PARADIGMA, Vol. IX, No. 2 – DICIEMBRE DE 1988

ALGUNAS IDEAS ACERCA DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA EN LA ESCUELA BASICA

Fredy E. González

Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Instituto Pedagógico de Maracay
Departamento de Matemática

RESUMEN

En este trabajo se aspira dar respuestas a las interrogantes ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo enseñar Matemática?; con esa finalidad, el autor enumera varias razones para incluir la Matemática como asignatura de estudio. También, destaca los diversos fines (instrumentales, prácticos y formativos) hacia los cuales debe orientarse la enseñanza de la Matemática, respondiendo así una de las preguntas que más frecuentemente formulan los alumnos a su profesor: « ¿para qué me sirve la Matemática que estudio? » . Además de lo anterior, el autor desarrolla un conjunto de principios metodológicos que sirven de fundamento a la enseñanza de la Matemática en la escuela básica. De igual manera, hace suyo el punto de vista según el cual "La enseñanza de la Matemática debe ser fundamentalmente activa"; por esto, se opone al método memorístico y mecanicista que predomina en la enseñanza de la Matemática a nivel de escuela básica, planteando que la adquisición de las nociones matemáticas debe ser comecuencia de la reflexión que el alumno hace acerca de la actividad constructiva que realiza; este proceso de construcción del conocimiento matemático, según el autor, se desarrolla a lo largo de un continuo que va desde lo concreto hasta lo abstracto y abarca las siguientes etapas: manipulativa, verbal, ideográfica y simbólica. Finalmente, el autor destaca el papel que juegan los materiales didácticos concretos en el aprendizaje de las nociones matemáticas, porque considera que, antes de cualquier adquisición abstracta, el alumno debe tener una experiencia concreta de la noción que debe adquirir.

INTRODUCCION

Las razones que una sociedad determinada puede señalar para justificar la inclusión de la Matemática en sus currícula escolares son múltiples y variadas. Además de constituir una eficaz herramienta de trabajo (tanto intelectual como práctico) la Matemática, per se, es un notable objeto cultural, cuyo estudio es beneficioso hasta para aquel que sólo se limite a contemplar desde lejos sus resultados o dominios.

En todas las actividades humanas es identificable alguna cuestión matemática, aún en aquellas donde menos se sospeche su presencia; ***la Matemática es una ciencia omnipresente y quizás es esta multipresencia cotidiana lo que la hace pasar inadvertida***. En el arte, en la música, en la técnica está presente la Matemática. El problema está en que, así como se necesita cierto "oído" para captar la belleza en la ejecución de una pieza musical, también se necesita, no sólo "oído" sino "gusto, olfato, vista y tacto" para percibir la presencia de la Matemática en todos los órdenes de la vida moderna.

Sin embargo, no es sólo porque está presente en todo por lo que se justifica estudiar Matemática, de hecho son muchos los que pueden pasarse toda la vida sin enterarse de que ella ha sido una silenciosa compañera suya. Esto ocurre porque, a diferencia de otras ciencias como la Química, la Genética o la Farmacología, los resultados de la Matemática no son tangibles, no pueden ser mostrados al público como se exhibe un nuevo compuesto químico, o se evidencia lo productivo de una nueva raza de ganado producida por un entrecruzamiento genético, o se demuestra la efectividad de una nueva medicina. En el caso de la Matemática, la situación es otra. Por ejemplo, en el movimiento de un avión F–16, además de los aspectos mecánico y químico (producción de energía mediante la transformación del combustible), hay un aspecto matemático (representado por el conjunto de cálculos que efectúa el computador que gobierna la nave); sin embargo, éstos cálculos no se ven y su explicación es habitualmente difícil. Es esto lo que ha hecho que algunos llamen a la Matemática ***"la humilde sirvienta de la ciencia"*** o ***"la reina y cenicienta de la ciencia"***.

RAZONES PARA INCLUIR LA MATEMATICA COMO ASIGNATURA DE ESTUDIO

¿Qué puede lograr un individuo estudiando Matemática?. ¿Qué valor social o individual puede tener el dedicarse al estudio de esta disciplina?. ¿Qué gana una sociedad invirtiendo cuantiosos recursos financieros en la formación de un personal especializado en la enseñanza de esta asignatura?.

Ablewhite (1971), refiere las siguientes cinco razones para incluir a la Matemática como asignatura de estudio:

a) constituye un lenguaje del método y del pensamiento ordenado;

b) es el instrumento y el lenguaje de la ciencia;

c) su estudio genera placer y gozo. Con respecto a esto, el propio Ablewhite (1971) dice que dominar pequeños estadios en los procesos matemáticos y resolver problemas puede constituir una actividad placentera (p. 61). En cuanto a las formas de experimentar ese gozo, Ablewhite señala las cuatro siguientes: "primero están el sentimiento de poder y plenitud que se experimenta al resolver un problema real. Esta satisfacción puede sobrevenir sólo cuando el individuo ha reconocido por sí mismo que existe un problema y se ha propuesto resolverlo. En segundo lugar se halla la alegría experimentada al descubrir una técnica que evita gran cantidad de trabajo mental o manual. Tercero, el indudable placer que resulta de resolver un problema que no ha podido ser resuelto y desconcierta a otros, y cuatro, la alegría de reconocer y admirar las reglas y el orden matemático" (p. 62). La exactitud que presenta su contenido es otro de los aspectos de la matemática que puede generar placer en quien la estudia;

d) la matemática es necesaria para poder asimilar comprensivamente la información que se recibe. En efecto, el mundo moderno proporciona al individuo un cúmulo de informaciones que, en su mayor parte, vienen expresadas en un lenguaje que incluye números, medidas y formas matemáticas de la más diversa naturaleza; así que, para poder mantenerse informado el hombre de hoy debe poseer conocimientos matemáticos que le permitan decodificar la información que se le proporciona.

