ERRORES DE LOS ESTUDIANTES EN EL TEMA DE DERIVADA DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

Alexia Esther Nardín Anarela
alexia.nardin@reduc.edu.cu
Marinés Montalván García
marines.montalvan@reduc.edu.cu
María Isabel Salgado Docampo
maria.salgado@reduc.edu.cu
Olga Lidia Pérez González
olguitapg@gmail.com
Universidad de Camagüey, Cuba

Recibido: 14/03/2017 **Aceptado:** 24/05/2017

Resumen

En el trabajo se realiza un estudio de campo para determinar la influencia de la utilización de situaciones didácticas matemático- comunicativas en la formación y desarrollo de la habilidad hallar derivadas parciales a partir del análisis de los errores que cometen los estudiantes en el tema de Derivada de funciones de varias variables. Estas situaciones se ejemplifican, tanto en la introducción de conceptos del tema, como en los procedimientos que se utilizan. Se identifican los obstáculos epistemológicos de este tema que provocan errores en la resolución de ejercicios por parte de los estudiantes. La metodología empleada se basa en la comparación de los resultados de dos grupos de ingeniería en la Universidad de Camagüey. Como resultado se obtuvo la verificación de que incentivar el empleo de situaciones didácticas matemático comunicativas propicia una disminución de los errores en el cálculo de derivadas parciales y se concluyó que el empleo de situaciones didáctico matemáticas comunicativas en el estudio del tema Derivada en el CD-II (Cálculo Diferencial de funciones de varias variables) tiende a facilitar el proceso de generalización que de forma natural debe producirse al transitar de funciones de una variable real a funciones de varias variables. El apoyarse en experiencias anteriores de los estudiantes en la realización de ejercicios y tareas que le permitieron consolidar la interpretación de derivada en el CD- I (Cálculo Diferencial de funciones de una variable) tiende a facilitar el proceso de generalización que es considerado un aspecto de influencia notoria, cuya significación se ve reflejada en los resultados del estudio realizado.

Palabras claves: Situaciones didácticas, obstáculos epistemológicos, errores matemáticos, cálculo de derivadas parciales

STUDENTS 'ERRORS IN THE THEME OF DERIVATIVES OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

Abstract

In the paper, a field study is carried out to determine the influence of the use of mathematical-communicative didactic situations in the formation and development of the ability to find partial derivatives from the analysis of the errors that the students make in the Derivative Functions of several variables. These situations are exemplified, both in the introduction of concepts of the subject, and in the procedures used. The epistemological obstacles of this subject are identified that cause errors in the resolution of exercises by the students. The methodology used is based on the comparison of the results of two engineering groups at the

University of Camagüey. As a result we obtained the verification that encouraging the use of communicative mathematical didactic situations leads to a reduction of errors in the calculation of partial derivatives and it was concluded that the use of communicative mathematical didactic situations in the study of the theme Derived in CD-II (Differential calculus of functions of several variables) tends to facilitate the process of generalization that should naturally occur when moving from functions of a real variable to functions of several variables. Drawing on previous experiences of students in performing exercises and tasks that allowed them to consolidate the derivative interpretation on the CD-I (Differential Calculus of a variable's functions) tends to facilitate the generalization process that is considered an aspect of Influence, whose significance is reflected in the results of the study.
Key words: Didactic situations, epistemological obstacles, mathematical errors, calculation of partial derivatives

Introducción

La sociedad cubana actual plantea un verdadero desafío a la gestión de los docentes, debido a la necesidad de lograr una buena formación matemática por la importancia que juega esta disciplina en otras ciencias y en la tecnología. Es una necesidad cambiar el paradigma educativo, teniendo en cuenta la formación integral de los alumnos. Según el lineamiento 145 del Partido Comunista de Cuba es objetivo fundamental de la máxima dirección del país, formar ciudadanos capaces de comprender y enfrentar el mundo en que viven, convirtiendo en una necesidad elevar la calidad de la Educación. En este y otros trabajos, los investigadores de la rama de la Matemática Educativa se plantean nuevos retos, entre ellos el abordaje de temas que no son rutinariamente escogidos para estudios pedagógicos, como por ejemplo el del presente estudio que se ha realizado en el Cálculo de funciones de varias variables.

El principal propósito del mismo es mostrar, con un estudio comparativo de dos grupos de estudiantes de la Universidad de Camagüey, que el empleo de situaciones didáctico matemáticas comunicativas y el apoyo en la modificación de ejercicios del libro de texto en el proceso de enseñanza aprendizaje (PEA) del tema Derivada del Cálculo Diferencial, favorecen la disminución de errores de los educandos y por lo tanto se elevan los resultados en indicadores de comprensión de este tema de las Matemáticas Superiores.

El contenido de "El Cálculo en Varias Variables" es una de las más poderosas herramientas teóricas y prácticas de la Matemática. Su aprendizaje y utilización es fundamental, puesto que gracias a ella, es posible la simulación de modelos matemáticos cada vez más reales en áreas tales como la Física, la Química, la Geometría y otras de la Ingeniería en particular y de la Ciencia en general, haciendo posible la ampliación del razonamiento lógico, visión y comprensión del mundo que nos rodea y su aplicación en el aprendizaje de otras materias específicas de las carreras de ingeniería. Es por ello que su aplicación en la resolución de problemas de la vida real relacionados con otras materias específicas de las carreras de ingeniería se vuelve el objetivo principal del proceso enseñanza- aprendizaje de la Matemática en la Educación Superior. Sin embargo, se reconoce como una problemática, los **errores** que cometen los estudiantes en la solución de ejercicios y problemas relacionados principalmente al cálculo con las derivadas parciales en funciones de varias variables.

