MODELACIÓN Y SIMULACION SIMULTÁNEA DE UN FENOMENO. ELEMENTOS PRECURSORES DE LO BILINEAL

Silvana Gómez Ojeda (Silvana.gomez@usach.cl)
Universidad de Santiago de Chile
Leonora Diaz Moreno (leonora.diaz@uv.cl)
Universidad de Valparaíso
Ismenia Guzmán Retamal (ismenia.guzman@ulagos.cl)
Universidad de Los Lagos

Recibido: 11/07/2017 **Aceptado:** 19/10/2017

Resumen

En este artículo se reportan resultados de un estudio exploratorio bajo el enfoque de la socioepistemología. Con base en una deconstrucción de producciones de estudiantes la que distingue argumentos y herramientas, se estudió la emergencia de lo bilineal en las elaboraciones de estudiantes de profesorado de matemáticas, cuando tratan de predecir el comportamiento de un fenómeno físico que se les presenta al realizar prácticas de modelación/simulación. La práctica de modelación/simulación se entiende como la articulación de dos entes, de modo que partiendo de uno se actúe sobre el otro, con la intencionalidad de estudiar fenómenos. Si el estudio inicia con una tabla de datos numéricos, se modela; si la tabla de inicio se compone de dos columnas de derivadas parciales, se simula. Se trata de que emerja la derivada parcial al modelar y la integral doble al simular. Los diseños utilizados con base en la visión newtoniana del cálculo, conducen a configurar la naturaleza bilineal de la variación de la elongación de un sistema de resortes.

La deconstrucción deja entrever que las herramientas usadas son las razones de cambio al modelar y el cálculo de diferencias, al simular. Estos desarrollos forman parte de redes de modelos, una ordinaria y otra diferencial.

Palabras clave: Socioepistemología, Lo Bilineal, prácticas de Modelación/Simulación

MODELING AND SIMULTANEOUS SIMULATION OF A PHENOMENON. PRECURSOR ELEMENTS OF THE BILINEAL

Abstract

This article presents the results of an exploratory study through a social epistemological approach. Based on a deconstruction of student productions that distinguishes arguments and tools, the emergence of bilinear in the elaborations of pre-service math teachers was studied, when they try to predict the behavior of a physical phenomenon presented to them while performing modeling / simulation activities. The practice of modeling / simulation is understood as the articulation of two entities, so that starting from one is acting on the other, with the intention of studying phenomena. If the study starts with a table of numerical data, it is modeled; if the table consists of two columns of partial derivatives, it is simulated. The result is that the partial derivative emerges by modeling and the double integral by simulating. The designs used based in the Newtonian vision of calculus, lead to configure the bilinear nature of the variation of the elongation of a system of springs. The deconstruction reveals that the tools used are the rates of change in modeling and the calculation of differences, by simulating. These developments form part of two networks of models, one ordinary and the other differential.

Keywords: Socioepistemology, Bilineal, Modeling / Simulation practices

Introducción

La socioepistemología es un enfoque de la matemática educativa que considera a las matemáticas en la actividad de la vida de las personas. Postula que la actividad matemática constituye un modelo de construcción de ese saber. En las prácticas aparecen, se estructuran y se movilizan en cuanto argumento, nociones matemáticas con las cuales los estudiantes construyen conocimientos qué, como herramientas, configuran sus nuevos saberes. Al alero de la Socioepistemología nace en la década de los 90, la línea de investigación denominada Pensamiento y Lenguaje Variacional, en la que se inscribe esta tesis. Línea del pensamiento matemático avanzado en la que se busca localizar y analizar las formas, momentos, y circunstancias en que aparece y se desarrolla la noción de variación en situación de enseñanza.

Esta línea considera que los conocimientos matemáticos, al momento de usarlos en prácticas tales como las de predicción, modelación y simulación se transforman en herramientas, tal como una piedra que se constituye en herramienta al momento de usarse como martillo. Bajo esta mirada, la relación entre variables es una herramienta, en este sentido una fórmula o una gráfica no son representaciones sino herramientas que se usan al momento de modelar algunos fenómenos como cambios lineales, cuadráticos, periódicos o exponenciales, entre otros.