También, la cantidad, naturaleza y carácter de la información que diariamente recibe un individuo hace necesaria la habilidad organizativa e interpretativa que la Matemática da, para poder asimilar apropiadamente tal información.

Por otro lado, el desarrollo tecnológico, industrial y social actual exige la aplicación cotidiana de habilidades matemáticas tales como estimación, resolución de problemas, organización e interpretación de datos, medición de longitudes, pesos y volúmenes, además de otro extraordinario cúmulo de actividades aritméticas, algebraicas y geométricas;

e) ayuda al individuo a mejorar su capacidad de pensamiento. Efectivamente, algunas de las pautas fundamentales del pensamiento matemático son: poder reconocer el orden, distinguir el todo y las partes (análisis) y combinar los todos para hacer nuevos y distintos todos (síntesis); sin embargo, estas características no son exclusivas del pensamiento matemático sino que se hayan presentes en todas las otras formas del pensar, de aquí que el estudio de la matemática podría contribuir a desarrollar la inteligencia de los estudiantes.

FINES DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA

En general, quienes justifican la necesidad de enseñar Matemática, atribuyen a esta actividad diversos fines, los cuales son agrupados en: (a) fines formativos; (b) fines instrumentales y (c) fines prácticos que corresponden, respectivamente, al desarrollo intelectual de quien la estudia, a su preparación para continuar estudios de orden superior conectados con la Matemática y a su capacitación para resolver variados problemas que pueden ser hallados en el entorno sociocultural en el que se desenvuelve el sujeto.

Los fines instrumental y práctico son los que más se usan para tratar de responder una de las interrogantes que frecuentemente hacen los alumnos a su profesor de Matemática: "¿para qué me sirve eso?". Ante esta concretísima pregunta, los docentes habitualmente no dan una respuesta específica; por el contrario, responden con divagaciones o con promesas; una de las respuestas es "esto les servirá a ustedes cuando, más adelante, estén estudiando..." y hacen referencia a otro tema matemático. Lo que lleva implícito esta respuesta es que se trata de justificar el estudio de la Matemática por lo que ella requiere en sí misma. Es decir, se enseña un hecho matemático A porque lo necesitamos para estudiar un hecho matemático B y éste a su vez se requiere para un hecho matemático C y así sucesivamente. Esta respuesta sólo revela el carácter estructurado y sistemático de la Matemática; sin embargo, esta característica no basta para justificar su estudio. Por otro lado, la curiosidad natural del niño o del adolescente merece ser estimulada y ello no se logra prometiendo respuestas en el futuro. Se deben entonces exhibir hechos que, en el aquí y en el ahora, hagan ver al alumno la utilidad que para él tiene el estudio de la Matemática. Este valor que la Matemática tiene para el desarrollo del individuo como persona conduce al planteamiento de los fines formativos del estudio de la Matemática.

Entre los valores formativos que pueden identificarse en el estudio de la Matemática, están los siguientes:

1. Disciplina la voluntad: no hay trabajo matemático, por pequeño que sea, que no exija al individuo la realización de un esfuerzo personal. ***Un auténtico estudio de la Matemática no es compatible con el facilismo.***

2. Refuerza la capacidad de atención: efectivamente, la comprensión de las verdades matemáticas así como la solución de los problemas que en esta asignatura se plantean, exigen la consideración simultánea de datos, relaciones e incógnitas. La omisión de uno cualquiera de estos elementos bloque la posibilidad de captar la validez de la proposición que los contiene o de alcanzar la solución del problema en cuyo planteamiento se hallan incluidos.

3. Contribuye a desarrollar la capacidad crítica: en efecto, el carácter lógico y sistemático que caracteriza la metodología matemática; la necesidad de argumentar y razonar las proposiciones para que puedan ser aceptadas como matemáticamente verdaderas; la necesidad de llevar a cabo argumentaciones consistentes y de diferenciar un argumento válido de uno que no lo es, puede contribuir al desarrollo de la capacidad de crítica y de autocrítica de quien estudia Matemática.

4. Posibilita la mejor utilización del lenguaje al hablar o al escribir: el estudio de la Matemática habitúa al alumno a ser preciso al usar los conceptos para comunicarse con los demás o para argumentar sus puntos de vista. Esto es así en virtu de la claridad, simplicidad y precisión de los conceptos matemáticos (los cuales pueden ser caracterizados por un número relativamente pequeño de atributos definitorios); también, porque las hipótesis, tesis y razonamientos matemáticos son clara e inequívocamente expresables.