Desarrollo

En los informes semestrales, actas de reuniones de asignatura, de disciplina y otros documentos, los profesores reflejan las dificultades que presentan los estudiantes en las clases de matemática de diferente naturaleza, denominadas por diferentes autores por el nombre de error (Thorndike, 1917; Brousseau, Davis y Werner, 1986; Godino, Batanero y Font, 2003; entre otros). La identificación y análisis de estos errores ha permitido sustituir un conocimiento viejo e institucionalizado en la sociedad por uno nuevo que se revela lleno de fuerza y vigor, con el correspondiente esfuerzo y sacrificio de quienes han tenido el valor de exponerlo y defenderlo ante cualquier diversidad.

En la actualidad, en el ámbito educativo, los errores a pesar de su antigüedad, de los resultados obtenidos y de los esquemas teóricos utilizados para interpretar esos resultados, son considerados como una línea de trabajo en la que se investigan las concepciones erróneas, el examen de sus causas y la evolución de dichos errores en la formación académica (Brousseau, 1983; Contreras, 2003).

Investigaciones realizadas en los últimos años han mostrado la importancia que tiene centrar la atención no sólo en las respuestas correctas de los estudiantes, sino también, en los errores que cometen. Las mismas comprenden diferentes puntos de vista: como la enseñanza aprendizaje, los procesos cognitivos, obstáculos epistemológicos, dificultades en el aprendizaje, entre otros. La utilidad de su estudio radica en el apoyo que puedan proporcionar al aprendizaje de las matemáticas, al mostrar donde ha fallado el proceso de aprendizaje. Es decir, se ha pasado de una concepción del error que lo consideraba como una falta y que daba lugar a una sanción, a una concepción nueva, donde el error es un testigo que permite descubrir las dificultades con las que tropieza el proceso de enseñanza aprendizaje, y que lo esencial del trabajo didáctico gira en torno a su transformación.

En investigaciones realizadas a partir de la revisión de pruebas parciales y exámenes finales, clases metodológicas del departamento se pudieron encontrar las siguientes dificultades:

- La utilización de la terminología matemática,
- La transferencias entre los diferentes registros de representación semiótica,
- Deficiencias en el manejo de algoritmos, procedimientos y conceptos matemáticos,
- Confusión entre variables y parámetros de los conceptos matemáticos,
- Describir la construcción de figuras geométricas,
- La verificación de las soluciones de un problema.
- Dificultades al generalizar conceptos y procedimientos del Cálculo Diferencial de funciones de una variable (CD-I) al Cálculo Diferencial de funciones de varias variables (CD-II).

Por lo que se plantea como problema de investigación que existen insuficiencias en los resultados de los estudiantes en el tema de derivada en las carreras de ingeniería, en el proceso enseñanza aprendizaje del Cálculo Diferencial de funciones de varias variables.

Se propone como objetivo la realización de un estudio de la influencia del empleo de las situaciones didáctico-matemático-comunicativas en la disminución de errores de los estudiantes de ingeniería de la Universidad de Camagüey en el tema de Derivada en el cálculo diferencial de funciones de varias variables.

La idea a defender por los autores es que la utilización de situaciones didáctico-matemático-comunicativas en el tema de Derivada del CD-II para ingeniería, basadas en la idea de Salazar (2014) de modificar ejercicios del libro de texto, favorece la disminución de errores de los estudiantes de la Universidad de Camagüey en esta asignatura, al menos en lo concerniente al tema de Derivada.

Los fundamentos teóricos de este trabajo desde el punto de vista filosófico están en el Materialismo Dialéctico, ya que el desarrollo requiere del uso de generalizaciones, una de las necesidades del tránsito del Cálculo de Funciones de una variable al cálculo de Funciones de Varias Variables. Desde la Psicología, esta propuesta se basa en la tendencia histórico-cultural de Vygotsky, quien plantea que en la interacción del hombre con su medio ejercen una influencia notoria el lenguaje, sus vínculos al pensamiento y la mediación de símbolos y signos, entre ellos los de la matemática. En el Enfoque Ontosemiótico (EOS), según D´Amore, Font y Godino (2007), se considera que, para describir la actividad matemática, es necesario contemplar una ontología formada por los siguientes elementos: 1) lenguaje, 2) situaciones-problema 3) conceptos, 4) procedimientos, técnicas… 5) proposiciones, propiedades, teoremas, etc. y 6) argumentos. Los autores del presente trabajo parten de la consideración de que estos seis tipos de objetos se complementan y contribuyen a la generalización de los conocimientos.

Además de estos antecedentes teóricos, se trata de seguir la idea de Salazar (2014), quien defiende proponer a los estudiantes modificar ejercicios del libro de texto. Este trabajo se realizó con el propósito de contribuir a la formación de profesores, que no es el mismo objetivo de la presente investigación, pero también para realizar generalizaciones puede ser una técnica efectiva la de cambiar enunciados de ejercicios que eran del CD-I a nuevos ejercicios del CD-II. A continuación se muestra un ejemplo de lo aquí planteado.

Modifique la siguiente pregunta para dirigirla al cálculo de funciones de varias variables.