La presente investigación se enfoca en los aprendizajes robustos del cálculo en varias variables asociados con el desarrollo del pensamiento variacional. La presentación del conocimiento en el aula de cálculo diferencial en varias variables suele iniciarse como una generalización del cálculo en una variable, basta revisar textos o apuntes de apoyo. Desarrollar cursos de cálculo en varias variables en distintas instituciones de educación superior ha permitido a las autoras percibir una débil presencia de pensamiento variacional en los estudiantes. Díaz (2006) constata que, mientras la noción de los profesores refiere al vocablo variación, la noción de la mayoría del estudiantado refiere a cambio. Trabajar situaciones asociadas a la modelación de fenómenos en que los estudiantes se impliquen en situaciones de variación y cambio, abre posibilidades de desarrollar este pensamiento como parte del aprendizaje del cálculo superior.

Los estudiantes de profesorado no están ajenos a este débil desarrollo de su pensamiento variacional. Suelen ser formados por profesores que consideran a la matemática como un discurso acabado, que privilegia lo algebraico, que deja de lado la experimentación y en particular como parte de esta, a la predicción. El modelo de enseñanza tradicional dificulta apreciar a la argumentación como un hilo conductor que permite el nacimiento de significados y procedimientos asociados a los conceptos y procesos matemáticos (Arrieta, 2003). De esta manera, se opacan otras visiones en las que se concibe a la matemática como un conocimiento en construcción (Soto et al., 2010).

Méndez (2006) investiga cómo estudiantes de bachillerato construyen lo multilineal, al modelar un sistema de resortes. En su tesis planteó que lo multilineal deja en evidencia la complejidad de lo lineal. Fruto de esta indagación, la autora establece que existe un salto entre plantear la correlación de dos variables y plantear la correlación de más de dos. Deja como desafío, validar secuencias que permitan este salto.

Por su parte Arrieta (2003) sostiene que los estudiantes, en el ejercicio de prácticas de modelación, construyen argumentos, herramientas, nociones y procedimientos matemáticos, al intervenir con fenómenos de la naturaleza.

Estos autores nos inspiran a investigar la construcción socioescolar (Díaz, 2013) de lo bilineal en el ejercicio de prácticas de modelación/simulación. En consecuencia, se plantea la siguiente pregunta para guiar el estudio:

> ¿Cómo emerge lo bilineal en estudiantes de profesorado de matemáticas cuando modelan/simulan un sistema de resortes?

La modelación y la simulación son prácticas que al llevarlas al ámbito escolar permiten trabajar los contenidos matemáticos en relación con situaciones cotidianas. Al proceso de modelación/simulación se le entiende como una práctica que articula dos entes de manera que a partir de uno de ellos se actúa sobre el otro. En tanto que, la práctica de modelación tiene la intención de intervenir en un ente a partir de otro, la simulación obliga la interacción entre el fenómeno y sus modelos, y, a partir de estos modelos construir el fenómeno simulado (Ramírez, 2015). Si se articula una tabla con datos numéricos experimentales tomados desde el fenómeno, se habla de modelación; Si la práctica se inicia desde modelos, sean estos diferenciales (tabla de diferencias formada por la variación de las razones de cambio), vectoriales (el gradiente) o una ecuación diferencial, se habla de simulación.

En el estudio se pusieron en escena dos diseños de enseñanza, con base en la visión newtoniana del cálculo. Interesaba investigar en las construcciones de los estudiantes de profesorado de matemáticas, la emergencia de la derivada parcial como herramienta al modelar y a la integral como acumulación de diferencias al simular; la articulación de la predicción con la serie de Taylor; y, a la relación de la derivada parcial con la razón de cambio.

Se reporta la aplicación de las secuencias de lo bilineal: modelación de un sistema de resortes y simulación de un sistema de resortes, en un curso electivo para profesores en formación llamado *Actividad matemática con base en prácticas de modelación* de una universidad de Santiago de Chile.

Antecedentes sobre investigaciones afines

Desde la perspectiva de la Socioepistemología, diversos investigadores se han enfocado en mejorar las estrategias didácticas como solución al problema de la comprensión del cálculo y del cálculo en varias variables, elaborando propuestas innovadoras. Aportan al cálculo en una variable los autores Alanís (1996), Salinas y Alanis (2009), Thompson y Silverman (2007), Dolores (1990), Campero y Cantoral (1991), Marcolini y Perales (2005), entre otros.

