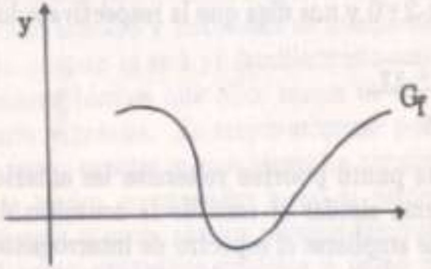


Figura 1

Como puede observarse, para la resolución analítica (cuando ésta puede ser efectuada) se requiere aplicar un procedimiento secuencial de solución (ALGORITMO), el cual consiste en una cadena finita de opera-

ciones que nos permiten "despejar" el(los) valores de x que satisfacen (1) o decidir que no existe ningún valor de x que satisfaga (1).

Las operaciones a las que se hizo referencia son de diversa índole: sumas, diferencias, multiplicaciones, divisiones, potenciaciones, logaritmación, exponenciación, etc., dependiendo ello de cómo esté definida la función f.

Así tenemos que:

$2x - 3 = 0$ (ecuación a ser resuelta)

$2x - 3 + 3 = 0 + 3 = 3$ (sumamos 3 a ambos miembros de la ecuación)

$2x = 3$

$\frac{2x}{2} = \frac{3}{2}$ (dividimos por 2 ambos miembros de la ecuación)

$x = 3/2$

Para la ecuación de primer grado $ax + b = 0,\ a \neq 0$ tenemos:

1. restamos b a ambos miembros de la ecuación.
2. dividimos ambos miembros de la ecuación por a;
3. se obtiene la solución

$$x = -b/a$$

Asimismo, para la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, tenemos:

1. $x^2 + (b/a)x + (c/a) = 0$ (dividimos ambos miembros por a)
2. $x^2 + (b/a)x + (c/a) - (c/a) = -(c/a)$ (restamos c/a)
3. $x^2 + (b/a)x + b^2/4a^2 = -(c/a)\ \ (b^2/4a^2$ (sumamos $b^2/4a^2$)

4. $(x + b/2a)^2 = (b^2 - 4ac)/4a^2$ (reescribimos el lado izquierdo como producto notable)

5. $(x + b/2a) = \pm\sqrt{(b^2 - 4ac)/4a} = \pm\sqrt{(b^2 - 4ac)}/2a$ (extraemos raíz cuadrada)

6. $x = -b/2a \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}/2a$

En ambos casos se ha obtenido una expresión explícita para las respectivas soluciones; sin embargo, no siempre ésto es así. Se tiene, por ejemplo, la ecuación: $x - \text{sen}(x) = 0$ en la cual no es posible despejar explícitamente x.

De lo anterior se desprende que puede darse el caso en que (1) tiene solución (o soluciones) y no obstante no pueda(n) despejarse, es decir, no existe una expresión explícita. Ello conduce a la introducción de métodos aproximados para resolver ecuaciones. Más aún, en el caso de obtener una fórmula o expresión explícita para calcular raíces de una ecuación, ésta puede ser poco útil como es el caso de las ecuaciones cúbicas y cuárticas. Adicionalmente puede señalarse que en la mayoría de los casos obtenemos soluciones irracionales y a la larga, para efectos prácticos, han de considerarse aproximaciones racionales de estas soluciones.

Las consideraciones anteriores presentan a los métodos aproximados como la mejor opción para resolver ecuaciones. Otra ventaja adicional es la posibilidad de utilizar el computador en la resolución de problemas, dado que no es tan complicada la tarea de programar los algoritmos más conocidos de resolución de ecuaciones por métodos aproximados.

Debe notarse que al trabajar con métodos aproximados surgen de manera natural otras nociones como las de: error de una aproximación, error absoluto, error relativo, error porcentual, cifras significativas, etc. nociones sin las cuales el concepto de aproximación no tendría ningún sentido.

Además, la resolución de ecuaciones por métodos aproximados permite introducir otros conceptos matemáticos como son: noción de con-

tinuidad de una función, teorema de Bolzano, cambio de signos de una función, gráficas de funciones, polinomios (por ejemplo: todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real).

El autor considera que en el nivel de la enseñanza media se pueden introducir el Método de Bisección y el Método de las Cuerdas para el cálculo aproximado de raíces reales de ecuaciones. Nótese que estos métodos permiten tratar no solamente ecuaciones algebraicas, sino que también hacen posible resolver ecuaciones trascendentales.

