# PRODUCCIÓN DE CONOCIMIENTOS DESDE INSTITUCIONES NO MATEMÁTICAS

***Alberto Camacho***
camachoalberto@hotmail.com
Instituto Tecnológico de Chihuahua II, TecNM, México,

***Avenilde Romo–Vázquez***
avenilderv@yahoo.com.mx
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN; México

**Recibido:** 2/08/2017 **Aceptado:** 05/10/2017

## Resumen

En esta comunicación nos proponemos mostrar la deconstrucción del concepto gradiente en un contexto no matemático, la topografía. Del proceso de deconstrucción en ese contexto resultan numerosas técnicas que ayudan a establecer su definición. La definición que se deriva hace intervenir elementos que pertenecen a la topografía, a las matemáticas y a las matemáticas académicas. El empirismo que aparece en la deconstrucción conduce a utilizar como marco teórico el modelo extendido de Castela y Romo-Vázquez (2011). Considerando que con la demostración asociada a ese concepto, es posible concebir organizaciones didácticas, útiles en los cursos de matemáticas.
**Palabras clave**: deconstrucción, *construcción, definición, topografía, gradiente.*

# PRODUCTION OF KNOWLEDGE FROM NON-MATHEMATICAL INSTITUTIONS

## Abstract

In this paper, deconstruction of the concept of gradient is examined in a non-mathematical context, topography. Many techniques and practices that help establish a definition of gradient are a result of such a deconstruction. The definition is developed using some elements of topography as well as mathematics and academic mathematics. The empiricism revealed in the deconstruction leads to the use of the praxeological extended model of Castela and Romo-Vázquez (2011) as a theoretical framework. It is possible to conceive didactical organizations related to this concept by considering the proof associated with it.
**Keywords**: *deconstruction, reconstruction, demonstration, topography, gradient.*

## Introducción

El modelo praxeológico extendido de Castela y Romo-Vázquez (2011) es por hoy poco conocido y utilizado en la investigación de la modelización de los fenómenos didácticos en los países latinoamericanos. Como tal, parte de incorporar a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) una componente conocida como Tecnología Práctica, simbolizada como $\theta^{P}$, Figura 1, que permite sumar a la modelización *técnicas prácticas*, ausentes en las Tecnologías Teóricas $\theta^{th}$ (teoremas, definiciones, etc.) de las que se desprenden las técnicas matemáticas que ayudan en la resolución de tareas adheridas al discurso matemático de la clase. Las técnicas prácticas suelen ser proposiciones empíricas que se corresponden con la fenomenología física, o bien con disciplinas ajenas a la matemática, que no se justifican con los elementos tecnológicos supuestos en el modelo de organización matemática (OM), reconocido en la TAD como praxeologías canónicas (Chevallard, 2007) que no incorporan en su definición estructural al empirismo.

Así por ejemplo, en la definición que se da en el aula, y principalmente en los libros de texto, de la ecuación diferencial de difusión de calor, destaca la transposición de técnicas empíricas que se desprenden de la Hidráulica, es el caso del concepto de *gasto* definido en esa disciplina a partir de un elemento de masa *m* sobre la cual la cantidad de calor $Q$ que se genera es: $Q = \gamma m u$, donde $u$ representa la temperatura del elemento, que lleva a la definición de la ecuación de calor (Camacho y Sánchez, 2015). Bajo esas condiciones, se parte del supuesto que el calor fluye sobre una sección circular de manera semejante a como fluye el agua atravesando las secciones rectangulares en los canales. A través de conjeturas que se concretan en lo infinitesimal, se llega a la conocida ecuación diferencial: $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, en la que $k$ se finca como una constante de difusividad térmica, que involucra otras constantes también empíricas. Observe que en ese discurso no se pueden justificar los elementos tecnológicos supuestos, a través del modelo de praxeologías canónicas que se destacan en la TAD. Note además que en el ejemplo, desde la Hidráulica se ventilan procesos de transposición de *técnicas prácticas,* que se desprenden de praxeologías no canónicas, que hacen útiles los conocimientos de esa disciplina y que llevan a la producción y justificación de la definición de la ecuación diferencial.

Es así que la introducción de conceptos externos a la práctica matemática, involucra otro tipo de técnicas intermediarias, que se unen con las *técnicas matemáticas* que se despliegan de los teoremas y definiciones, cuya asociación sirve de puente para la resolución de tareas y definición de conceptos de la matemática escolar.