Alanís (1997). Pulido (1998) y Arrieta (2003) desde la visión newtoniana del cálculo, elaboran propuestas que incorporan la modelación y el pensamiento variacional.

Pulido (2008) toma como base la construcción histórica del cálculo la que nace al abordarse problemas de física y de geometría. Estos problemas requirieron como herramientas, de los procesos infinitesimales para resolverlos. El uso regular de estas herramientas permitió la construcción de derivadas, anti-derivadas, diferenciales e integrales

Arrieta (2003) en su tesis doctoral realizó un estudio profundo de los trabajos de Newton, Wallis y Galileo, lo que le permitió dejar en evidencia una práctica central que denominó numerización de fenómenos. Esta se inicia a partir de la toma de datos, la construcción de tablas, búsqueda de patrones, construcción de modelos orientados a predecir el comportamiento de fenómenos y a establecer una conexión entre el fenómeno, los parámetros y las formas de predicción. Este autor, poniendo en práctica la numerización validó dos diseños con estudiantes de Bachillerato, quienes, al vivenciar los diseños, construyeron conocimiento diferencial con base en las diferenciales, a la manera de Newton y Wallis.

Dolores (1996) estudió la derivada. Diseñó en sus investigaciones secuencias con centro en el desarrollo del pensamiento variacional. Sus actividades tienen por eje predecir la gráfica de la derivada a partir del comportamiento variacional expresado de modo tabular y analítico. Este autor, recomienda estudiar el cálculo diferencial desde la variación para que la derivada deje de ser un concepto abstracto y se transforme en una herramienta útil para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza.

Muñoz (1990) por su parte, rediseña el discurso curricular para subsanar el problema que ocasiona en los estudiantes la separación entre lo conceptual y lo algorítmico en la enseñanza del cálculo, en el caso particular de la integral. Articula la predicción y la serie de Taylor, los que se muestran entrelazados en la historia del desarrollo del cálculo. Se auxilia con la teoría de campos conceptuales (Vergnaud, 1983) para construir el campo conceptual de la integral. Ello lo condujo a un conjunto de situaciones problema que dan sentido al "concepto de integral". El autor investiga las construcciones de los estudiantes cuando interactúan con la secuencia. La reflexión lo lleva a encontrar el tipo de problema a considerar en el campo conceptual. Visualiza el campo conceptual del cálculo anclado en tres ejes: predicción, acumulación y constantificación de lo variable consideradas como prácticas sociales (Muñoz, 2004).

Cordero (2002) en su tesis doctoral destaca que las situaciones de cambio y variación explicadas a través de la resta f (t + dt) – f(t) son claves en el desarrollo del cálculo. Sostiene que la transformación de las situaciones de cambio y variación, se configura por medio de la serie de Taylor

$$f(t + dt\,) = \; f(t) +\cdot\, dF(t) + d^2F(t) + algo$$

de lo que se desprende la diferencia:

$$f(t + dt\,) - \; f(t) = dF(t) + d^2F(t) + algo$$

diferencia a través de la que se obtiene el cambio local o puntual en el sistema; ahora bien, la diferencia refiere al estado futuro menos el estado presente. Así, el cambio total en el sistema o fenómeno de variación, se configura por:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Marcolini y Perales (2005) son otros autores que, desde un enfoque diferente al socioepistemológico, participan del propósito de rediseñar el currículum y parte del discurso didáctico del análisis matemático. Toman como centro en sus desarrollos a la predicción en sus vínculos con la Serie de Taylor.