Proporcionar al menos dos métodos aproximados permite compararlos en cuanto a su eficiencia y ver cual es el "mejor". Ello introduce un tema de primera línea en las ciencias de la computación: determinar el mejor algoritmo para resolver un problema o una clase de problemas.

En una etapa temprana se puede introducir este estudio de las ecuaciones considerando sólo ecuaciones algebraicas. Para este estudio se requieren esencialmente los siguientes conocimientos de entrada: conjuntos, estudio de los números reales, intervalos, funciones (especialmente polinómicas) y sus propiedades y gráficas de funciones.

Se comenzaría el estudio aclarando los términos ECUACION y SOLUCION DE UNA ECUACION, interpretando geométricamente estos conceptos. Se centraría la atención, primero, en el estudio de las ecuaciones de primero y segundo grados, y apoyándose en este conocimiento se irían considerando progresivamente casos más complejos. Se proseguiría introduciendo las nociones de continuidad (siempre manejando intuitivamente estos conceptos), cambios de signo de una función (enfatizar en el significado geométrico), teorema de Bolzano, etc.; posteriormente se pasaría a describir el Método de Bisección y estudiar la noción de error.

Para describir el algoritmo del Método de Bisección se emplearía, en primer lugar, una descripción geométrica del proceso; a continuación se utilizaría el lenguaje de los diagramas de flujo (para describir el algoritmo) y el lenguaje natural, para finalmente emplear un lenguaje de programación (BASIC, por ejemplo).

Al alumno se le plantearían, en lenguaje natural, algunos problemas que conduzcan a la resolución de ecuaciones. El alumno debe traducir del lenguaje natural al lenguaje de las matemáticas, esto último permite utilizar a las ecuaciones como un modelo.

Al aplicar el Método de Bisección se considerarían dos tipos de problemas: conocido n (el número de iteraciones a realizar) hallar el enésimo iterado y una cota del error cometido; y conocida la cota del error, hallar el iterado que satisfaga esa cota del error.

En una etapa más tardía se extendería el estudio al caso de ecuaciones trascendentes, para lo cual se requeriría estudiar previamente algunas funciones trascendentes (logarítmicas, exponenciales, trigonométricas) sus propiedades y sus gráficas.

Análogamente a la presentación del algoritmo del Método de Bisección, se presentaría el algoritmo del Método de las Cuerdas. En este segundo método de resolución aproximado es importante destacarle al alumno que se está sustituyendo la curva (gráfica de f) por un segmento de recta. Por supuesto, en la presentación de este algoritmo es menester discutir previamente algunos conceptos como el de secante, por ejemplo.

En este momento se tiene el terreno preparado para resolver problemas utilizando ambos métodos y comparar su eficiencia.

Como puede observarse, la resolución de ecuaciones según este esquema no se convierte en un fin en sí mismo, sino que es aprovechada para afianzar conceptos y nociones previamente estudiadas: conjuntos, números reales, funciones elementales; así como también permite introducir nuevas nociones matemáticas: continuidad, teorema de Bolzano, aproximación, error; y nociones computacionales: algoritmo, diagramas de flujo, lenguajes de programación, etc. Es decir, se ha utilizado la enseñanza de la resolución de ecuaciones, como un elemento integrador y ampliador del conocimiento matemático. Además permite mostrar algunas de las aplicaciones de la matemática.

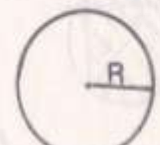
Con esta presentación del tema resolución de ecuaciones se cubriría una parte de los temas relacionados con la noción de APROXIMAR.

Cálculo de Areas:

Otro tema que se estudia en educación media con un enfoque inadecuado es el relacionado con el cálculo de áreas. Igual que cuando se analizó el tema de resolución de ecuaciones, se comenzará formulando algunas interrogantes: ¿Conoce el alumno, las diferencias existentes entre longitud, área y volumen? ¿Sabe el alumno algunas de las características comunes a las tres nociones antes citadas?.