Ejercicio 13, página 154 de J. Stewart (Cálculo con trascendentes tempranas)

a) Encuentre la pendiente de la tangente a la curva $y= x^3-4x+1$, en el punto donde $x=a$.

b) Halle las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos (1;-2) y (2;1).

c) Grafique la curva y las dos tangentes en una pantalla común con un asistente matemático de computación.

Los obstáculos son conocimientos que han sido, en general, satisfactorios durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fijan en la mente de los estudiantes, como ideas útiles, posteriormente, cuando el estudiante se enfrenta a problemas nuevos, este conocimiento resulta inadecuado y de difícil adaptación a los nuevos contextos. Diversos investigadores han abordado esta temática. Bachelard (1988), seleccionado por Lecourt (1989), introdujo el concepto de **obstáculo epistemológico** para explicar la aparición de los errores en la conformación del conocimiento. Señala que los entorpecimientos y confusiones que causan estancamientos y retrocesos en el proceso del conocimiento, provienen de una tendencia a la inercia, a la que da el nombre de obstáculo: se conoce en contra de un conocimiento anterior insuficiente o adquirido deficientemente que ofrece resistencia, la mayoría de las veces porque se ha fijado en razón de haber sido eficaz hasta el momento: cuando se lo pretende utilizar en un contexto o una situación inadecuados, se produce el error.

Brousseau (1983), considera que los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden tener diferentes orígenes: epistemológico, didáctico y ontogénico. El obstáculo de origen epistemológico está intrínsecamente relacionado con el propio concepto. Los obstáculos de origen ontogénico son debidos a las características del desarrollo del estudiante. Los obstáculos de origen didáctico son resultado de una opción o de un proyecto del sistema educativo, es decir, de las elecciones didácticas que se hacen al establecer una situación de enseñanza.

Obstáculos didácticos:

- La enseñanza simplista de los conceptos provoca su validez solo en determinados contextos. Ante un nuevo objeto de estudio toda la experiencia previa del sujeto conforma un conjunto de preconceptos a través de las cuales el sujeto tratará de comprender el nuevo objeto. Por supuesto que de estos preconceptos unos serán positivos y otros negativos.
- Métodos de trabajo incorrectos, que crean ciertos hábitos que terminan por restringir la flexibilidad del pensamiento de los estudiantes.
- El tratamiento restringido del objeto de estudio, aunque el contenido correspondiente haya sido correctamente tratado.
- Los nexos símbolo-objeto restringidos también determinan la formación de pseudoconceptos.

Obstáculos epistemológicos:

- Los conceptos que posee el estudiante de diferentes objetos y fenómenos a través de los cuales estudiará el nuevo objeto o fenómeno, que en muchos casos se opone a la adquisición del nuevo conocimiento y resultan más difíciles de combatir ya que el concepto que las origina es correcto y no puede ser eliminado de la experiencia del estudiante. Por ejemplo en el caso del Álgebra clásica el producto es distributivo respecto a la suma, por lo cual cuando estudian la potencia están en la mente del estudiante distribuir la potencia respecto a la suma de la misma forma que actúan con el producto.

- La generalización teórica es obstaculizada por la generalización empírica, pues los estudiantes tienden a generalizar basándose en los aspectos comunes y aparentes de los objetos (generalización empírica) y no en los aspectos esenciales (generalización teórica), y sólo con un entrenamiento adecuado el estudiante puede lograr hacer generalizaciones teóricas.

Miyar, Legañoa & Blanco (2010) realizaron un estudio como resultado del cual considera que para lograr la formación conceptual y el desarrollo de la generalización teórica del estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra, se hace necesario desarrollar la actividad del estudiante en interacción social mediada por instrumentos semióticos orientada a la consolidación del nexo símbolo-objeto a través de la materialización y recodificación semiótica. Además, dado el carácter histórico del aprendizaje del estudiante, se hace necesario tener en cuenta los preconceptos con los que arriba a la universidad y en qué forma estos preconceptos evolucionan en conceptos científicos.

Los autores del presente reporte de investigación también asocian a la comprensión del CD-II ambas conclusiones: es necesario desarrollar la actividad del estudiante en interacción social mediada por instrumentos semióticos orientada a la consolidación del nexo símbolo-objeto a través de la materialización y recodificación semiótica y asimismo, dado el carácter histórico del aprendizaje del estudiante se hace necesario tener en cuenta los preconceptos con los que arriba a la universidad y en qué forma estos preconceptos evolucionan en conceptos científicos.

Los obstáculos epistemológicos que los autores han identificado en el Proceso Enseñanza Aprendizaje del tema de Derivada de funciones de varias variables son:

1) En el CD-I la letra x siempre hace referencia a una variable, en el CD-II puede pasar que al derivar $z=f(x,y)$ respecto a y, por ejemplo, hay que considerar x constante.
2) En el CD- I la interpretación de derivada de una función de una variable real en un punto es la pendiente de la recta tangente a una curva en el plano $y=f(x)$. Ahora en

el estudio del CD-II se trata de derivada parcial respecto a x en el punto (x_0,y_0), que es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie z=f(x,y) con el plano $y=y_0$ en ese punto. (Ahora es una recta en el espacio).

3) En el CD-I el resultado de hallar la derivada de una función en un punto es un número que se obtiene o por un proceso de paso al límite o por evaluar la función derivada y no requiere de trabajo con vectores. En el CD- II puede necesitarse producto de vectores para el cálculo de una derivada dirigida.
4) Las interpretaciones físicas para velocidad de un móvil que sigue una trayectoria rectilínea no se calcula de igual forma que si la trayectoria es una curva alabeada en el espacio.