5. Incrementa la capacidad de razonamiento: el esquema lógico del razonamiento matemático "hipótesis $\Longrightarrow$ tesis" según el cual, a partir de cierta información dada se pasa por vía deductiva a la tesis o resultado, es análogo al que se plantea cuando, por un camino deductivo, se desea obtener conclusiones a partir de hechos conocidos. Esto posibilita un incremento de la capacidad analítica y deductiva de quienes estudian Matemática y de la capacidad para establecer nexos entre los hechos de la vida real.

PRINCIPIOS METODOLOGICOS DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA EN LA ESCUELA BASICA

El logro de los fines formulados anteriormente plantea una exigencia al docente: transformar su modo de enseñanza, porque el estudio de la Matemática no puede consistir sólo en manipular números y aplicar las cuatro operaciones básicas; sino que, fundamentalmente, debe servir para capacitar al niño para que pueda expresar matemáticamente la realidad que lo circunda.

El docente de los primeros niveles de la escuela básica debe tener presente que en estos años de escolarización ***no son los contenidos matemáticos lo más importante; al contrario, lo más importante es hacer que en las mentes infantiles se inicie el proceso de pensamiento que conduce a la creación de ideas y a la expresión verbal y simbólica de las mismas.***

Fasce y Martiñá (1974), plantean un conjunto de principios metodológicos que sirven de fundamento a la enseñanza de la Matemática en la Escuela Básica y cuya aplicación por parte del docente puede ayudarle a lograr el propósito esbozado anteriormente. Algunos de dichos principios son los siguientes:

1. ***La enseñanza de la Matemática debe constituir una actividad problematizadora; en la cual la construcción del conocimiento matemático por parte del alumno sea lo fundamental para éste.*** Una situación es problemática para un alumno cuando debe pero, en lo inmediato, no puede responder satisfactoriamente una exigencia del medio porque no sabe algo o no lo puede hacer o tiene dudas. Entonces, entre lo que el ambiente instruccional exige al alumno y lo que él posee desde el punto de vista cognoscitivo, existe un desequilibrio que le genera una tensión, una inquietud, un deseo de hacer algo, como si sintiera la necesidad de descargar energías.

Esa situación problemática obliga al alumno a actuar, a buscar una solución y en encontrar esta última consiste el aprendizaje puesto que, aprender es precisamente incorporar una nueva conducta o modificar alguna preexistente para responder satisfactoriamente a una determinada situación para la cual, transitoriamente, no se tiene respuesta alguna.

El medio que circunda al alumno constituye una rica fuente a partir de la cual pueden plantearse situaciones problemáticas. En efecto, si se parte de datos sobre objetivos reales pertenecientes al ambiente que rodea al alumno, se pueden enunciar problemas reales que tengan sentido para él y en los que deba poner en juego su inventiva para hallar la solución; de esta manera, el alumno puede realizar una verdadera actividad matemática con lo cual se logra mucho más de lo que podría alcanzarse si sólo se le exigiese que recite de memoria el enunciado de una ley o propiedad.

En una situación de aprendizaje basada en la solución de problemas se pueden distinguir tres aspectos: motivación, porque los alumnos han de sentir una tensión que los impulse hacia la búsqueda de la solución; sincretismo, porque la situación debe ser presentada en una forma tal que las partes componentes, al principio, no se identifiquen con claridad; necesidad de acción, porque el alumno debe adquirir conciencia de que, si desea resolver el problema, debe actuar, hacer algo, moverse en alguna dirección que eventualmente lo conduzca a la solución del problema.

2. ***El aprendizaje de la matemática constituye una actividad que implica un proceso continuo de integración análisis - síntesis.*** En efecto, frente al problema planteado, el alumno debe comenzar por descomponerlo en sus partes integrantes a fin de identificar los datos que le aporta el enunciado, las relaciones establecidas entre los diferentes componentes de la situación planteada y, sobre todo, determinar las interrogantes que debe responder. Sin embargo, esta actividad analítica debe complementarla con otra de síntesis con la cual se logra una reestructuración consciente de la situación que se desea resolver.

3. ***En la organización de experiencias para el aprendizaje de la Matemática, el docente debe tomar en cuenta los aportes de la Psicología.*** En el primer nivel de la escuela básica, los niños tienen una edad comprendida entre los seis (6) y los nueve (9) años; por esto, resulta importante recurrir a los conocimientos que la psicología aporta en cuanto a las características de la estructura cognitiva que posee el niño de esta edad. Según Piaget (1977), a esta edad el niño ha alcanzado sólo el período de las operaciones concretas, en consecuencia ***aún no está capacitado para trabajar con abstracciones representadas por símbolos.*** Por ello, en esta etapa, las estrategias de aprendizaje correspondientes a Matemática deben proporcionar al niño oportunidades para

que realice experiencias con diversos materiales y objetos para formar conjuntos y establecer relaciones que sirvan para la introducción de los conceptos matemáticos.

Lo anterior significa que los conceptos matemáticos deben tener una fundamentación en lo concreto; esto es así porque el desarrollo intelectual está íntimamente relacionado desde el nacimiento, con la experiencia motora y sensorial del organismo.

La actividad física marca la etapa inicial para aprender las nociones fundamentales de número y espacio. La habilidad de contar se basa en manipulaciones motoras en serie. En geometría, el niño traza líneas, luego dibuja rectángulos, luego triángulos, dando nombre a estas construcciones físicas y reteniendo finalmente el nombre como un dato abstracto para propósitos de razonamiento.