El autor piensa que, en general, la respuesta es negativa. En la enseñanza de este tema comúnmente se le dice al alumno:

considere el círculo de radio R



su área es:

$$A = \pi R^2$$

y la longitud de su circunferencia es:

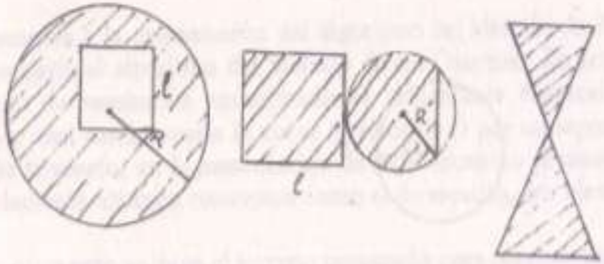
$$L = 2\pi R$$

Interrogamos ahora: ¿Sabrá el alumno por qué al círculo se le calcula el área y a la circunferencia se le calcula la longitud? ¿Qué diferencias existen entre círculo y circunferencia? ¿será el alumno capaz de calcular, conociendo la fórmula mediante la cual se calcula el área del círculo, el área de figuras como las que se muestran a continuación?:

CORONA SECTOR SEGMENTO

$A = \pi(R^2 - r^2)$ $A = \dfrac{\pi R^2 N^\circ}{360^\circ}$ (A = A (sector) - A (triang.)

El autor considera que es importante que el alumno comprenda cómo calcular el área de figuras como las mostradas anteriormente; así como de figuras como las que aparecen a continuación:



Es conocido que una figura plana limitada por un polígono puede ser descompuesta en triángulos cuyas áreas pueden ser calculadas por la fórmula:

$$\frac{(\text{base})\ (\text{altura})}{2}$$

Así, sumando áreas de triángulos se puede calcular el área de una región plana como la que se muestra en la figura 2.

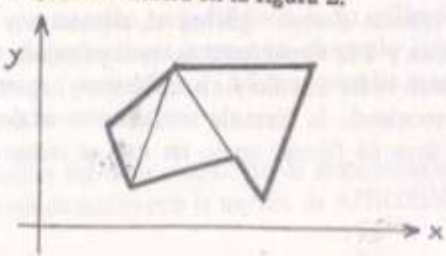


Figura 2

A partir del área de los triángulos se puede calcular el área de cuadrados y rectángulos, y a partir de éstas el área de un trapecio.

Puede ahora formularse la pregunta: ¿Es posible calcular, en este nivel de la enseñanza, áreas de figuras limitadas por curvas?. El autor sostiene que ello es posible, siempre y cuando se utilicen métodos aproximados.

Considérese la siguiente figura:

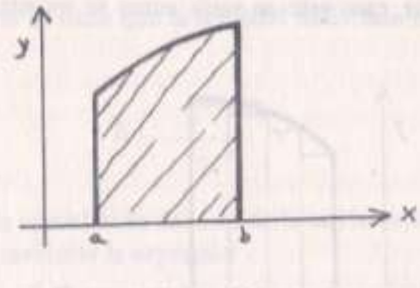


Figura 3

Se quiere calcular el área de la región rayada en la figura 3.

Para lograr ese cometido se procede así: se divide el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos; se levanta desde cada punto extremo de los subintervalos, una perpendicular hasta cortar la curva, como se muestra en la figura 4.

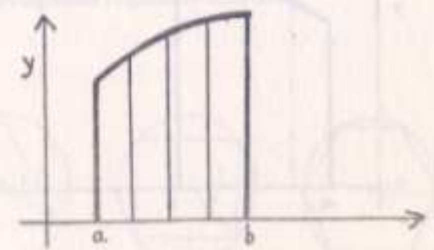


Figura 4

Como puede observarse la figura inicial ha sido subdividida en n figuras cada una de las cuales tiene por contorno trazos rectilíneos salvo en la parte superior. El problema ahora es cómo sustituir "adecuadamente" un arco de curva por un segmento de recta. Puede verse que existen, en principio, dos formas naturales de hacer esto: 1. sustituir el arco de curva por un segmento de recta paralelo al eje de las abscisas (esto conduce a la Fórmula de los Rectángulos); 2. sustituir el arco de curva por la secante que une los puntos extremos del arco de curva (esto conduce a la Fórmula de los Trapecios).

En el primer caso esto se vería como se muestra en la figura 5.

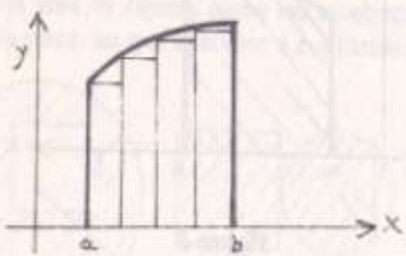


Figura 5

En el segundo de los casos se tendría lo que muestra la figura 6.