Para facilitar el empleo de los símbolos matemáticos en el nuevo contexto de derivada de funciones de varias variables y la transformación de los preconceptos de los estudiantes luego del estudio del Cálculo de funciones de una variable real, se ha escogido el uso de situaciones didácticas matemático comunicativas.

El **modelo de situación** (Van Dijk, 1983), resulta de singular interés para la docencia, ya que desde éste se fundamenta la creación de situaciones comunicativas mediante las cuales se plantea a los alumnos una determinada tarea comunicativa que ellos deben solucionar, priorizando el empleo de estrategias para entender y construir textos en diferentes estilos. En el caso concreto de la Didáctica de la Matemática, se ha desarrollado la **Teoría de las Situaciones** de Brousseau (1997), la cual se ocupa de los procesos para desarrollar y observar los comportamientos matemáticos en el alumno y diseño de actividades que permitan el desarrollo de las fases de acción, formulación y validación.

Según Mola (2013) las situaciones didácticas matemático-comunicativas constituyen la célula del PDE del Algebra Lineal a través de la cual se va generando la dinámica del proceso de aprendizaje de esta asignatura. A partir de estas, la comprensión del objeto algebraico se desarrolla desde la interpretación particular y contextual que los estudiantes hacen de la situación a partir de sus creencias, intuiciones, experiencias, vivencias, saberes, en una estrecha relación con el grupo que posibilita sucesivas reinterpretaciones de la relación con el objeto algebraico.

Esta autora propone utilizar el error en función del aprendizaje del estudiante de varias formas:

- Elaborar situaciones didácticas que incorporen varias formas de dar un concepto, faltándole o sobrando elementos para llevar a la reflexión al alumno.
- Elaborar situaciones didácticas que permitan el tránsito entre diferentes registros de representaciones semióticas del concepto.
- Utilizar el error como plataforma para explorar los conocimientos matemáticos.

La esencia de su propuesta puede ser dirigida no solo al estudio del Algebra Lineal, sino también al PEA de CD-I y del CD- II.

Situaciones didácticas matemático- comunicativas en la enseñanza del tema Derivada en el CD- II.

I. Situaciones para enfocar el tema desde el punto de vista numérico.

4. La altura h de una ola en el mar abierto depende de la rapidez del viento y de la cantidad de tiempo t que el viento ha estado soplando a esa velocidad. En la tabla siguiente se registran valores de la función $h = f(v, t)$ en pies.

Duración (horas)

Velocidad del viento (nudos) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

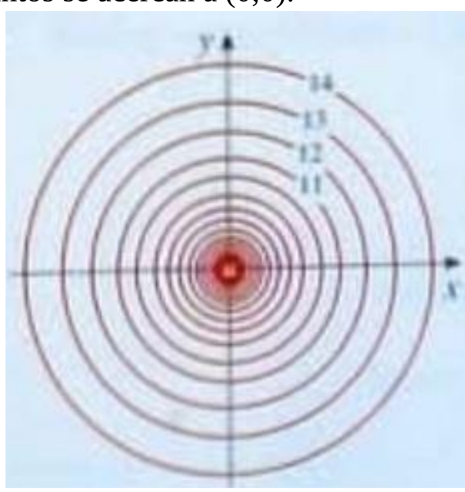
(a) ¿Cuáles son los significados de las derivadas parciales $\partial h/\partial v$ y $\partial h/\partial t$?
(b) Estime los valores de $f_v(40, 15)$ y $f_t(40, 15)$. ¿Cuáles son las interpretaciones prácticas de estos valores?
(c) ¿Cuál parece ser el valor del límite siguiente?

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\partial h}{\partial t}$$

II. Situaciones que contribuyen a la formación de conceptos y su interpretación geométrica.

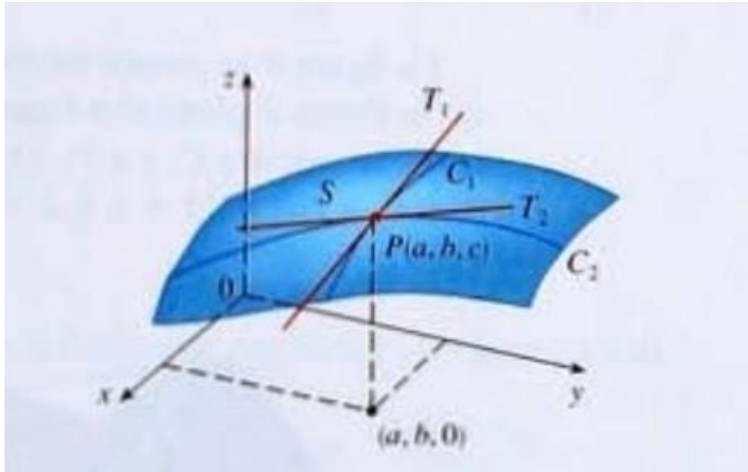
Marca con una cruz la respuesta correcta.

1. Para la superficie z=f(x,y) que se representa, las curvas de nivel están más separadas a medida que los puntos se alejan del origen y menos separadas cuando los puntos se acercan a (0,0).