Como todo aprendizaje inicial en clase debe tener origen en una situación problemática concreta, de la cual puede formar parte la actividad sensorial; y todo aprendizaje tiene una base motora, reforzada por la experiencia sensorial a partir de la cual se forman los conceptos mediante las discriminaciones, es preciso brindar al alumno situaciones concretas que le ayuden adquirir cada concepto. Sin embargo, el docente no debe quedarse sólo en el nivel concreto, porque el objetivo consiste en conducir al niño, a través del progresivo desarrollo de su pensamiento, hasta que alcance el nivel abstracto aún cuando se parta de situaciones concretas (Fasce y Martiñá, 1974, p. 11).

4. ***El niño ha de descubrir los conocimientos por si mismo guiado por el maestro, quien estructura la situación de aprendizaje.*** Esto plantea un reto para el docente porque, aunque resulte difícil para un profesor de matemática, cuyo espíritu es abstracto por definición, debe situarse en la perspectiva, fundamentalmente concreta, que tienen sus alumnos; no debe perder de vista que la comprensión real de una noción o una teoría supone su reinvención por parte del sujeto.

En muchos casos el alumno puede dar la impresión de haber comprendido sin cumplir con esa condición de reinvención, basta para ello cierta capacidad de reproducción y de aplicación en algunas situaciones prefabricadas. Pero la verdadera comprensión, aquella que se manifiesta por medio de nuevas aplicaciones espontáneas, o, dicho de otro modo, por una generalización activa, supone mucho más: que el alumno haya sido capaz de encontrar por sí mismo las razones de la verdad que intenta comprender, y, por tanto, que la haya reinventado él mismo, al menos parcialmente.

Como es natural, esto no quiere decir que el maestro ya no sea necesario sino que su papel cambia; ahora la actividad docente no debe consistir sólo en dar "lecciones", sino en organizar situaciones que inciten al alumno a investigar, utilizando los dispositivos apropiados. Si el alumno se equivoca en sus tanteos, los métodos activos recomendarán no corregirle directamente, sino más bien mostrarle contraejemplos que le permitan a él corregir sus propios errores (Piaget, 1980, p. 225–226).

El niño, cuando estudia Matemática, debe participar en forma activa (concreta y mentalmente) en el descubrimiento de los conceptos, tal como si él los creara por primera vez, como si fuera inventor o descubridor; esto no significa que el docente deba dejar solo al niño en su papel de redescubridor; signifca que el maestro ha de limitarse a acompañarlo, guiarlo, orientarlo a través de una situación que él ha estructurado a fin de que aquél logre su objetivo (Fasce y Martiñá, 1974).

Para que pueda lograrse lo anterior, el docente debe hacer todo lo posible por estimular y favorcer en el alumno el aprendizaje activo de la Matemática, mediante una participación personal lo más amplia posible en la elaboración del conocimiento matemático. Según Mialaret (1962), el docente tiene que despertar y mantener el interés del alumno tanto por la Matemática misma como por sus aplicaciones; seguir atentamente la evolución del pensamiento matemático del joven; adaptar la enseñanza a la capacidad individual y a la evolución mental del alumno y diferenciarla sucesivamente según su destino. Igualmente, debe organizar experiencias de aprendizaje que le permitan al alumno ir de lo concreto a lo abstracto, y volver a lo concreto cada vez que sea necesario (tomando en cuenta que el conocimiento matemático nace y se desarrolla por la interiorización de las acciones concretas) no sólo para mostrar la importancia práctica de las matemáticas sino sobre todo para provocar desarrollos teóricos. También, dice Mialaret (1962) es importante inducir al alumno a formar las nociones y a descubrir por sí mismo las relaciones y propiedades matemáticas, en lugar de imponerle un pensamiento de adulto; lograr la adquisición de las nociones y de los procesos operatorios antes de introducir el formalismo; confiar al automatismo sólo las operaciones asimiladas. Así mismo, este autor asegura que es indispensable hacer que el alumno adquiera, en primer lugar la experiencia de los hechos y relaciones matemáticas para iniciarlo luego en el razonamiento deductivo; también, el docente ha de estudiar los errores de los alumnos y ver en ellos un medio de conocer el pensamiento matemático de ellos.

5. ***El docente debe tener conciencia de que los pasos iniciales de todo aprendizaje son lentos,*** más cuando se comienza por una situación problemática, a nivel concreto y en la cual el alumno, mediante un proceso de autodescubrimiento, debe construir el conocimiento; esto implica la realización, tanto por parte del alumno como del docente, de un conjunto de acciones indispensables que requieren más tiempo del que se necesita para llevar a cabo una clase dictada con criterios tradicionales.

6. ***En la presentación del contenido y las actividades de aprendizaje*** debe tenerse cuidado en ***tomar en cuenta tanto la etapa del desarrollo cognitivo en la que se encuentra el alumno*** (para proponerle cuestiones para las cuales potencialmente esté capacitado) ***como la estructura de la Matemática*** (para organizar el material en función de las interconexiones que dicha estructura permite); además, no debe aburrirse al alumno presentando las situaciones siempre de la misma manera, al contrario, debe haber variedad en las formas en que se presenta

el contenido de modo que el alumno no se deje engañar por las apariencias cambiantes de las cosas y que en cada situación sepa descubrir lo fundamental y desdeñar lo accesorio.