Es así que dentro de los objetivos del escrito se encuentra el proporcionar una deconstrucción del concepto *gradiente* situada fuera de toda praxeología matemática, tanto disciplinar como escolar, en este caso ubicada en una disciplina no matemática como es la topografía, considerada aquí como Institución. La deconstrucción es vista como el proceso inverso de la construcción, es decir, se parte de investigar un concepto y se busca encontrar todos los elementos que le integran. En este trabajo, la deconstrucción de los conceptos matemáticos forma parte de un análisis de los usos del concepto gradiente en las ciencias no matemáticas. Como se verá, su análisis lleva a identificar los significados asociados con los usos y otros elementos que intervienen en el proceso de construcción del concepto.

Para su desarrollo, la investigación se sitúa al centro de la TAD. Con el objeto de regular y controlar los fenómenos didácticos, esta teoría se interesa por la modelización del saber y de las actividades escolares que se le asocian. Es así que se utilizan las nociones de Institución y Praxeología. La noción de Institución es considerada en el sentido de Chevallard (1991), o sea "*como un grupo de personas a los ojos de los cuales al menos un objeto existe"* —citado en Gantois (2012, p. 48)— por ejemplo la escuela, la obra matemática de diferentes épocas, los manuales escolares, etc. Aunque también se asume el punto de vista de Castela y Romo Vázquez (2011, p. 7):

> Les *institutions,* c'est-à-dire des organisations sociales stables, encadrent les activités humaines et simultanément les tendent possibles par les ressources que ces institutions mettent a disposition de leurs sujets. Ces ressources matérielles et intellectuelles ont été produites par des communautés, tout au long des processus d'affrontement à des situations problématiques qu'il s'agit de surmonter avec régularité et efficacité. (p. 85)

En este marco, las organizaciones matemáticas (OM) se reconocen como praxeologías canónicas, que se conciben como la Institución de producción de saberes matemáticos, que son validados según las normas de demostración matemática. Las praxeologías canónicas se contemplan en la conocida unidad básica de análisis $[T, \tau, \theta, \Theta]$ citada en Chevallard (1991), la cual muestra que $T$ es una tarea por resolver en un ambiente escolar, $\tau$ es una técnica, conjunto de procedimientos con los que es posible abordar la tarea $T$, $\theta$ la tecnología de la que se desprende la técnica (teoremas, axiomas, definiciones) y $\Theta$ es un discurso teórico que, en su contexto, produce, explica y valida la tecnología.

Se parte del supuesto de que las praxeologías canónicas (OM) de las instituciones de enseñanza de las matemáticas, son utilizadas para describir prácticas matemáticas habituales, sin tomar en cuenta los conocimientos, técnicas y prácticas aisladas de las ciencias no matemáticas. Ello hace que los conocimientos emergentes de las ciencias no matemáticas, como la topografía, sean reducidos a un estilo de etno-matemática.

El uso de recursos de la física y otras disciplinas en la enseñanza de la matemática, ha servido para *motivar* los tópicos y objetos matemáticos de modo que a través de ellos se puedan interpretar algunos resultados de los problemas *prácticos* que con esos recursos y otros conceptos se puedan resolver y cuya resolución se exige en los planes y programas de estudio, principalmente en aquellos de las carreras de ingeniería. (Camacho y Sánchez, 2015, p. 2).

La noción de *práctica* que aquí se adopta, se asume a la capacidad de los seres humanos para transformar los saberes matemáticos y adecuarlos a las circunstancias de los problemas que atienden, es el caso de la actividad de los ingenieros y los topógrafos.

El objetivo es producir una definición del concepto gradiente que, como se sabe, asocia un campo vectorial a un campo escalar, lo cual es fundamental tanto en la investigación en la física matemática como en las matemáticas escolares, particularmente en la enseñanza del cálculo vectorial (enseñanza que se centra en la parte operatoria del análisis vectorial).

La praxeología del gradiente puede ser vista como una co-determinación entre praxeologías canónicas y praxeologías topográficas. Para precisar en los elementos tecnológicos que las integran, se utilizará el *modelo praxeológico extendido* de Castela y Romo-Vázquez (2011), es decir, un modelo de praxeología no-canónica en proceso de construcción, que incorpora tanto las tecnologías teóricas $\theta^{th}$ como tecnologías prácticas $\theta^{p}$, esquematizado como sigue:

$$\left[\begin{array}{cccc} T, & \tau, & \theta^{th} & \Theta \\ & & \theta^{p} & \end{array}\right]\begin{array}{l}\leftarrow P(M)\\ \leftarrow I_u\end{array}$$

***Figura 1***. *Modelo praxeológico extendido propuesto por Castela y Romo-Vázquez (2011), en el que se incluye a la unidad básica de análisis* [$T$, $\tau$, $\theta$, $\Theta$] *una tecnología práctica* $\theta^{p}$.