Marco Teórico

La socioepistemología, marco teórico que guía esta investigación, estudia la construcción social de los conocimientos matemáticos y su difusión institucional. Considera a la práctica social como constructo teórico central que cumple funciones normativas, discursivas, identitarias y pragmáticas. Deconstruye prácticas sociales para dar cuenta de construcciones de conocimientos matemáticos en la sociedad. Esta teoría sostiene que la construcción de conocimiento matemático se da al interior de un grupo de personas y está normado por aspectos de carácter institucional y cultural. Postula al ejercicio de prácticas como generadora de conocimiento matemático entre los grupos humanos el que se construye y reconstruye en el contexto de la actividad misma (Cantoral et al, 2014). Participar de una práctica deja en evidencia los modos en que se construye el conocimiento e informa además lo que somos y como interpretamos lo que hacemos (Arrieta, 2003). Las prácticas sociales como la modelación y la predicción, han jugado un rol importante a lo largo de la historia en la actividad humana, en la manera de hacer matemáticas y en la construcción de conocimiento matemático con una determinada intención. Posibilitaron desde inicios de los tiempos modernos que emergieran y se expandieran los conocimientos matemáticos.

Este carácter social lleva a que las matemáticas sean vistas como producto de construcciones sociales surgidas de prácticas y contextos (Buendía, 2004). El cambio de perspectiva, desde lo individual a lo social, obligó a reformular las dimensiones epistemológica, didáctica y cognitiva. La dimensión cognitiva en este nuevo enfoque se guía por la pregunta ¿Cómo los estudiantes y el profesor construyen identidades, significados, realidades y su propia cognición? La dimensión didáctica aborda los contextos argumentativos, las formas de argumentar y de llegar a consensos. La dimensión epistemológica se centra en analizar la naturaleza social de la construcción de conocimientos matemáticos (Buendía, 2004).

Con respecto a la dimensión cognitiva se comparte la mirada de Vygotsky. Este plantea que los procesos psicológicos son resultado de la interacción entre cada persona y la cultura, que el actuar humano está mediado por herramientas y signos y, que estos actúan a nivel sicológico de la misma manera que una herramienta en la práctica cotidiana. Martínez (1999) afirma que el significado de los signos se obtiene como resultado de procesos de negociación entre quienes participan de prácticas sociales compartidas.

Más ampliamente, desde la teoría socioepistemológica, el aprendizaje es una actividad humana situada en contextos sociales. En ellos los estudiantes construyen sus conocimientos como herramientas, modificando sus prácticas, sus conocimientos previos, su entorno, su identidad, su realidad y su cognición.

Este estudio se sitúa en el aprendizaje del cálculo diferencial e integral en varias variables a través de la modelación/simulación de fenómenos.

Desde el marco teórico elegido lo bilineal es una herramienta, en el sentido de Vygotsky y de Leontiev, que se construye en el ejercicio de una práctica. No es el objeto matemático función o transformación bilineal. Desde esta perspectiva, lo bilineal es más bien la construcción de herramientas, bajo un contexto determinado, a través de la práctica simultánea de modelación y simulación (modelación/simulación). En tanto que se entiende a las herramientas como las entidades que concurren con una intención, por ejemplo las razones de cambio al modelar y el cálculo de diferencias, al simular, en la actividad de modelación/simulación de los estudiantes. La articulación o las relaciones que se establecen entre los modelos constituyen una red de modelos que configura a lo bilineal.

Desde la concepción de modelación de Arrieta y Díaz, la interacción con el fenómeno puede darse desde el fenómeno al modelo o viceversa. Se simula el fenómeno a partir de sus modelos.

En este estudio consideramos a las prácticas de modelación y de simulación como prácticas interconectadas, de ahí el nombre de práctica de modelación/simulación. Ambas tienen como eje central a la predicción.

La práctica de modelación/simulación se entiende como la articulación de dos entes, de modo que partiendo de uno se actúe sobre el otro. Si la práctica inicia con una tabla de datos numéricos tomados desde el fenómeno, se modela; si la tabla de inicio se compone de dos columnas de derivadas parciales, se simula.

En el caso que ocupa a este estudio, la simulación la definimos como la articulación de dos entidades, el fenómeno y el modelo diferencial, el fenómeno y un modelo vectorial. En una sola práctica emergen o se utilizan como herramientas la razón de cambio y las diferencias. Esta práctica conecta el cálculo diferencial y el cálculo integral.

Al articular el fenómeno - lo modelado (ma) - con una tabla que es usada para predecir el comportamiento de éste, se da lugar a un nuevo ente, el modelo tabular (mo). Ambos se adhieren por lo que de esta articulación surge una nueva entidad para la vivencia del que modela, a esta entidad se la denota por (ma, mo) y se la denomina dipolo modélico (DM).