7. ***La evaluación y la corrección de los trabajos hechos por los alumnos constituyen etapas claves del proceso de aprendizaje de la Matemática.*** El docente debe tener presente que el alumno ha de conocer los resultados de su desempeño lo antes posible; el maestro tiene que manifestarle su aprobación cuando se desempeña con éxito, debe mostrarle los fracasos detallándolos y no haciendo indicaciones indiscriminadas que no le ayuden a corregirlos, ha de indicarle la causa de los errores y las formas de superarlos; así mismo, el alumno debe desarrollar progresivamente las capacidades de autocontrol y auto corrección.

El docente debe corregir los trabajos de los alumnos lo antes posible y, si resulta factible, hacerlo a medida que cada niño va realizando su tarea; la corrección debe indicar al alumno dónde se equivocó y por qué e indicarle cómo superar su error; el alumno debe rehacer su trabajo correctamente, y debe comenzar corrigiendo los errores más graves.

El docente debe incorporar al alumno al proceso de evaluación mediante procedimientos de coevaluación (evaluación por parte de los compañeros) y de autoevaluación (consideración autocrítica del propio trabajo realizado) y tomar en cuenta que la revisión de los trabajos que sólo se expresa a través de observaciones tales como "bueno" o "malo" o de simples calificaciones numéricas no cumple función educativa alguna.

CARACTER ACTIVO DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA

La enseñanza de la Matemática en la escuela primaria (conocida en Venezuela como Educación Básica) debe ser, según Santaló (1975), fundamentalmente activa; por esto, "el alumno debe participar del aprendizaje, debe sentirse motivado por los problemas y debe intentar resolverlos por sí mismo, apelando a todos los recursos a su alcance y sin pensar en recordar tal o cual fórmula o regla aprendida o que figura en el texto o manual" (p. 41). Aún cuando para el docente sea mucho más fácil señalar unas líneas del manual o dictar una receta operatoria para que el alumno las repita o realice después mecánicamente (esto es lo que Viviano ha llamado Participación Repetitiva), debe esforzarse por estimular la "participación constructiva" (Viviano, 1988) de sus alumnos porque éstos "se acostumbren más fácilmente a recordar que a razonar debido a que la memoria es pasiva y el razonamiento requiere acción y supone mayor esfuerzo" (Santaló, 1975, p. 42).

El docente no debe perder de vista que con el método memorístico los alumnos aprenden a recitar contenidos matemáticos pero el que puedan hacer esto no significa que han aprendido matemática puesto que el aprendizaje en Matemática se mide por la capacidad para resolver problemas y no por la capacidad para recitar, memorística e incomprendidamente, un conjunto de definiciones y axiomas. A este respecto, Mialaret (1967) opina que, el maestro ha de tener en cuenta que "la operación aritmética más sencilla, la construcción geométrica más elemental, o el problema más corriente, pueden ser excelentes ocasiones para estimular al alumno a reflexionar y a razonar" (p. 3) lo cual es uno de los objetivos fundamentales de la enseñanza de la matemática a nivel primario, todo depende de la forma como se plantee la operación, construcción o problema.

EL TRANSITO DE LO CONCRETO A LO ABSTRACTO EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA EN LA ESCUELA BASICA

Durante los primeros años de escolarización, es posible efectuar un trabajo de construcción matemática mediante el desarrollo de experiencias de aprendizaje que involucren el empleo de material didáctico concreto; sin embargo, según Trejo y Bosch (1966), el docente debe tener presente que de lo que se trata no es del "descubrimiento de las propiedades de los objetos sino de conducir al alumno hacia la abstracción a partir de las acciones u operaciones que éste lleve a cabo con el material que se le facilite" (p. 19).

La adquisición de las nociones matemáticas correspondientes a la educación básica debe ser consecuencia de la reflexión que el alumno hace acerca de la actividad constructiva que realiza. En este nivel, ***el niño debe ser conducido al conocimiento de las cosas y de las relaciones entre éstas mediante actividades constructivas y manipulativas, teniendo presente que estas experiencias constituyen, para el niño, sus primeros contactos con las realidades matemáticas.***

Debe recordarse que la capacidad del niño para iniciar estas experiencias y sacar provecho de ellas depende de la etapa del desarrollo cognoscitivo en la cual se encuentre y el docente debe tomar esto en cuenta al momento de diseñar las actividades de aprendizaje que propondrá a sus alumnos.

En el uso de modelos, el maestro debe, en todo momento, tener conciencia de que el objetivo último es eliminar el modelo y reemplazarlo por un conjunto de conocimientos matemáticos; por ello y considerando que el modelo es un medio para un fin y no un fin en sí mismo, cuando el alumno haya obtenido experiencias suficientes, se debe dejar la ayuda sensorial y pasar a la abstracción matemática; sin embargo, de acuerdo con Mialaret (1962), cada vez que sea necesario, se debe recurrir a la experimentación real, figurada o imaginada, para aclarar las definiciones o demostraciones.