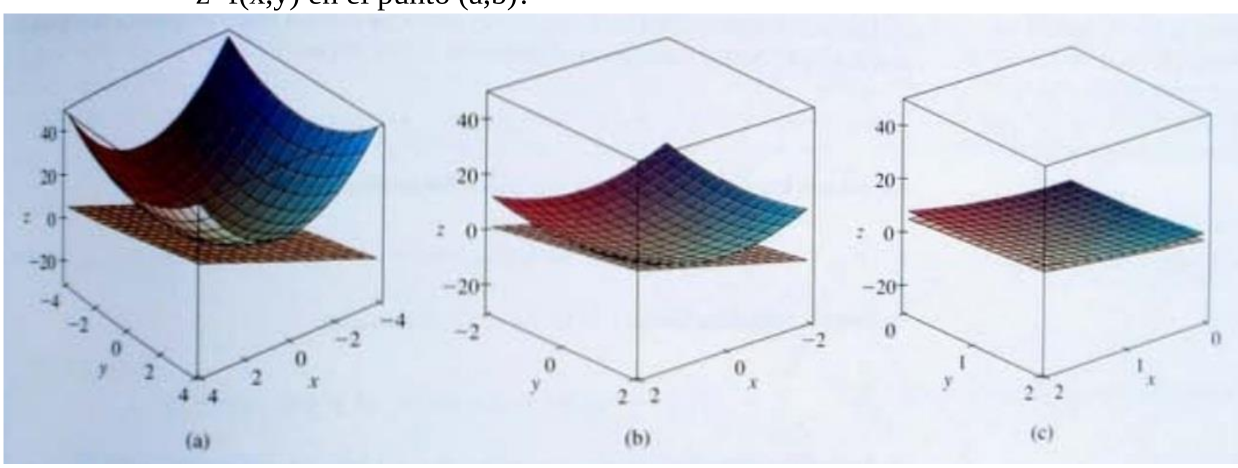
   a) ____ La función varía más rápidamente al alejarse el punto del origen.
   b) ____ La función varía más rápidamente al acercarse el punto del origen.
   c) ____ La función es constante en toda la región representada.

2. ¿Cuál de las siguientes curvas corresponde a la de recta tangente con pendiente igual a $f'_x(a,b)$?



a) ____ $\begin{Bmatrix} z = f(x,y) \\ y = b \end{Bmatrix}$
b) ____ $\begin{Bmatrix} x = a \\ y = b \end{Bmatrix}$
c) ____ $\begin{Bmatrix} z = f(x,y) \\ x = a \end{Bmatrix}$

3. ¿Cuál de los siguientes gráficos escogerías para ilustrar la linealizacion de z=f(x,y) en el punto (a,b)?



a) ____ Cualquier punto del plano.
b) ____ Puntos alejados de (a,b).
c) ____ Puntos cercanos a (a,b).

4. La función $z = \frac{(x^2+1)y}{x}$ es diferenciable.
   a) ____ En cualquier punto del plano.
   b) ____ En cualquier punto de ordenada cero.
   c) ____ En cualquier punto de abscisa cero.

III. Situaciones para la formación de procedimientos de cálculo:

Siendo $f(x,y)=x^2y^3+3xy^2$

1. Contesta verdadero (V) o falso (F). Justifica las proposiciones falsas.

   a)___ La derivada f'_x en el punto (a,b) es
   $$\lim_{h \to 0} \frac{a^2(b+h)^3+3a(y+b)^2-a^2b^3-3a(b)^2}{h}$$

   b) ____ La derivada de f respecto a y es $f'y=2xy^3+3y^2$.

   c) ____ f satisfface la ecuación $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}-2xy^3-3x^2y^2=3y^2+6xy$

2. Marca con una cruz la respuesta correcta:

   f''_{xx} es igual a:

   a) ___ $2xy^3+3y^2$ b) ____ $6xy^2+6y$ c) ____ $2y^3$

3. La recta tangente a la curva c: $\begin{Bmatrix} z = f(x,y) \\ y = 2 \end{Bmatrix}$, en el punto (1;2) tiene pendiente:

   a) ____ 16 b) ____ 24 c) ___ 28 d) ____ cero

IV. Situaciones para la contextualización de las derivadas de funciones de varias variables.

1. Contesta verdadero (V) o falso (F). Justifica las proposiciones falsas.

   a) ____ Si **v** es un vector de norma 1 y sus componentes son los incrementos $\langle \Delta x, \Delta y \rangle$; entonces el diferencial de f en el punto (a,b) con estos incrementos coincide con la derivada direccional de f en (a,b) según la dirección **v**.

   b) ____ Si $T=\frac{10x}{x^2+y^2+1}$ es la dependencia que tiene la temperatura en una placa metálica de las coordenadas del punto (x,y); la máxima razón de cambio de T se verifica en dirección de *Escriba aquí la ecuación.*$\langle \frac{\partial T}{\partial x}, 0 \rangle$

   c) ____ Si en la construcción de una caja abierta en forma de prisma rectangular las paredes tienen un grosor de 0,01 cm y el fondo de 0,02 cm; el estimado de variación de su volumen interior y exterior es de 0,8 cm^3 en caso que las medidas interiores sean ancho de 2cmm, largo de 3 cm y altura de 1cm.