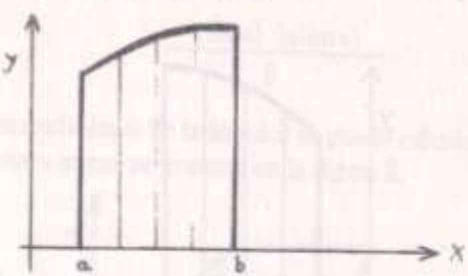


Figura 6

Si $y = f(x)$ es una expresión analítica de la curva se obtendría la siguiente tabla de valores:

x	x_0	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	y_2	...	y_{n-1}	y_n

Por otra parte se tiene que la longitud de la base de cada rectángulo o trapecio es:

$$h = \frac{b}{n}$$

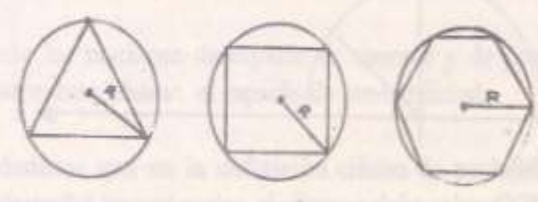
luego, una medida aproximada del área de la región rayada en la figura 3 podría obtenerse mediante la expresión

$A = h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$ (Fórmula de los Rectángulos)

o la expresión:

$A = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$ (Fórmula de los Trapecios)

En forma análoga se puede calcular aproximadamente el área de un círculo a partir de polígonos regulares inscritos.



$A = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ $\quad A = 2R^2$ $\quad A = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

Por último se puede introducir el cálculo de áreas por medios mecánicos; esto consiste en pesar una hoja, luego dibujar la figura a la cual se le quiere calcular el área, recortarla, pesar la parte recortada y luego realizar una simple regla de tres.

En cada uno de los casos planteados se retomaría el estudio de los errores que se cometen al aproximar.

Para describir los algoritmos de la FORMULA DE LOS RECTANGULOS y de la FORMULA DE LOS TRAPECIOS se emplearía un proceso análogo al seguido en la descripción de los algoritmos para el cálculo aproximado de raíces de ecuaciones: partiendo de lo geométrico y pasando por el lenguaje natural y de los diagramas de flujo se llegaría hasta la realización de un programa en un lenguaje de computación.

Aquí también es oportuna la ocasión para, por una parte, plantearle al estudiante problemas en lenguaje natural que al ser traducidos al lenguaje matemático conduzcan a problemas de cálculos de áreas por métodos aproximados; por otra parte, resolver problemas de áreas por medio de ambos métodos y comparar resultados (puede comenzarse a hacer esto último, por ejemplo con un semicírculo del cual conocemos el valor exacto del área. (Ver figura 7)

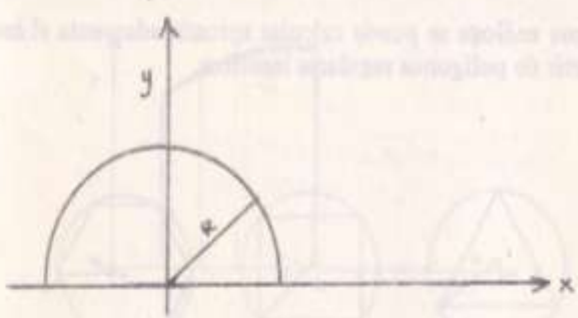


Figura 7

Este esquema proporciona un reforzamiento de los conceptos de aproximación señalados en el punto referente a resolución aproximada de ecuaciones, permite resolver problemas prácticos porque ya no se está restringido a calcular sólo área de figuras planas con contornos poligonales o de círculos y proporciona un método para obtener aproximaciones de π .

Probabilidad y Estadística

En primer lugar el autor considera didácticamente conveniente separar un poco la probabilidad y la estadística de manera que el alumno pueda distinguir las diferencias metodológicas existentes entre ambas y encontrar los puntos de contacto entre ellas.

En este nivel de la enseñanza conviene enseñar la probabilidad partiendo de experiencias específicas: lanzamientos de dados y monedas, extracción de bolas de colores o numeradas, extracción de cartas, etc. Mediante estos experimentos aleatorios se puede familiarizar progresivamente al estudiante con la noción de azar y su cuantificación: la probabilidad.

A continuación se introducen algunas definiciones de probabilidad: la definición clásica (Laplace), la definición frecuentista, la definición subjetiva. A partir de estas definiciones se obtienen, como síntesis, los axiomas de la probabilidad.

Los experimentos inicialmente citados permiten, de manera natural introducir la noción de espacio de sucesos.

Teniendo las nociones de espacio de sucesos y de probabilidad, se obtiene la estructura básica: el espacio de probabilidad.