Por tanto, en los primeros niveles de la educación básica las actividades iniciales que el docente ha de proponer al niño, con miras a la formación de conceptos matemáticos han de consistir en manipulaciones, comparaciones, asociaciones, relaciones, reconocimiento de signos, traslación (o traducción) de los conocimientos intuitivos y manipulativos al lenguaje gráfico (dibujos) y simbólico (cifras), explicaciones (con sus propias palabras) de la manipulación que hace con los objetos que se le proporcionan; ***luego de esta fase manipulativa es cuando puede pasarse a la fase simbólica.***

En este proceso de tránsito de lo concreto a lo abstracto se identifican las siguientes fases: manipulativa, verbal, ideográfica y simbólica.

1. ***Fase manipulativa:*** es necesario que al alumno se le permita trabajar manualmente materiales concretos (tacos de madera, botones, semillas de frutas, piedritas, etc.) construidos para el efecto u objetos aportados por el niño a la clase, objetos de su propia casa con los que pueda estar familiarizado.

Según Dienes (1970), esta fase manipulativa podría desarrollarse en tres etapas:

1a. Juego libre. Aquí al alumno le es proporcionado un material didáctico concreto, adecuado a los objetivos que se pretendan conseguir, que él puede manipular de diversas maneras y sobre el cual puede ejecutar ciertas acciones (ordenar, clasificar, juntar, desagregar, diferenciar, etc.) de manera espontánea y libre;

2a. Aceptación de Reglas. A través de la manipulación del material que se le ha dado, el sujeto observa que hay ciertas acciones que pueden ejecutarse sobre dicho material y otras acciones que no pueden aplicársele, una vez comprendido esto aceptará reglas de juego, artificialmente impuestas y que podrán cambiarse a voluntad. Lo importante es que se de cuenta de que para jugar a alguna cosa debe aceptar ciertas reglas, ciertas regularidades. Naturalmente, las reglas que el docente imponga deberán estar de acuerdo con los objetivos matemáticos perseguidos.

3a. Juegos de Isomorfismo. Estos son juegos distintos en forma y en apariencia pero que poseen la misma estructura; su utilización ayuda al alumno a pasar de lo concreto a lo abstracto ya que durante su manipulación el alumno prescinde de los caracteres secundarios de los diferentes juegos lo cual le permite concentrarse en los rasgos que tienen en común.

Existen razones psicológicas, didácticas y pedagógicas que justifican el desarrollo de la fase manipulativa:

a) Psicológicas: el alumno de edad prescolar o básica no puede razonar en base a hipótesis verbales mientras no haya alcanzado la etapa de las operaciones lógico–formales;

b) Didácticas: si la abstracción matemática surge como consecuencia de la identificación de los rasgos definitorios e imprescindibles de los conceptos matemáticos (es decir, los que permanecen invariantes en las distintas situaciones) entonces el alumno se debe enfrentar con múltiples situaciones concretas; y para lograr esto resulta necesario suministrarle material didáctico concreto variado y abundante.

c) Pedagógicas: según las posiciones teóricas más recientes, el fundamento del aprendizaje es la propia actividad del alumno y ésta debe realizarse sobre algo concreto.

2. ***Fase verbal:*** durante ésta el niño "explica" con sus propias palabras tanto al docente como a sus compañeros qué manipulaciones ha efectuado con el material que se le aportó. En su propio lenguaje el alumno debe indicar las observaciones que le proporcionó el contacto o el trabajo con el material. Puede ocurrir, al principio, que el docente oriente al alumno a través de preguntas pero, ***debe tener cuidado de no hablar por el niño.***

3. ***Fase ideográfica:*** durante esta etapa se busca que el niño, utilizando dibujos, esquemas o gráficos, intente traducir lo que ha "descubierto" en su contacto con el material. Aquí se le pide al alumno que represente gráficamente la manipulación que efectuó con el material; estas graficaciones aún están muy vinculadas con la forma de los objetos manipulados.

El docente no debe obviar esta fase por cuanto que la abstracción matemática, consecuencia de la reflexión hecha en base a las acciones ejecutadas sobre el material didáctico concreto, no surge de improviso en la mente del alumno y para que dicha abstración sea posible es necesario que se cuente con un modo de representación de aquellas acciones que hagan posible la reflexión acerca de éstas.

4. ***Fase simbólica.*** Un símbolo es algo que evoca una noción abstracta a la cual corresponde; un signo concreto convencionalmente aceptado como representante del objeto o hecho simbolizado. El signo que sirve de símbolo puede ser una palabra, un gesto, un color, una señal o una representación gráfica.

Debido a que esta fase requiere de cierta capacidad de abstracción, es probable que en el primer nivel de la escuela básica no se llegue a ella de un modo total; sin embargo, puede intentarse que los niños, en conjunto y ayudados por el docente, traten de diseñar un símbolo que represente lo más apropiadamente posible el concepto matemático al cual se haya llegado.