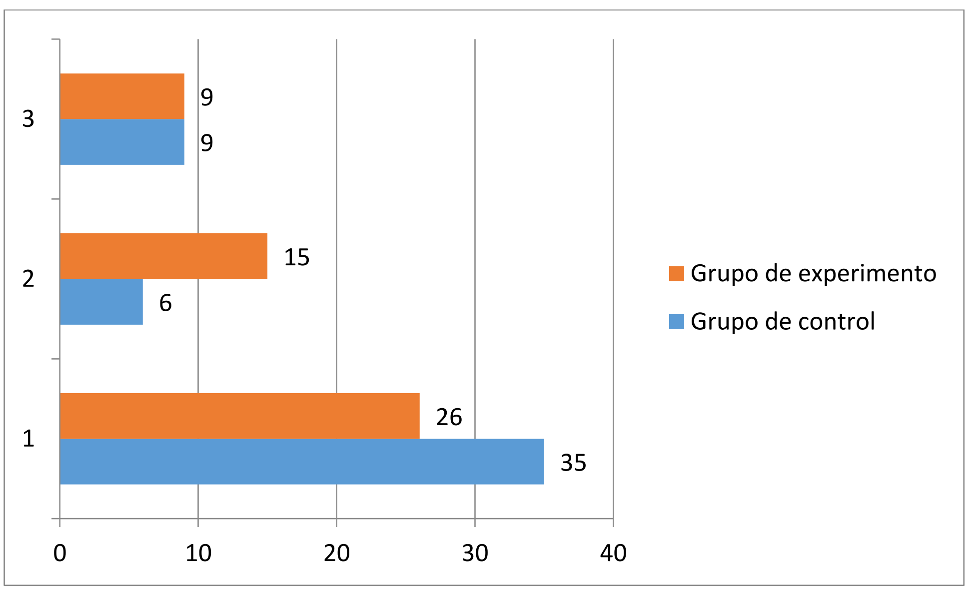
   d) ____ La ecuación del plano tangente a $z=x^2+3y^2$ en el punto (2,1) es z=-7+4x+6y; por lo que f(2,01;1,02) es aproximadamente 7,16.

Diagnóstico

Para hacer una valoración inicial de la muestra que evidencie su homogeneidad se tomaron los datos de la primera prueba parcial de CD-II en dos grupos de ingeniería: el grupo de control fue el de segundo año de Ingeniería Química y el de experimento el de Ingeniería Mecánica, en el curso 2015- 2016 en la Universidad de Camagüey. De cada uno se seleccionaron 50 estudiantes, dejando todos los de Química y desechando un grupo de estudiantes de Mecánica par equiparar la cantidad de alumnos y a la vez elegir con la intención de igualar la cantidad de aprobados en el CD-I.

Resultaron seleccionados en el grupo de control 35 estudiantes con 4 y 5, 6 aprobados con 3 y 9 desaprobados y en el grupo de experimento 26 con 4 y 5, 15 aprobados con 3 y 9 desaprobados. De esta manera, como se puede observar en el Gráfico 1, se obtuvo una diferencia en 1 y 2 (estudiantes con 4 y 5 es 1 y estudiantes con 3 es 2) de 9 estudiantes. El por ciento de calidad del grupo de control fue de 70% y en el de experimento de 52%.

Gráfico 1.



Por lo que se procedió a hallar la varianza en cada uno de los grupos, siendo la del grupo de control de 1.31632653 y la del grupo de experimento de 1.0922449. Esta pequeña diferencia entre las dos de 0.224, nos confirma la posibilidad de prolongar la investigación con los grupos seleccionados.

La influencia del profesor fue balanceada por tener el de control una profesora con 30 años de experiencia y el de experimento dos profesores, uno de ellos de 45 años de experiencia y la investigadora autora de la presente memoria, de 3 años de experiencia, obteniéndose un promedio de 24 años de experiencia.

Otros parámetros que pudieran influenciar los resultados, tales como el planeamiento, el uso de las TIC, la atención diferenciada a los estudiantes, los sistemas evaluación, así como las relaciones interdisciplinarias con otras asignaturas de la carrera; fueron controlados a través del trabajo científico metodológico del departamento y el intercambio permanente entre los investigadores implicados, es decir la autora de la memoria escrita y su principal tutora, quien impartió clases en el grupo de control colegian sus acciones para la aplicación de estrategias didácticas, recursos, formas de enseñanza y evaluación.

Metodología

Se seleccionaron estudiantes para dos grupos, uno de control y uno de experimento, en el cual se le da más lugar a las situaciones didáctico- matemático- comunicativas de forma similar a lo propuesto por Mola (2015) y con las ideas de Salazar (2014), quien concede gran importancia a la formulación de nuevos problemas por parte de los propios estudiantes modificando los que aparecen en el libro de texto. Esta investigadora tiene como propósito formar docentes, mientras la autora de la presente memoria escrita tiene como meta lograr que los estudiantes realicen generalizaciones que les permitan transitar del CD-I a CD-II. Para lograr una diferencia entre los grupos investigados la autora planificó un taller en el grupo de experimento, la guía del cual se adjunta en el anexo 3.

Se realizó el diagnóstico con la primera prueba parcial y el análisis de los resultados académicos en la asignatura CD-II de cursos precedentes según informes semestrales del departamento de Matemática. (Anexo 1).