En la Figura 1, $I_u$ representa la institución usuaria de la matemática, en este caso la topografía, productora de tecnologías prácticas $\theta^{p}$. $P(M)$ representa la disciplina matemática, constituida por la comunidad de investigadores que producen praxeologías matemáticas. Mientras que los tipos de tareas $T$ y las técnicas $\tau$ se corresponden con las involucradas en la ya comentada unidad básica de análisis [$T$, $\tau$, $\theta$, $\Theta$].

Todo esto que precede permite formular algunas cuestiones: ¿Cómo los saberes matemáticos se transforman para devenir conocimientos prácticos, útiles? ¿Su utilidad permite organizarlos a través de ciertos niveles (puntual, local, etc.) al seno de las prácticas? Y en sentido inverso ¿Un conocimiento o praxeología práctica, útil, puede devenir objeto o praxeología matemática? ¿Cómo los conocimientos prácticos ayudan a concebir organizaciones didácticas para la enseñanza de la matemática? Para intentar contestar estas últimas se describirá la decontrucción del objeto gradiente desde una *media* de difusión de conocimientos de la topografía, en este caso el Manual de Topografía de Díaz Covarrubias (1890). En el manual se determina un *saber-hacer* para la localización de la *Línea de Mayor Pendiente* (LMP), en el cual centramos la atención.

## El Saber entre dos Instituciones Extremas. Matemáticas Académicas E(M) y Topografía P(T)

*Praxeología dominante del concepto gradiente*

En la enseñanza del cálculo vectorial para futuros ingenieros mexicanos, la definición del gradiente se establece de la siguiente manera:

Se consideran las derivadas de un campo escalar, por ejemplo la variación de la función $f$ respecto a su posición en el espacio. Si bien la función $f$ es un escalar de variables *x, y, z,* sus derivadas parciales respecto a las coordenadas asumen un carácter vectorial:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \; (f, \text{ función escalar})$$

A partir de un incremento de $f$ en cada dirección, la diferencial total de $f$ es:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Considerando luego el vector de posición:

$$\bar{r} = xi + yj + zk,$$

se tiene:

$$\overline{dr} = dxi + dyj + dzk$$

El gradiente de $f$ es la función vectorial $\overline{\nabla} f$ definida por:

$$\overline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

y el operador vectorial, conocido como operador Nabla:

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$$

El diferencial $df$ puede sugerirse como:

$$df = \overline{\nabla} f \cdot d\bar{r}$$

En esta enseñanza la definición del gradiente solamente es presentada a través de la operación que precede. El vector gradiente es determinado en un punto $(x_0, y_0, z_0)$ para casos particulares de funciones escalares. La praxeología escolar puede ser descrita de la siguiente manera:

*T:* Calcular el gradiente de la función escalar $f(x, y, z)$

τ: La técnica institucionalmente reconocida por E(M) y contenida en $\theta^{\text{th}}$ es un procedimiento que implica el cálculo de tres derivadas parciales de la función:

$$\overline{\nabla} f = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) i + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) j + \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) k$$

$\theta^{\text{th}}$ : En la enseñanza del cálculo vectorial, el gradiente de la función escalar $f$ es un vector que se presenta bajo la forma:

$$\overline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

Θ: No es considerada.

Después de establecer la definición, se busca dar un *sentido* real a la aplicación $\nabla f$; ese sentido es normalmente proporcionado a partir de cartas topográficas, miradas como campos escalares, donde los vectores gradiente indican la *dirección de máxima inclinación* de algún cerro o promontorio. Un ejemplo clásico que se ofrece a los estudiantes para que intenten comprender el concepto es semejante al siguiente, (Figura ii):

Consiste en considerar el mapa de curvas de nivel de una montaña como campo escalar que asigna a cada pareja de coordenadas latitud-longitud un escalar altitud (campo escalar de 2 variables). En este caso el vector gradiente en un punto genérico indicará la dirección de máxima inclinación de la montaña. Nótese que el vector gradiente será perpendicular a las curvas de nivel del mapa.