Resumiendo, el proceso de construcción del conocimiento matemático, usando material didáctico concreto, se desarrolla así: una vez efectuada la experiencia física de la manipulación de los objetos concretos, se orienta la atención del alumno hacia la operación (es decir, la manipulación) efectuada sobre el objeto; como lo que se busca es alcanzar una abstracción lógico–matemática de la operación (manipulación) efectuada (y no sólo efectuar ésta y ver su resultado), la actividad del docente consistirá en ayudar al alumno a describir con recursos puramente matemáticos, la operación efectuada; luego, debe volcarse la atención sobre la operación misma y no sobre el objeto con el cual se operó; para lograr esto el docente debe ir suministrando, hábilmente, los recursos matemáticos que se requierean para abstraer la operación apoyándose en los conocimientos matemáticos previos que posee el alumno. ***El papel del docente consiste en estimular la capacidad del alumno y no sustituir los razonamientos de éste por los suyos durante el proceso;*** esto es así porque la mentalidad adulta que tiene el docente hace que sus afirmaciones generales cubran un gran número

de casos particulares, por ello, se siente tentado a transmitir al alumno esas ideas para avanzar más rápidamente; se olvida de que las ideas abstractas y generales no se forman sino muy lentamente en el curso de repetidos contactos con lo concreto; se olvida de que la fórmula general podrá ser retenida, pero quedará en un plano puramente verbal, o sea, parcialmente inútil (Mialaret, 1967, p. 7).

LOS MODELOS MATEMATICOS Y SU PAPEL EN LA ENSEÑANZA

Según Santaló (1975), hay un principio fundamental que domina la enseñanza de la matemática a nivel de educación básica: antes de cualquier adquisición abstracta, el niño debe tener una experiencia concreta de la noción, una familiaridad suficiente con ella como para que la formulación verbal no se le imponga desde afuera, sino que sea verdaderamente la traducción, en un lenguaje más preciso y más ordenado, de una realidad vivida y sentida por él.

Por eso, antes de presentar el vocabulario matemático y los signos abstractos el educador deberá asegurarse de que la operación concreta es perfectamente realizada por el alumno y que no corresponde a un simple automatismo. Es necesario insistir acerca de la importancia de la experiencia concreta del niño que lo prepara lentamente para las adquisiciones abstractas y lógicas. Para Mialaret (1967), lo concreto es el punto de partida para lo abstracto, es un medio para lograr la abstracción, por esto los materiales didácticos concretos no deben verse como un fin en si mismos, mediante ellos "el educador debe procurar que los niños descubran, bajo aspectos diversos, la unidad del pensamiento matemático; problemas diferentes por su contenido permiten inducir los mismos principios matemáticos; estos principios deben ser el objeto del estudio y debe aprenderse a descubrirlos y aplicarlos; el pensamiento matemático debe permitir al individuo descubrir lo esencial detrás de lo contingente, clasificar bajo un mismo título apariencias diferentes..." (p. 8). Además, la manipulación de material didáctico concreto debe proporcionar elementos que motiven y estimulen la actividad matemática del alumno.

Piaget (1980) es otro de los que opinan que, para los alumnos de la educación básica, la acción sobre los objetos resulta totalmente indispensable para la comprensión de las nociones matemáticas. Para este autor, "existen dos formas diferentes de experiencias ligadas a las acciones materiales de los sujetos. Hay, en primer lugar, las experiencias físicas (en el sentido amplio de la palabra), que consisten en actuar sobre los objetos a fin de descubrir propiedades que éstos ya poseían antes de su manipulación por el sujeto, como por ejemplo la comparación de pesos o densidades, etc., pero existen también, cosa generalmente ignorada, lo que podríamos llamar experiencias lógico–matemáticas, debido a que la información no se obtiene a partir de los objetos particulares, en tanto que objetos físicos, sino a partir de las propias acciones (o, más bien de sus coordinaciones) que el sujeto ejerce sobre ellos, lo cual no es, precisamente, lo mismo" (p. 221).

Agrega este autor que estas acciones y experiencias lógico–matemáticas constituyen la base para el desarrollo de la capacidad deductiva del alumno porque "las operaciones mentales o intelectuales que intervienen en estas deducciones ulteriores se derivan justamente de las acciones: se trata de acciones interiorizadas, y cuando esta interiorización, junto con las coordinaciones que supone, sea suficiente, las experiencias lógico–matemáticas en tanto que acciones materiales resultarán ya inútiles y la deducción interior se bastará a sí misma. Además, las coordinaciones de las acciones y las experiencias lógico–matemáticas dan lugar, al interiorizarse, a la formación de una variedad particular de abstracción que corresponde precisamente a la abstracción lógica y matemática" (p. 222).

Por todo lo que se ha dicho, resulta imprescindible precisar qué se entiende por material didáctico concreto (MDC); según Puig Adam (1967), se llama así a cualquier material capaz de traducir o de sugerir ideas matemáticas; por esto, un MDC usado para la enseñanza de algún concepto matemático puede ser llamado Modelo Matemático.

En un sentido más amplio, un modelo es toda imagen que traduce concretamente una idea abstracta. Un modelo es, en suma, toda par-

ticularización obtenida por concreción de una idea más o menos abstracta.

Para los alumnos de las clases elementales lo concreto empieza por ser el mundo observable, lo que impresiona directamente sus sentidos (percepción) y, al mismo tiempo, lo que les invita a actuar (acción). Si la percepción y la acción constituyen dos aspectos del aprendizaje, será necesario que los primeros modelos puedan provocar una y otra. Por esto los modelos matemáticos, deben ser diseñados de modo tal que la traducción o la sugestión que entrañen no sean puramente contemplativas, sino que susciten también una acción efectiva; así que, según Puig Adam (1967) "los modelos deberán traducir o sugerir, creando situaciones activas de aprendizaje" (p. 192).