Cabe destacar que en la definición clásica de probabilidad hay un hecho de primordial importancia: el alumno debe saber CONTAR, es decir, se le debe armar con las herramientas necesarias (COMBINATORIA) pero no enfocadas desde el punto de vista tradicional. Este problema fue abordado antes por el autor, ver Beyer (1985)

En el tema de probabilidad se pueden enseñar los siguientes aspectos: definición de espacio muestral, definición de probabilidad, espacio de probabilidad, dependencia e independencia de sucesos, principio de las probabilidades totales, principio de las probabilidades compuestas, variable aleatoria, definir el valor esperado (caso de espacio finito), definir la varianza (caso de espacio finito), interpretación de la esperanza y de la varianza, estudio de algunos modelos discretos: Bernoulli, binomial, uniforme, estudio somero del modelo normal y de la ley uniforme, interpretación de la esperanza y de la varianza en los casos contínuos estudiados, uso de la tabla normal, visión intuitiva de la desigualdad de Tchebycheff.

Es oportuna la ocasión para introducir la generación de números aleatorios, base de los procesos de simulación (métodos de Montecarlo). La importancia de la introducción de estos números radica esencialmente en que a través de los procesos de simulación se pueden resolver innumerables problemas que dependen del azar y cuya resolución analítica es imposible o impráctica. Por otra parte cabe destacar que gran número de calculadores proveen generadores de números aleatorios.

Cabe nuevamente señalar que en el desarrollo pedagógico del tema deben incorporarse otras nociones anteriormente estudiadas: conjuntos, función, combinatoria, grafos, aproximación, error, etc.

En la enseñanza de este tema debe hacerse amplio uso de la intuición y de los problemas que proporciona el mundo real. Debe enfatizarse que los espacios de probabilidad constituyen modelos.

En lo concerniente a la estadística se debe enseñar la mayor parte de la estadística descriptiva: población, muestra, medidas de tendencia central, medidas de dispersión, frecuencia, intervalos de clase, frecuencia

relativa y absoluta, frecuencia acumulada, medidas de tendencia central para datos agrupados, medidas de dispersión para datos agrupados, histogramas, diagramas de barras, ojivas, polígonos de frecuencia, datos categóricos y cuantitativos.

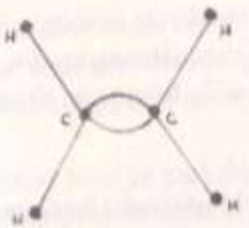
Análogamente al tema de probabilidad, la estadística ha de ser enseñada utilizando al máximo la intución y los problemas extraidos de la realidad (apoyarse por ejemplo en boletines estadísticos, notas de prensa, etc.); la enseñanza debe permitir armonizar e integrar los nuevos conocimientos con los que ya poseía el alumno. Aquí cabe señalar que es prudente hacer uso de la calculadora y en lo posible del computador.

NUEVOS TEMAS QUE PUEDEN SER INCORPORADOS A LOS PROGRAMAS DE MATEMATICA DE EDUCACION MEDIA

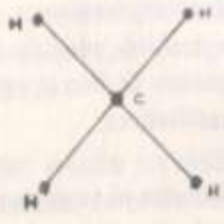
Teoría de Grafos

Los GRAFOS constituyen un modelo ideal para muchos problemas que se presentan en la vida cotidiana. Los grafos tienen además la interesante peculiaridad de ser una estructura muy accesible por cuanto gran parte de los conceptos que giran a su alrededor son conceptos con una gran carga intuitiva y además constituyen un vehículo eficaz para lograr formación matemática dado que las demostraciones de muchos teoremas referentes a grafos son de gran sencillez.

La enseñanza de teoría de grafos permite ligar fácilmente el conocimiento matemático con el de otras disciplinas; así por ejemplo: en química, las moléculas orgánicas pueden ser descritas por medio de grafos.

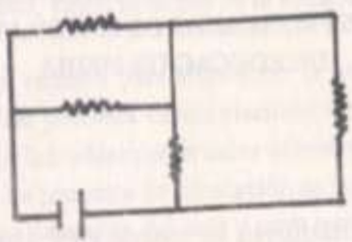


C_2H_2 (molécula de eteno)

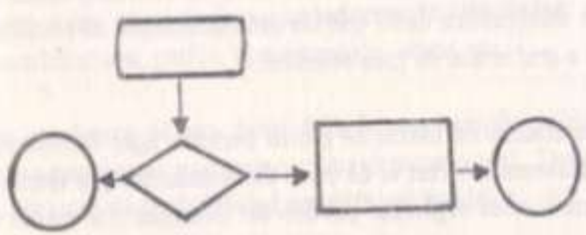


CH_4 (metano)

en física, los circuitos eléctricos son grafos a través de los cuales circula un flujo y se les llama redes:



en computación, un diagrama de flujo corresponde también a un grafo;



el mapa vial de un país, las relaciones de parentesco, las relaciones matemáticas (de orden, por ejemplo), los cruces genéticos, etc. se pueden modelar por medio de grafos.