A partir de mapas que contienen curvas de nivel, se sugiere una *técnica* que consiste en trazar vectores gradientes, iniciando con colocar una sucesión de puntos elegidos sobre curvas de nivel que crecen o decrecen (según correspondan a eminencias o depresiones del terreno) siguiendo la tangente en cada punto y sus perpendiculares, hasta llegar a la parte superior o inferior del relieve en cuestión. El trazo que resulta sugiere una línea particular de gradientes sobre la configuración, que establece una *Curva de Máximo Ascenso* (CMA) o, incluso, una *Curva de Mínimo Descenso.*

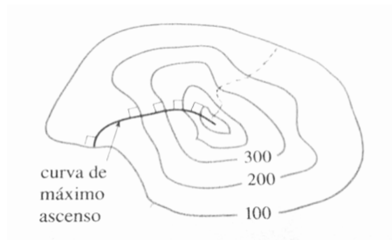


***Figura 2***. *Trazo de una Curva de Máximo Ascenso usando solamente un par de escuadras y lápiz. Fuente: Stewart (2002), p. 935, Figura 12.*

Sin embargo, el discurso tradicional en la enseñanza del concepto, normado por el profesor en clase por el uso de los libros de texto, se restringe a una intervención sucinta de las CMA. Por una parte, no son considerados los conceptos fundamentales de las configuraciones de las cartas que pertenecen a las prácticas topográficas: *curva de nivel, vertiente, línea de mayor pendiente, crestas, equidistancia entre curvas, controles horizontal y vertical, escalas, planta topográfica,* entre otras. Por otra parte, es poco reconocido el concepto en la topografía misma. En este sentido, la transposición praxeológica es limitada a una interpretación de la definición del concepto, poco confiable para mejorar su comprensión, puesto que se parte de la definición para su interpretación, ignorando otros significados. Por tanto, "(…) *esta situación problemática es inamovible y sin posibilidades de más desarrollo"* (Barquero, Bosch y Gascón, 2010, p. 532).

La línea punteada que aparece en la Figura 2, es conocida en la topografía como *Línea de Mayor Pendiente* (LMP), ella corresponde a las partes más abruptas por las cuales baja el agua más rápidamente sobre los cerros. En la enseñanza de las matemáticas, ese concepto no es explotado. En tanto en la topografía fue utilizado para diseñar plantas topográficas; de modo que es posible utilizar la LMP para motivar la introducción del gradiente.

*La topografía*

La topografía es un sistema ordenado de elementos geométricos cuyos componentes se relacionan a través de argumentos de la trigonometría. Estudia el conjunto de principios y procedimientos que tienen por objeto la representación gráfica de la superficie de la tierra, con sus formas y detalles; tanto naturales como artificiales, asociando los puntos de vista planimétrico y altimétrico. Esta representación tiene lugar sobre superficies planas, limitándose a pequeñas extensiones de terreno. Una dimensión importante es el estudio de las *vertientes,* de las cuales importan sus *perfiles*, por la forma que presentan en las partes más bruscas de los terrenos. Las vertientes son verdaderos *conos aluviales* que corroen y desmantelan continuamente el suelo sobre los que corren los flujos de agua en los cerros, provocando severas inundaciones sobre los valles donde desembocan.

La conformación de las vertientes ocurre a través de la desembocadura del escurrimiento de las agua pluviales a lo largo de las LMP, por donde crean *bancos* de agua que se hunden en el suelo, estos últimos constituyen una materialización de las LMP. Ello explica más generalmente que la localización de las LMP y su ubicación topográfica y geológica (hidrológica) se co-determinen, lo cual hace posible que nos interesemos en el estudio de los mapas topográficos para introducir los conceptos de LMP y vector gradiente. Veremos que la noción de LMP es también la base para la delimitación de las prácticas que llevan a la elaboración de mapas.

*El gradiente en la práctica de delineación. La deconstrucción*

La práctica de delineación ha sido una actividad en el cual el gradiente ha mostrado su máxima utilidad. Este método, conocido como del *claroscuro,* fue desarrollado por el ingeniero mexicano Francisco Díaz Covarrubias a mediados del siglo XIX y abandonado a principios del siglo XX. En si misma es una práctica de diseño con la que se da sentido de profundidad y relieve a las cartas topográficas. La práctica incorpora una técnica que conduce a la localización y determinación de la LMP, sobre la parte más abrupta de las curvas de nivel.

La Figura 3 muestra el diseño en planta de un cerro, colocado en Díaz Covarrubias (1890, p. 559), observe en la imagen derecha la sensación de relieve, así como las vertientes figuradas entre las partes más oscuras de la planta. El método consiste, principalmente, de graduar el *sombreado* según las pendientes del terreno. A partir de esta idea, la herramienta para representar los accidentes verticales era asociada a las curvas de nivel (las curvas de nivel son visibles en la imagen izquierda de la Figura 3, y son reemplazadas por *plumazos* del claroscuro en la imagen derecha de la misma), de modo que la pendiente entre cada dos curvas, es: $p = \frac{e}{\Delta}$, donde $e$ representa la equidistancia entre curvas y $\Delta$ la separación o proyección horizontal entre cada dos de éstas. Entre más abrupta sea la pendiente, más pronunciada es la proporción de negro contra el blanco para el diseño.