Se desarrolló el taller del tema Derivada y Diferencial en el grupo de experimento, en el cual, a diferencia del grupo de control, se propicia la formulación de problemas por parte de los propios estudiantes, se acude al libro de texto para que transformen un ejercicio de la interpretación geométrica de la derivada de funciones de una variable real en un problema de la interpretación geométrica de las derivadas parciales de funciones de varias variables, donde la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z=f(x,y)$ en el punto $(x0,y0)$ con el plano $y=y0$ representa la derivada parcial $f'x(x0,y0)$. Numerosos autores han constatado que la forma tradicional de abordar la enseñanza de la geometría y su papel en el estudio de otras ramas de la Matemática impide hacer generalizaciones a los estudiantes. Por ejemplo en el trabajo de Sánchez (2012) quedó en evidencia que la enseñanza de la Geometría sigue abordándose en forma inadecuada, en cuanto a la pertinencia de los contenidos geométricos considerados y la idoneidad de las estrategias didácticas puestas en práctica; por lo cual, sigue siendo necesario impulsar cambios en el modelo de enseñanza predominante. Esto último pareciera justificar la necesidad de diseñar propuestas didácticas orientadas a los docentes en servicio en el área de Geometría y su Didáctica.

Los autores de esta investigación consideran que en el estudio del Cálculo diferencial de Funciones de Varias Variables es importante insertar los momentos que propicien la interpretación geométrica de los conceptos que se utilizan con una perspectiva de aplicarlos en diversas situaciones.

Por último se realiza una comparación de los resultados de los grupos observados en el examen final, usando los siguientes indicadores, a los cuales se les asigna los valores 1 (bueno), 2 (regular) y 3 (malo):

1) Hallar derivadas parciales de una función de dos variables independientes.

2) Calcular la derivada dirigida de una función según un vector dado, en un punto dado.

3) Calcular derivada de funciones paramétricas.

Resultando, que el desempeño en el **grupo de control** fue:

Indicador	B	R	M
Hallar derivadas parciales	22	10	18
Calcular derivad dirigida	15	17	18
Calcular derivada de funciones paramétricas	7	20	23

En el **grupo de experimento**:

Indicador	B	R	M
Hallar derivadas parciales	23	19	8
Calcular derivad dirigida	14	18	18
Calcular derivada de funciones paramétricas	9	20	21

De la cantidad de estudiantes clasificados como mal o regular en cada indicador se infiere el número de errores duplicando el número de estudiantes clasificados en mal desempeño sumado al número de estudiantes clasificados de regular, los cuales se tabulan como sigue:

Indicador	**Errores en el grupo de control**	**Errores en el grupo de experimento**
Hallar derivadas parciales	46	35
Calcular derivada dirigida	53	54
Calcular derivada de funciones paramétricas	66	62

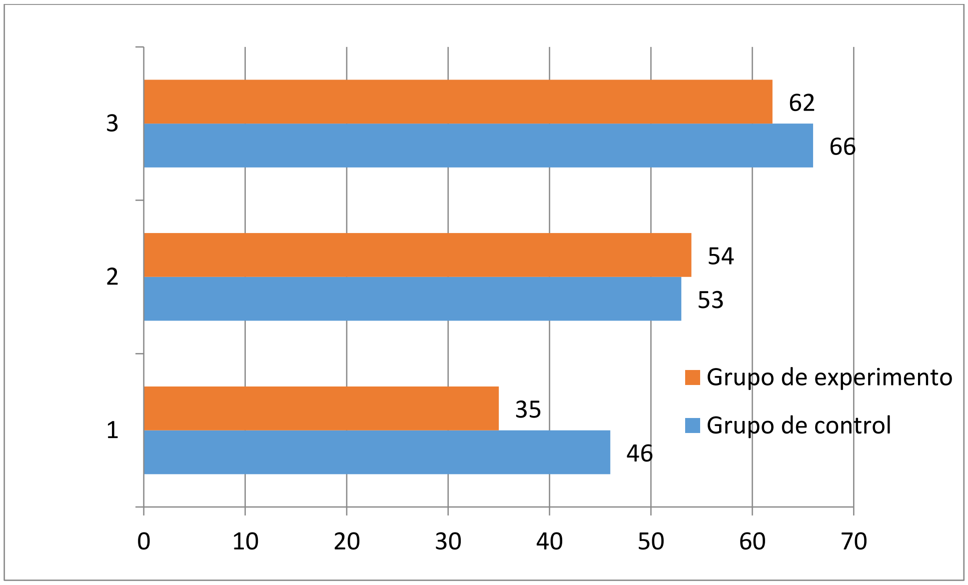
Este resultado se describe en el siguiente gráfico de barras, donde se aprecia que en ambos grupos hay mayores dificultades en la búsqueda de derivadas de funciones paramétricas y menor número de errores al hallar derivadas parciales, quedando en la media el cálculo de derivada dirigida. Comparando los grupos, han disminuido los errores, fundamentalmente en la búsqueda de derivadas parciales, que es el indicador más relacionado al concepto y la interpretación geométrica. Un solo indicador y no de forma significativa, arrojó mayor cantidad de errores en el grupo de experimento, que fue en el cálculo de la derivada dirigida, relacionados con la operatoria entre vectores, la búsqueda de la norma de un vector, confundir vector con escalar y otros no directamente vinculados al concepto de derivadas parciales o su contextualización.

Por una simple inspección puede concluirse que en su mayoría, los indicadores señalan una mejor comprensión del tema de Derivadas parciales en el grupo de experimento, que fue precisamente el grupo donde se hizo un taller para propiciar el tránsito del CD-I al CD-II apoyado en situaciones didácticas matemáticas comunicativas tanto en el enfoque numérico del concepto de derivada, como en su interpretación geométrica, su contextualización con ayuda del concepto de diferencial, su aplicación en la Física y en otros problemas de especialidades de Ciencias Técnicas.