Hay unos tipos especiales de grafos que se llaman árboles; son muy conocidos los árboles genealógicos, pero ésta no es la única aplicación que de ellos se obtienen. También tienen numerosas aplicaciones en probabilidad, estadística y teoría de decisiones (árboles de probabilidad, árboles de decisión).

A este nivel de la educación podríamos enseñar, entre otros, los siguientes aspectos de la teoría de grafos: grafo, vértice, arista, subgrafo, grado de un vértice, adyacencia, incidencia, matriz de adyacencia, matriz de incidencia, cadena, camino, circuito, conectividad de un grafo, árbol, árbol expandido, grafo dirigido, arco, grafos planares.

En esta área se trabaja esencialmente con conjuntos finitos y aparecen problemas de: CONSTRUCCION, OPTIMIZACION, ENUMERACION, etc.

Los grafos constituyen un buen tema para hacer ver la utilidad de la matemática en otras ramas del conocimiento y son manipulables eficientemente mediante el computador.

Teoría de Decisiones:

Otro tema, realmente interesante, y de gran utilidad, que se puede incorporar a la enseñanza secundaria es teoría de Decisiones.

Según Prawda "Decidir es un proceso por el cual una o más personas seleccionan una alternativa de entre un conjunto para, de acuerdo a ciertos criterios, alcanzar una serie de objetivos y metas preestablecidas; todo lo anterior, dentro del entorno de los posibles estados que pueda guardar la naturaleza".

A grandes rasgos se pueden clasificar los problemas de decisión en dos tipos: determinísticos y estadísticos.

En líneas generales se pueden identificar, en un problema de teoría de decisiones, los siguientes elementos: el decisor (objetivos, preferencias, información), las alternativas (acciones), los estados de la naturaleza (entorno), los resultados; estos elementos se integran y se relacionan como lo muestra la Figura 8.

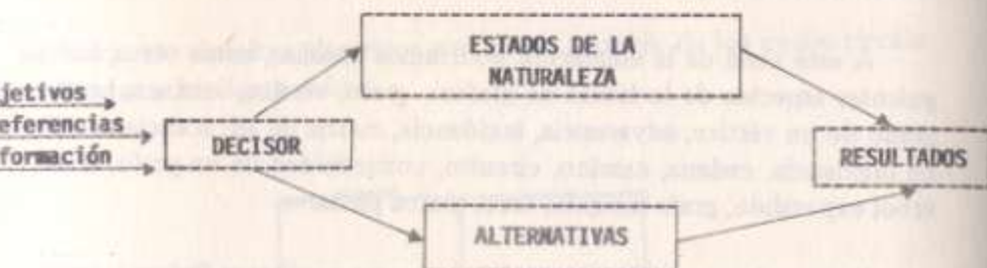


Figura 8

Un problema típico de decisiones determinísticos es el siguiente: supóngase que se le ofrece un empleo con dos posibilidades en lo que a aumento de salario se refiere:

PLAN A: 30.000 al año con un aumento de 2.000 cada 6 meses;
PLAN B: 30.000 al año con un aumento de 5.000 al año.

¿Cuál de las dos posibilidades escogería? ¿Cómo se llega a una solución?

Estudiemos ambos planes mediante el siguiente cuadro:

	Plan A	Plan B
primeros 6 meses	15.000	15.000
segundos 6 meses	17.000	17.000
terceros 6 meses	19.000	17.500
cuartos 6 meses	21.000	17.500
quintos 6 meses	23.000	20.000
sextos 6 meses	25.000	20.000

Como podemos observar, el Plan A es mejor.

Aquí el decisor es usted, las alternativas son tomar el
Plan B y los resultados los que se muestran en la tabla anteri
rio de decisión que se escogió fue el del máximo beneficio.

La mezcla de algunas nociones de grafos con probabilida
miten abordar los problemas de decisión estocásticos por med
boles de decisión. El árbol de decisión es un árbol en el sentic
ría de grafos, en el cual los nodos o vértices son de tres tipo
decisión los cuales corresponden a nodos a partir de los cuale
alternativas o acciones a seguir; nodos de incertidumbre que
de los que se derivan los eventos o estados de la naturaleza; n
nales los cuales corresponden a nodos en los que finaliza la oc
cuencial de una serie de eventos al tomar un determinado c
ción.