***Figura 3****. En la imagen derecha, diseño de una porción de planta topográfica utilizando la técnica del claroscuro. La imagen izquierda muestra las curvas de nivel sobre las que se logra la cobertura del diseño.*

La *teoría* detrás de la técnica del claroscuro, proviene de una práctica que tiene como referente a la topografía:

> (...) si en cualquier punto del terreno comprendido entre dos planos secantes, suponemos que se abandona un cuerpo pesado a la acción de la gravedad, este descendería a lo largo de la vertiente siguiendo la línea más corta, que es la perpendicular a las intersecciones del terreno con los planos secantes, llamada *línea de mayor pendiente* puesto que toma el mayor ángulo con el horizonte, respecto a cualquier otra línea que se tomara. (Díaz Covarrubias, 1890, p. 559)

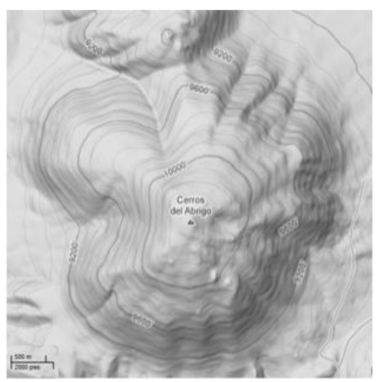


***Figura 4.*** *Cerros del Abrigo, Nuevo México E. U. A lo largo del cerro se aprecian crestas de curvas que determinan LMP o vertientes. En algunos casos las vertientes se localizan por las partes más oscuras de la configuración.*  (Fuente: http://maps.google.com.mx/)

La técnica para localizar en la configuración la LMP, es una *técnica-práctica* que permite identificarla sobre las *crestas* consecutivas entre cada dos curvas[1]. En resumen, las dos etapas para su localización son las siguientes: 1) Se diseña una línea punteada continua

[1] En la topografía, las *crestas* no se conciben en el sentido de la matemática, es decir, no son discontinuidades donde las rectas tangentes se indeterminen o no tengan sentido. Es solamente una denominación que se hace de la irregularidad de la curva.

sobre la trayectoria de crestas elegidas, que corresponde esencialmente a la LMP buscada (véase la gran cantidad de vertientes figuradas entre las curvas de nivel, y las correspondientes crestas, en el mapa de la Figura 4). 2) Se inicia el diseño a partir de dicho trazo con *plumazos* de tinta proporcionados del blanco contra el negro, extendiéndose a lo largo de la planta topográfica, dando así la sensación de profundidad y relieve a los accidentes del terreno.

El concepto de LMP sirve de base a una técnica *producida* en el marco del diseño topográfico, que es habilitada por un *saber-hacer,* integrando conocimientos matemáticos que la justifican.

## Definición del Gradiente desde la LMP

Utilizando elementos de la técnica del claroscuro, con un mínimo de argumentos de la topografía, nos proponemos un esquema de enseñanza que lleve a la definición del gradiente en la forma $\nabla f$. La secuencia inicia con la *localización* de la LMP situada entre dos curvas de nivel de una porción de terreno, dibujado sobre un *croquis*. El croquis a su vez se coloca en un ambiente geométrico elemental que permite determinar los vectores gradiente entre curvas de nivel, así como también encaminarse hacia una aplicación *variacional* sobre funciones de dos variables, como las contenidas en $\nabla f$. Los elementos que provienen de la topografía son unos cuantos, contenidos en la siguiente proposición: *la porción de un cerro configurado por curvas de nivel que determinan vertientes*.

### *El croquis. El agua baja más rápidamente por las vertientes*

El mapa que se muestra enseguida (Figura 5) representa la *porción de un cerro* diseñado a través del uso de *curvas de nivel* en la forma en que los utilizan los topógrafos, los ingenieros civiles y los arquitectos en sus proyectos. De hecho, la representación del cerro es un intento por mostrarlo en tercera dimensión. En la Figura 6 aparece un croquis que muestra la vertiente que aparece en la parte inferior izquierda de la Figura 5.