Por otro lado se tiene que, mediante la observación y manejo de múltiples modelos preparados estáticos e investigando los elementos invariantes en modelos dinámicos, los alumnos adquirirán una importante base de ideas abstractas. Además, si se les pide que creen y construyan modelos matemáticos que traduzcan estas ideas, se ejercitarán en la concreción.

En la realización de los modelos debe valorarse la creatividad y la inventiva del alumno, por modestas que ellas sean, a fin de que no se limite a un simple trabajo de copia, sin la menor eficacia para la formación matemática (Puig Adam, 1967, p. 193). Sin embargo, una vez más se insiste en que, el material didáctico concreto sólo tiene carácter auxiliar y su objetivo consiste, no en sustituir la abstracción lógico–matemática, sino facilitarla volcando la atención del alumno hacia el contenido matemático de la manipulación hecha, hasta que logre sustituir las operaciones físicas por operaciones matemáticas (González, 1986, p.11).

La fuente más rica e instructiva de modelos matemáticos es la vida misma. El hombre moderno vive rodeado de modelos matemáticos sin que le llamen la atención, y ello es natural, pues la técnica que nos llena de comodidades está impregnada de Matemática. Por ello el sujeto debe aprender a extraer el contenido matemático que hay en las cosas que lo rodean; esta acción debe ser ejercida, en primer lugar, por los propios profesores de matemática y éstos, a su vez, deben orientar a sus alumnos para que sepan aprovechar las enseñanzas matemáticas contenidas en las cosas.

El docente debe enseñar a sus alumnos a descubrir el contenido matemático presente en las cosas que los rodean, ya sea por simple observación o manejándolas convenientemente. La vida corriente ofrece en todo momento motivos de enseñanza matemática de gran valor educativo.

Los modelos que se utilicen en la enseñanza de la Matemática deberán no sólo traducir o sugerir ideas matemáticas, sino crear situaciones activas de aprendizaje; para que dichos modelos sean capaces de sugerir activamente ideas matemáticas abstractas, es necesario que la abstracción se realice a través de una multiplicidad de modelos estáticos enlazados por una idea subyacente común, o bien que el modelo, si es deformable o dinámico, presente en todos sus aspectos un carácter abstracto invariante. De este modo, la abstracción se realizará en forma activa, aunque esta actividad sólo se refiera a procesos de interiorización de percepciones y de elaboración del pensamiento.

REFERENCIAS

Ablewhite, R.C. (1971). **Las Matemáticas y los Menos Dotados.** Madrid: Ediciones Morata, S.A.

Dienes, Z.P. (1971). **La Construcción de las Matemáticas.** Madrid: Editorial Vicens– Vives.

Fasce, J. y Martiñá, R. (1982). **Como Enseñar Matemática en la Escuela Primaria.** Buenos Aires: Editorial "El Ateneo".

González, F. (1986). **La Naturaleza de la Matemática y sus Implicaciones en la Enseñanza.** Ponencia presentada en el V Encuentro Sobre Enseñanza de la Matemática, CENAMEC: Caracas, Venezuela.

Mialaret, G. (1962). La Enseñanza de la Matemática. **Educación, Revista para el Magisterio.** Etapa III, Nos. 99–100, Agosto 1962, Año XXIII, Caracas, Venezuela.

Mialaret, G. (1967). **Pedagogía de la Iniciación en el Calculo** (2da. ed.). Buenos Aires: Editorial Kapelusz, S.A.

Piaget, J. (1977). **Seis Estudios de Psicología.** (9na. ed.). Madrid: Editorial Seix Barral, S.A.

Piaget, J. (1980). Observaciones Sobre la Educación Matemática. En: J. Piaget, G. Choquet, J. Dieudonné, R. Thom y otros. **La Enseñanza de las Matemáticas Modernas** (Selección y Prólogo de Jesús Hernández). (pp. 219–227). Madrid: Alianza Editorial, S.A.

Puig Adam, P. (1967). Modelos Preparados y Modelos Realizados. En: C. Gattegno, W. Servais, E. Castelnuovo y otros. **El Material para la Enseñanza de las Matemáticas** (2da. ed.). (p.. 192–209). Madrid: Aguilar, S.A. de Ediciones.

Santaló, L. (1975). **La Educación Matemática Hoy.** Buenos Aires: Editorial Teide, S.A.

Trejo, C. y Bosch, J. (1966). **Enseñanza de la Matemática Moderna en el Primer Curso.** Buenos Aires: Eudeba.

Viviano, A. (1988). **Hacia una Participación Auténtica en los Procesos de Enseñanza–Aprendizaje: La Participación Constructiva.** Trabajo de Ascenso presentado para optar a la categoría de Titular en el Instituto Pedagógico de Maracay.

EL AUTOR

FREDY ENRIQUE GONZALEZ
Profesor de Matemática egresado del Instituto Pedagógico de Caracas (1974).
Master en Matemática (Mención Docencia), Universidad de Carabobo (1984).
Profesor de Análisis Matemático y Educación Matemática, en el Departamento de Matemática del Instituto Pedagógico de Maracay, Núcleo de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Miembro del Comité de Redacción de la Revista "Paradigma".