Lo expuesto se aprecia en la práctica del meteorólogo quien lee la gráfica para predecir el clima, la gráfica se transforma en modelo cuando éste predice el clima. Ambos, la gráfica como modelo y el fenómeno climático, se adhieren para él, por lo que surge el DM (clima, gráfica). Como el televidente no modela, solo percibe una gráfica de mediciones.

Metodología de investigación

Se recurre a la metodología de investigación de estudio de casos.

El diseño metodológico está compuesto por dos secuencias, una referida a la modelación y la otra a la simulación, ambas suscriben la visión newtoniana del cálculo. La base epistémica de éstas, son las prácticas de modelación/simulación las que se desarrollan en interacción con un fenómeno físico, un sistema de resortes. Se forman grupos de trabajo en los que las interacciones entre los integrantes de los grupos son centrales pues permiten la negociación de significados al compartir y confrontar (Arrieta, 2003). En nuestro caso en las dos situaciones, se trata de la emergencia de lo bilineal en la actividad con las secuencias.

Las dos secuencias mencionadas tienen por objetivo construir un contexto en que estudiantes de profesorado construyen interactivamente argumentos, herramientas y significados al interactuar con el fenómeno de elongaciones de un sistema de resortes.

La práctica de modelación del sistema de resortes se inicia al presentar a los estudiantes una tabla con datos de dos pesos y la elongación correspondientes a ellos, con el objetivo de predecir lo que sucede con el fenómeno para pesos y elongaciones no presentados en la tabla. En esta práctica de predecir nuevas cantidades, la tabla se transforma en modelo tabular. En un segundo momento, los estudiantes utilizando un pensamiento inductivo buscan en la tabla regularidades para predecir el comportamiento de la elongación según pesos dados. Esta búsqueda continúa hasta que obtiene una expresión analítico-algebraica. La expresión obtenida les permite construir una gráfica, la que a su vez se transforma en modelo gráfico, al predecir valores de elongación desde ella.

Secuencia 1: Modelación de la elasticidad de un sistema de resortes

Objetivo de la Secuencia: Crear un contexto donde, en el ejercicio de la práctica de modelación de un sistema de resortes, emerja la construcción de lo bilineal.

Actividad para el estudiante: Construir herramientas y argumentos con base en una experimentación relativa a un sistema de resortes. La experimentación puede plantearse desde un ambiente presencial, que es el caso en que los datos se obtienen desde la experimentación directa con el fenómeno; desde un ambiente virtual, donde el fenómeno se simula a través de aplicaciones informáticas; y, desde un ambiente discursivo. Aquí la narración de la experimentación junto a una figura de esta y una tabla inicial de datos, son centrales (Arrieta y Díaz, 2015). La experiencia de modelar, que se presenta en este estudio, considera la experimentación discursiva.

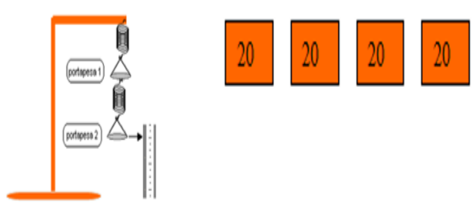
Momento 1: Experimentación discursiva

En la experimentación discursiva, los estudiantes se encuentran con los datos, el planteamiento de una situación en lenguaje natural junto a una figura, para que, a través de recursos discursivos el estudiante pueda ligar los datos con la situación planteada.

Se desarrolla proponiendo tres actividades:

a) Describir el fenómeno con sus propias palabras

Se tiene un soporte universal y un resorte colgando de él, como se muestra en la figura. En su extremo se coloca un portapesas que tiene una flechita o indicador que apunta a una regla. Se cuenta con seis pesas de 20 gramos. Entonces se van colocando pesas en el portapesas y se toman las posiciones del indicador. Con estos datos se hace una tabla.