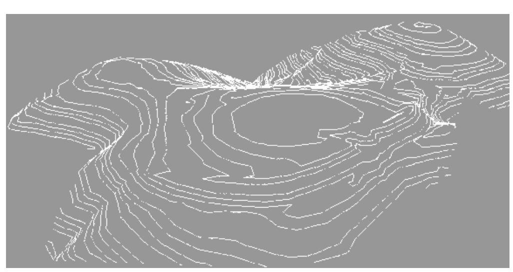

***Figura 5.*** *Idealización: curvas de nivel sobre un cerro en una imagen tridimensional. ¿por dónde supone que corre el agua cuando llueve? Fuente:* http://es.wikipedia.org/wiki/Curva_de_nivel.

Las curvas de nivel son *equidistantes*, en el sentido donde la distancia vertical entre los planos horizontales que contienen dos curvas de nivel consecutivas, es fija. Se puede ver en las dos figuras (5 y 6), que las curvas de nivel se pronuncian hacia arriba formando así *crestas* para luego bajar de nuevo.

De las definiciones *prácticas* $\theta^P$ que pertenecen a la topografía P(T), y se utilizan en la elaboración del discurso, se tienen:

- $\theta_1^P$: *Curva de nivel:* Son las intersecciones de las superficies de terrenos con planos secantes equidistantes que les cortan verticalmente (Figura 5).
- $\theta_2^P$: *Equidistancia entre curvas de nivel:* Distancia vertical-normal entre cada dos curvas consecutivas, por lo general es constante. En la Figura 5 las equidistancias son las distancias verticales entre los planos secantes que cortan al cerro.
- $\theta_3^P$: *Escala:* Representación en un mapa de la realidad del terreno en una proporción diferente. Por ejemplo, un mapa que se encuentre diseñado a escala 1: 5000, significa que 1 cm en el mapa representa 5000 cm o 50 m del terreno.
- $\theta_4^P$: *Pendiente entre curvas de nivel:* $p = \frac{e}{\Delta}$ es decir: equidistancia/longitud horizontal que separa ambas curvas.
- $\theta_5^P$: *Superficie:* Porción limitada de terreno que se corresponde con el espacio real.

*En el mapa de curvas de nivel dado ¿cómo identificar la trayectoria por la que baja más rápidamente el agua*?

La manera de reconocer la trayectoria por donde baja la lluvia más rápidamente, consiste en examinar las *vertientes* que siguen las líneas más cortas entre cada dos curvas de nivel consecutivas. En este caso *planos secantes* son representados por los contornos, y la trayectoria más corta se presenta en las partes donde las curvas se *vuelcan* hacia arriba simulando *crestas* que unidas determinan la vertiente, por la cual el flujo de agua escurre *de manera escalonada* (Figura 6).

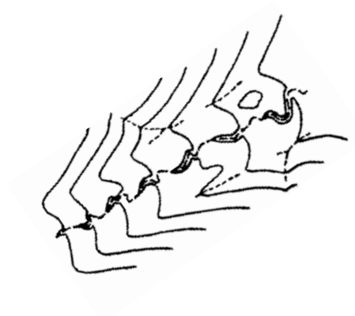

***Figura 6.*** *Idealización. Croquis de la vertiente, flujo de agua, que se aprecia en la parte inferior izquierda de la Figura 3. El agua baja de un escalón a otro. ¿Qué pasa cuando, en el límite, los planos secantes están muy próximos uno del otro?*

*Modelización geométrica de la vertiente*

El gradiente es una de las expresiones diferenciales más elementales, que puede representar la manera en la que una magnitud física varía en el espacio. Se obtiene al considerar las derivadas de un campo escalar, por ejemplo la variación del espacio $z = f(x, y)$ que representa un cerro. Si bien el espacio es un escalar, sus derivadas respecto a $x$ e $y$ asumen un carácter vectorial.

Nuestro objetivo es buscar en un punto $A$ de la superficie $z = f(x, y)$, la pendiente $p$ del escurrimiento del agua, es decir la pendiente de la LMP (Figura 7). Para ello, enseguida producimos un discurso tecnológico que no es conforme a una validación legítima en las instituciones P(M) de la investigación matemática y E(M) de la enseñanza de las matemáticas. Por el contrario, este último se ubica en las instituciones análogas de las ciencias físicas. Esta elección nos permite hacer accesible a los lectores, la relación que se guarda entre la teoría matemática de la diferenciabilidad de las funciones en varias variables, en su correspondencia con el gradiente y la LMP. En otras palabras, es un discurso explicativo (Castela y Romo-Vázquez, 2011, p. 89), que puede pertenecer a la praxeología matemática del tipo de tareas, *T*: Localizar la LMP.