Las ramas o aristas del árbol de decisión son de dos tip
que representan alternativas o acciones a tomar; ramas que r
estados de la naturaleza.

Los árboles de decisión contemplan dos etapas, a saber:

a. Diseño (se hace de izquierda a derecha).
b. Solución (se hace de derecha a izquierda).

El árbol de decisión es un método gráfico que permite visualizar el proceso de análisis de decisiones expresando en orden secuencial las acciones o alternativas disponibles para el decisor, los estados de la naturaleza y los resultados determinados por la incertidumbre.

Como se puede observar, la teoría de decisiones es un instrumento eminentemente aplicado que sirve de vehículo para la aplicación y la integración de diversas áreas del conocimiento matemático como son las probabilidades, la estadística y la teoría de grafos.

Tomando un criterio de decisión (por ejemplo, el criterio del máximo beneficio esperado) podemos desarrollar un algoritmo y programar éste resolviendo el problema mediante el uso del computador.

Optimización

La noción de optimizar es otro de los temas que se pueden incorporar a la enseñanza secundaria.

El estudio del trinomio cuadrado no es explotado en toda su potencialidad y se pierde una buena oportunidad para introducir al alumno en algunos problemas de optimización.

Al estudiar, en física, el movimiento acelerado, como por ejemplo, el lanzamiento de un proyectil, resulta común preguntarse por la altura máxima que éste alcanza.

El estudio del trinomio cuadrado permite resolver problemas como el antes planteado introduciendo adicionalmente conceptos como: máximo de una función, mínimo de una función, valor máximo, valor mínimo, función creciente, función decreciente.

Para el caso del trinomio cuadrado

$$ax^2 + bx + c \qquad (I)$$

el óptimo se alcanza en

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

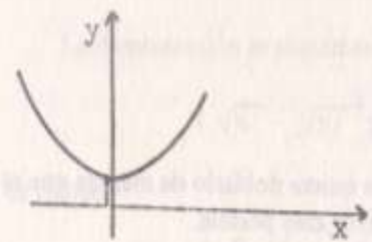
es decir, el vértice de la parábola que tiene por ecuación a (I). El valor óptimo que toma la función.

$$f(x) = a^2 x + bx + c$$

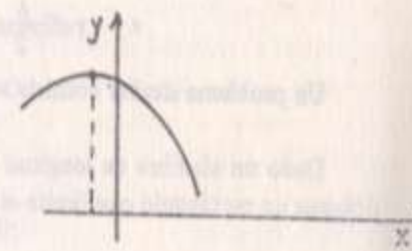
es

$$f(x_0) = c - \frac{b^2}{4a}$$

Este valor es un máximo cuando $a < 0$ y es un mínimo cuando $a > 0$. Así, geométricamente se tiene:



$(a > 0)$ mínimo



$(a < 0)$ máximo

Las nociones anteriormente referidas pueden estudiarse basándose en gráficas y ejemplos y a la vez permiten resolver problemas como el siguiente:

Descomponer el número positivo A en dos sumandos de tal manera que el producto de estos sea máximo.

SOLUCION: sean x e y los sumandos, entonces

$$A = x + y;$$

luego, el problema a resolver es hallar x e y tales que

$$x\,(A - x) = -x^2 + Ax.$$

Tenemos un trinomio cuadrado para el cual

$$a = -1,\ b = A\ \text{ y }\ c = 0$$

luego el óptimo se alcanza en

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{A}{2}$$

el valor óptimo es

$$y_0 = \frac{A}{2}$$

el cual es un máximo ya que $a = -1 < 0$; es decir, obtuvimos

$$x = y = \frac{A}{2}$$

Un problema similar consiste en:

Dado un alambre de longitud 2 se quiere doblarlo de manera que se obtenga un rectángulo que limite el mayor área posible.

$$L = 2x + 2y \Longleftrightarrow \frac{L}{2} = x + 4$$

se quiere que

$$x\,\left(\frac{L}{2} - y\right)$$

sea máximo.

La solución que se obtiene usando el trinomio cuadrado es:

$$x = y = \frac{L}{4}$$

o sea el rectángulo es un cuadrado.

A partir de la optimización de problemas usando el trinomio cuadrado se pueden plantear otros problemas de optimización que pueden reducirse a los primeros.