Peso (g) en la porta pesa 1	Peso (g) en la porta pesa 2	Posición del indicador (mm)
0	0	45
20	0	75
0	20	95
40	0	105
0	40	145

Figura N°1. Experimentación discursiva

b) preguntar acerca de la posición del resorte cuando se colocan pesos que se dan en la tabla

c) preguntar sobre los pesos del portapesas si la posición del indicador toma determinado valor

Para responder estas últimas actividades basta con "leer" la tabla de datos. Se requiere ligar los datos con la situación planteada. Esta articulación la establecen examinando la tabla, con sus compañeros. La observación de la tabla les permite concluir que la elongación, el peso 1 y el peso 2, varían simultáneamente; e identificar las características de la tabla y utilizarla para predecir lo que sucede con la elasticidad de este sistema de resortes.

Momento 2: El acto de Modelar, Predecir

Desde nuestra mirada, sin la interacción con el fenómeno no hay modelación. No basta interactuar con el fenómeno para afirmar que “los estudiantes están modelando”. Es en el acto de articular el fenómeno con algún tipo de entidad por ejemplo tabular, algebraica, figural, entre otras, que se modela y la entidad se constituye en modelo. La predicción es la práctica que articulará las dos entidades, el modelo y el fenómeno (lo modelado), además de permitir la construcción de modelos y dipolos modélicos.

En este segundo momento de la secuencia 1 se distinguen tres fases.

Fase 1: Predicción

Se pregunta a los estudiantes: *Si colocamos pesas de 30 gramos en p1 y 30 gramos en p2 ¿En qué posición estará el indicador?*

Los estudiantes tendrán que utilizar la tabla de datos para determinar lo que sucederá con el resorte en el arreglo experimental, pues se requiere actuar desde la tabla para decir qué sucederá con el resorte. Pero en la experimentación no se cuenta con pesas de 10 gramos, entonces no pueden colocar en cada portapesas pesas de 30 gramos como exige la situación.

Ante esa situación algunos estudiantes construyen un procedimiento de predicción que llamamos "método de puntos medios". Siguen un razonamiento como el siguiente: *Al separar la tabla en dos (tablas) y como 30 es la mitad entre 20 y 40, entonces la elongación se puede calcular, al encontrar el promedio de la elongación de p1=20 que vale 75 y la de p2= 40 lo que da 115, se obtendría como resultado 90 mm, posición del indicador.*

Los estudiantes, para obtener la posición en que estará el indicador en el sistema de resortes, recurren a la tabla de datos. Este acto caracteriza su modelación: con la tabla de datos (que ahora modela al fenómeno) informan elongaciones del sistema de resortes (el fenómeno). El dipolo modélico DM1 (elasticidad del sistema de resortes, tabla de datos) queda establecido por la articulación "predicción por puntos medios". De esta manera emerge Lo bilineal como la conjunción de dos modelos tabulares lineales disjuntos.

Fase 2: De la expresión aritmético-operatoria (números y operaciones) a la expresión analítico-algebraica (relación analítico-algebraica)

El DM1 construido por los estudiantes es numérico. El diseño de aprendizaje plantea una nueva situación, esta lleva a los estudiantes a romper con el DM1 y construir una nueva forma de predecir, y por ende, de articular las entidades.

Se pregunta a los estudiantes: *Si colocamos p1 gramos en el portapesas 1 y p2 gramos en el portapesas 2 ¿en qué posición estará el indicador*?

En esta fase los estudiantes llegan a establecer una expresión analítico-algebraíca para predecir elongaciones del sistema de resortes. La construyen calculando las razones de cambio de la elongación del sistema al colocar un gramo en el portapesas p1 ($\frac{\Delta x}{\Delta p1}$) y la elongación del sistema al colocar un gramo en el portapesas 2 ($\frac{\Delta x}{\Delta p2}$).