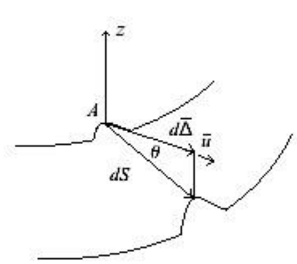


***Figura 7***. *Triángulo infinitesimal determinado por el espacio dS recorrido por el agua.*

Consideremos, como los físicos, pequeños incrementos y diferenciales. A partir de $\Delta(x,y)$, proyección horizontal de $A$, se tiene el desplazamiento horizontal $\overline{dA} = (dx, dy)$. De aquí que la altura varía como:

$$dz = f(x+dx, y+dy) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

La segunda igualdad se obtiene según una técnica clásica utilizada en la física, identificando el lado correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, y a la tasa de incremento o límite, es decir la derivada, parcial o no, en el caso de que los incrementos tiendan a cero, la cual es vista como un cociente de diferenciales. Es en esta fase que pueden ser introducidas las derivadas parciales, de las que se sigue el vector gradiente.

Por definición, la pendiente $p$ en la dirección $(dx, dy, dz)$ es $\frac{dz}{\|\overline{dA}\|}$, es decir:

$$p = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}dx}{\|\overline{dA}\|} + \frac{\frac{\partial z}{\partial y}dy}{\|\overline{dA}\|} =< grad(f), \frac{dx}{\|\overline{dA}\|} + \frac{dy}{\|\overline{dA}\|} >$$ [2].

No obstante, sabemos que un producto escalar es máximo cuando los vectores son colineales, luego *p* es máxima cuando los vectores $\left(\frac{dx}{\|\overline{dA}\|} + \frac{dy}{\|\overline{dA}\|}\right)$ y el $grad(f)$ son colineales. Es así que la pendiente *p* es máxima cuando Δ, proyección de *A* sobre un plano horizontal, o bien representación de *A* sobre una planta topográfica, se desplaza tangencialmente al gradiente, siendo $p = \left\|\overline{grad(f)}\right\|$, puesto que el vector $\left(\frac{dx}{\|\overline{dA}\|} + \frac{dy}{\|\overline{dA}\|}\right)$ es unitario. Si anotamos a $\overline{dS}$ como el pequeño desplazamiento ocurrido a lo largo de la LMP, el triángulo rectángulo infinitesimal lleva a que:

$$\left\|\overline{dS}\right\|^2 = \left\|\overline{d\Delta}\right\|^2 + dz^2, \text{ de donde } \frac{dz}{\|\overline{dS}\|} = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}.$$

Luego, es posible introducir el vector gradiente como pertinente en el contexto topográfico de la investigación de la LMP. A partir de ello, toda una tecnología teórica, legitimada por el punto de vista de las instituciones matemáticas, puede ser desarrollada para demostrar las afirmaciones vistas anteriormente e integrarlas en una teoría matemática.

## Resultados

Hemos presentado un proceso de circulación de saberes entre dos instituciones, matemáticas P(M) y topográficas P(T). Los saberes fueron utilizados en la topografía mexicana de finales del siglo XIX, siendo transformados para dar definición a la LMP. No

[2] La notación <– + –> designa al producto escalar.

alejados de su concepción de origen, esos vestigios son devueltos en sentido inverso de la topografía hacia la matemática, para definir el gradiente.

En ese proceso se dejan ver dos actividades: la primera de ellas es una deconstrucción del saber que permite situarlo al seno de los problemas que pertenecen a las ciencias no matemáticas, es el caso de la topografía. La segunda presenta una recontextualiación del saber deconstruido en la topografía, que sirve posteriormente para llevarlo a las matemáticas. En el primer caso, el saber fue objeto de una transposición hacia P(T) que hizo que su relación con la tecnología teórica $\theta^{th}$ se perdiera, así como su sentido matemático de origen. En el segundo caso no se puede hablar de una transposición didáctica en el sentido clásico, debido a que los conocimientos no proceden del saber matemático, sino de conocimientos, competencias y procedimientos mixtos, matemáticas académicas y la topografía.

Se identifican luego dos técnicas que surgen de una disciplina no-matemática para la determinación del gradiente: aquella que tradicionalmente es sugerida en los libros de texto para el cálculo vectorial y la que ha sido propuesta en esta comunicación a partir de la realidad de porciones de espacios topográficos configurados por curvas de nivel, apoyados por la LMP, que ha su vez ha sido determinada por una técnica práctica, y con la que se introdujo el gradiente.