Aquí nuevamente conviene señalar la necesidad de enunciar problemas en lenguaje natural de tal forma que el estudiante se habitúe a realizar la formulación matemática de los mismos.

Pueden resolverse otros problemas de optimización partiendo del conocimiento de la siguiente desigualdad:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2} \qquad x, y \geqslant 0$$

La igualdad se da para $x = y$

La demostración es sumamente sencilla:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$$

de donde

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geqslant 0;$$

de aquí la desigualdad es inmediata.

Con la desigualdad antes citada se pueden resolver problemas como el siguiente:

Descomponer un número positivo P dado en dos factores positivos de tal manera que su suma sea mínima.

SOLUCION: sean x e y los factores; se tiene

$$P = xy \qquad x, y \geqslant 0$$

de la desigualdad se tiene que

$$x + y \geqslant 2\sqrt{P},$$

pero $x = y = \sqrt{P}$ satisfacen la igualdad, luego realizan el mínimo para la suma.

Otros problemas ligados al tema en consideración son la búsqueda del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo.

Tradicionalmente se enseñan estas nociones de manera totalmente mecánica y el alumno no comprende en realidad de que se trata. Contrario a esto se debe analizar el significado de cada uno de éstos términos de forma que el estudiante capte claramente el significado de divisor y de múltiplo; debe aclarársele que los divisores y los múltiplos de un número configuran conjuntos y que hablar de divisores comunes o de múltiplos comunes se refiere a una intersección de conjuntos y finalmente resaltar que se trata de buscar óptimos en esos conjuntos. Posteriormente se enfocaría el problema de cómo encontrarlos de manera eficiente.

Teoría de Sistemas

Finalmente, es conveniente introducir, de manera somera el lenguaje de la teoría de sistemas; sistema es un conjunto de objetos unidos a las relaciones entre dichos objetos y entre sus atributos o una reunión de componentes dotados de propiedades identificables y entre los cuales se perciben relaciones.

Es conveniente que al estudiante se le cree el hábito de analizar sistemas del mundo real y sea capaz de cuantificar situaciones, realizar modelos sencillos y resolverlos.

RECOMENDACIONES

La puesta en práctica de las cuestiones planteadas en este trabajo requiere la realización de algunas acciones específicas entre las cuales se destacan las siguientes:

1. Se necesita que el docente tenga una buena formación matemática para que pueda cumplir con las aspiraciones aquí planteadas.

2. Sería conveniente un aumento de las horas de clase asignadas a la matemática en la educación media.

3. Se plantea la necesidad de elaborar textos y otros medios de apoyo para este enfoque de los temas aquí tratados.

4. Se requeriría en gran parte de los temas el uso, como mínimo, de una calculadora científica.

5. Se requiere una complementación e interacción permanentes entre el desarrollo de los contenidos de las materias: matemática, física, química y biología.

6. Sería conveniente la incorporación de un área de informática en la enseñanza media.

REFERENCIAS

ALVAREZ DEL REAL, Ma. (Directora). Almanaque Mundial 1983. Panamá: Editorial América, S.A. 1983.

BEYER, W. Una Primera Discusión Pedagógica Acerca del Hecho de Contar. Ponencia presentada en el IV Encuentro de Profesores de Didáctica de la Matemática. Caracas: CENAMEC, 1985.

FAURE, R., et. al. **La Investigación Operativa.** Buenos Aires: EUDEBA 1986.

Mi Computer No. 5 (Curso Práctico del Computador Personal, el Micro y el Mini computador). Bogotá: Planeta Colombiana, Editorial S.A., 1985.

MICHELOW, J. **Introducción a la Computación,** monografía científica No. 21, serie de Matemática, Organización de los Estados Americanos, Washington, D.C.: 1980.

POINCARE, H. **Ciencia y Método.** Buenos Aires: Editorial Espasa—Calpe, S.A., Colección Austral, No. 409, 1963.

PRAWDA, J. **Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones** (vol. 2). Modelos Estocásticos, Mexico, D.F.: Editorial Limusa.

SANTALO, L. **Probabilidad e Inferencia Estadística,** monografía científica No. 11, serie de matemática, Organización de los Estados Americanos. Washington, D.C.: 1970.

TIJONOV, A. y KOSTOMAROV, O. **Algo Acerca de Matemática Aplicada.** Moscú: Editorial MIR, 1983.

VARSAVSKY, O. **Algebra para Escuelas Secundarias (Tomo I)** Buenos Aires: Editorial EUDEBA, 1964.

Universidad Nacional Abierta. **Teoría de Decisiones.** Caracas: U.N.A. - 1982.