Al grupo de experimento le fue planteado incluso tal tipo de tareas, que no fue elevado el número de estudiantes en cumplir con todas, pero la honestidad del educando en el contrato didáctico es también de suma importancia, por lo que puede suceder normalmente que las exigencias del profesor sobrepasen las posibilidades de los alumnos.

Comparando los grupos de control y experimento, se obtuvo el resultado que a continuación se expone en el Gráfico 2.

Gráfico 2. Cantidad de errores:



Conclusiones

El estudio de los errores que cometen los estudiantes ha sido ampliamente estudiado en la Aritmética y el Álgebra y podemos considerar este trabajo uno de los primeros intentos por analizar la trascendencia de los errores y obstáculos epistemológicos en al menos un tema del Cálculo diferencial de funciones de varias variables.

En el presente informe se han determinado los obstáculos epistemológicos que se refieren en específico al tema de Derivada de funciones de varias variables.

El uso de situaciones didáctico matemáticas comunicativas en el estudio del tema Derivada en el CD-II permite facilitar el proceso de generalización que de forma natural debe producirse al transitar de funciones de una variable real a funciones de varias variables. El apoyarse en experiencias anteriores de los estudiantes en la realización de ejercicios y tareas que le permitieron consolidar la interpretación de derivada en el CD-I es considerado un aspecto de influencia notoria, cuya significación se ve reflejada en los resultados del estudio realizado. La forma en que se ha instrumentado el aprovechamiento de saberes del CD-I para adquirir y desarrollar los del CD-II fue a través de modificaciones de ejercicios del libro de texto que están propuestos para la interpretación o el uso de derivada de funciones de una variable en nuevas formulaciones que conduzcan al propio estudiante a analizar la interpretación de derivadas parciales y su aplicación en diferentes contextos.

Referencias

Bachelard, G. (1988). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. México: Siglo XXI.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistemologiques et les problémes en mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1997). *Teoría de las Situaciones didácticas. Didáctica de las matemáticas 1970 – 1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G.; Davis R.B.y Werner T. (1986). Observing students at work. In Christiansen B., Howson A.G., Otte M. (eds.). *Perspective on Mathematics Education*, 205-240. Doirdrecht: Reidel Publisher.

Contreras, A. (2003). Una perspectiva de la enseñanza-aprendizaje de la continuidad y la derivada de una función en Bachillerato y Universidad. *Revista de Educación. Nº 331*, (Ejemplar dedicado a: La formación del profesorado universitario), págs. 399-419; ISSN 0034-8082,

D´Amore, B., Font, V. y Godino, J. (2007, Diciembre). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, *XXVIII*(2); 49-77. Recuperado de: http://revistas.upel.edu.ve/index.php/paradigma/article/view/1763/754

Godino, J. D. y Batanero, C**.** (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématique*, 14 (3); 325-355. Recuperado de: www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. 127-138. Recuperado de: www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Lecourt, D. (1989): *Epistemología*. Buenos Aires: Anagrama.

Miyar, I.; Legañoa, Mª de los A., Blanco, R.. (2010). Perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios con el empleo de los asistentes matemáticos. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1207-1215). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C..

Mola, C (2013). *Estrategia didáctica para la comprensión de los objetos del álgebra lineal en las carreras de ingeniería de la Universidad de Camagüey*. Tesis de doctorado no publicada.

Salazar L. (2014, Junio). Diseño de tareas a partir de la modificación de problemas planteados en libros de texto de matemática *Paradigma*, *XXXV*(1); 55 – 77. Recuperado de: http://revistas.upel.edu.ve/index.php/paradigma/article/view/1555/645

Sánchez J & Iglesias, M. (2012, junio). El desempeño de los docentes de Matemática y sus necesidades formativas. *Paradigma, Vol. XXXIII, N° 1*, 155 – 173. Recuperado de: http://revistas.upel.edu.ve/index.php/paradigma/article/view/1223/454

Stewart, James. (2006). *Cálculo con Trascendentes Tempranas. Partes 1 y 2*. La Habana: Félix Varela.

Thorndike, E.L. (1917). *The Thorndike Arithmetics Books (1-3).*Chicago: Rand-McNally

Van Dijk, Teun (1983). *La ciencia del texto.* Barcelona. Editorial Paidós.

Autoras:

Marinés Montalván García, Ing.
Profesora joven de Matemática
Línea de Investigación:
Perfeccionamiento de la Enseñanza de la Matemática
marines.montalvan@reduc.edu.cu

Alexia Nardín Anarela, M.Sc.
Grupo de Investigación de Matemática Educativa de la Universidad de Camagüey (GIMEUC)
Presidenta de la Cátedra Honorífica ¨Dra. C. Milagros de la Caridad Gutiérrez Álvarez¨
alexia.nardin@reduc.edu.cu

Olga Lidia Pérez González, Dra.
Presidenta del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME)
Grupo de Investigación de Matemática Educativa de la Universidad de Camagüey (GIMEUC)
olga.perez@reduc.edu.cu

María Isabel Salgado Docampo, M.Sc.
Línea de Investigación:
Perfeccionamiento de la Enseñanza de la Matemática
Colaboradora de la Vicerrectoría Docente en la Universidad de Camagüey
maria.salgado@reduc.edu.cu