En este sentido, disciplinas no-matemáticas nutren a la matemática escolar a través de saberes transformados en contexto.

## Conclusiones

*Hacia la concepción de una organización didáctica*

El análisis praxeológico mostrado anteriormente, constituye una base para concebir organizaciones didácticas adaptadas para la enseñanza matemática y, en particular, para el cálculo vectorial. La organización debe contar como eje principal la presentación del estado de los elementos de la topografía, tales como puntos sobre el terreno $P(x, y, z = e)$, en su paso al marco de las funciones en dos variables, como $z = f(x, y)$. Para la concepción de la organización didáctica, consideramos tomar en cuenta la modelización en términos de macro-espacio, meso-espacio y micro-espacio, utilizado en la investigación de Matheron y Noirfalise (2010). La principales líneas directrices serán las siguientes.

En una primera etapa, para que los estudiantes puedan localizar e identificar las LMP, será necesario proponer tareas solicitando utilizar técnicas de la topografía sobre croquis extraídos de cartas topográficas.

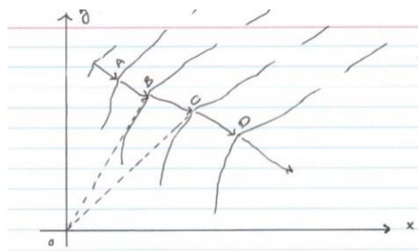

***Figura 8***. *Obtención de la LMP sobre un plano topográfico.*

En los croquis, los alumnos trazarán LMP identificándolas por medio de las crestas consecutivas entre cada dos curvas. Estas permiten alojar vectores secantes $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, etc., cuyas componentes sobre los ejes rectangulares pueden ser determinados usando solamente un par de escuadras graduadas, Figura 8. Con la realización de esa práctica, en una segunda etapa, el profesor y sus alumnos contarán con elementos geométricos para introducir el gradiente en el curso.

El gradiente vincula diferentes niveles de conocimiento que permiten dar cuenta de procesos de construcción de conocimientos empíricos determinados por $\theta^{P}$ y praxeologías no-canónicas. Como concepto decontextualizado, el gradiente cuenta con amplios atributos operatorios que lo hacen un objeto interesante para circularlo entre diferentes instituciones.

Lo anterior muestra una posible manera de reconocer y establecer relaciones entre distintas instituciones, en este caso la topografía P(T) y las matemáticas P(M)-E(M). Lo que desde nuestro punto de vista es necesario para formar a los futuros profesionistas, perfilando diferentes maneras donde las matemáticas son utilizadas y validadas.

## Referencias

Barquero, B. Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Ecología de la modelización matemática: Restricciones transpositivas en las instituciones universitarias. En: Bronner A, Larguier M, Artaud M, Bosch M, Chevallard Y, Cirade G, & Ladage C. (Éds), (pp. 527-549). *Diffuser les mathématiques comme outils de conaissansse et d´action (et les autres savoirs)* II$^{e}$ congrès international sur la TAD (Uzès, 31 oct.-3 nov. 2007).

Camacho, A. & Sánchez, B. (2015). Praxeologías y empiremas, recursos extremos para la construcción de conocimiento. XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. En: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/464/257

Castela, C. & Romo-Vázquez, A. (2011). Des mathématiques a l´Automatique: Étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* (*31*), 1, pp. 79-130.

Chevallard, Y. (1999). *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. Consultado el 20 de abril de 2013. En: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. En Ruíz-Higueras, L. Estepa, A García, F. J (Eds.). Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones a la Teoría Antropológica de lo Didáctico, 705-746. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Díaz Covarrubias, F. (1890). *Manual de Topografía*. México: Imprenta del Gobierno en Palacio.

Gantois J-Y (2012). Un milieu graphique-cinématique pour l´apprentissage des dérivées dans une praxéologie "modélisation": potentialités el limites. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Liège.

Matheron Y. & Noirfalise R. (2010) Une recherche de la Commission inter-IREM (CII) didactique soutenue par l'INRP : « Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d'AER et de PER ». In Bronner A., Larguier M., Artaud M., Bosch M., Chevallard Y., Cirade G., Ladage C. (Eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 633-654). Montpellier : IUFM de l'académie de Montpellier.

Stewart, J. (2002). *Cálculo Multivariable.* México: Thomson Learning, Cuarta Edición.

**Autores:**
**Alberto Camacho**
camachoalberto@hotmail.com
Instituto Tecnológico de Chihuahua II, TecNM, México,

**Avenilde Romo–Vázquez**
**avenilderv@yahoo.com.mx**
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN
México