Para encontrar la posición del indicador al colocar ambas pesas de un gramo, deberán multiplicar los gramos del portapesas 1 por $\frac{\Delta x}{\Delta p1}$, obtener el producto de los gramos del portapesas 2 por $\frac{\Delta x}{\Delta p2}$ para luego sumar ambos con la posición inicial, lo que les llevará a plantear una expresión como la siguiente

$$\frac{\Delta x}{\Delta p1}\,\mathbf{p1} + \frac{\Delta x}{\Delta p2}\,\mathbf{p2} + \textbf{la posición inicial} = \mathbf{x(p1, p2).}$$

Un nuevo dipolo modélico, DM2, **(**elasticidad, tabla/razón de cambio**),** se conforma por (tabla de datos/razón de cambio) y (la elasticidad de los resortes), relacionados por el algoritmo planteado. La igualdad anterior por sí misma no constituye un modelo, lo será en el acto de modelar (predecir). Esta expresión analítico-algebraica se constituye en modelo analítico-algebraico al momento de predecir. Los estudiantes la usan para predecir el comportamiento del sistema de resortes.

Hasta aquí algunos estudiantes, han articulado el fenómeno con una tabla de datos, constituyendo el dipolo modélico DM1; y han articulado el fenómeno con una expresión analítico-algebraica constituyendo el dipolo modélico DM2.

Fase 3: Del modelo analítico-algebraico al modelo gráfico

El diseño plantea graficar los datos de la tabla para predecir desde el gráfico y constituir de este modo la articulación (fenómeno, gráfica**),** tercer dipolo, DM3

Para construir el nuevo dipolo**, se pregunta a los estudiantes: ¿Cuál es la gráfica de los datos?**

Se espera que los estudiantes establezcan la siguiente relación:

$$F\,(x\,,\,y) \approx F(a,b) + F_x(a,b)\cdot(x-a_1) + F_y(a,b)\cdot(\,y-\,a_2)$$

Luego F (x, y) – F(a,b)= $\boldsymbol{F_x(a,b)\cdot(x-a_1) + F_y(a,b)\cdot(\,y-\,a_2)}$

Reescribiendo el modelo analítico-algebraíco

$$\textit{la posición inicial} + \frac{\Delta x}{\Delta p1}\,p1 + \frac{\Delta x}{\Delta p2}\,p2 - x\,(p1,\,p2) = 0$$

se obtiene

$$x\,(p1,\,p2) - \textit{la posición inicial} = \frac{\Delta x}{\Delta p1}\,p1 + \frac{\Delta x}{\Delta p2}\,p2$$

que es la ecuación del plano cuyo vector normal es ($\frac{\Delta x}{\Delta p1}$, $\frac{\Delta x}{\Delta p2}$, -1) y pasa por (0, 0. 45).

Secuencia 2: Simulación de la elongación de un sistema de resortes

Objetivo de la Secuencia 2: Investigar cómo se comporta la elasticidad de un sistema de resortes disponiendo de los modelos diferenciales, vectoriales o de una ecuación diferencial

Se solicita a los estudiantes simular la elasticidad de un sistema de resortes.

Actividad 1: A partir de datos de una tabla diferencial (modelo tabular)

Actividad 2: A partir del gradiente (modelo vectorial)

Actividad 3: A partir de una ecuación diferencial

Actividad 1: Simular a partir de datos de una tabla diferencial

Con el propósito de construir herramientas y argumentos al simular la elongación de un sistema de resortes a partir de datos de una tabla diferencial, se plantea la actividad 1 a los estudiantes. En ella se pide a los estudiantes describir cómo se comporta el sistema de resortes.

p_1	p_2	$\frac{\partial}{\partial p_1}$	$\frac{\partial x}{\partial p_2}$
0	0	2.3	0
15	0	2.5	0
22	0	2.1	0
41	0	2.4	0
60	0		
0	34	0	4.8
0	40	0	4.9
0	55	0	4.7

Tabla: Tabla de datos diferenciales

Actividad 2. Simular desde el modelo vectorial del gradiente

Se pregunta a los estudiantes *Si un sistema de resortes tiene como modelo* $\boldsymbol{\nabla x = (3,5)}$ *¿Cómo se comporta el sistema de resortes?*

Se espera que los estudiantes retomen la relación utilizada al modelar la elasticidad

$$F(x, y) \approx F(a, b) + F_x(a,b) \cdot (x - a_1) + F_y(a,b) \cdot (y - a_2)$$

Teniendo en cuenta que:

$$F(a, b) + F_x(a,b) \cdot (x - a_1) + F_y(a,b) \cdot (y - a_2)$$

es **la aproximación lineal** de la relación analítico-algebraica que caracteriza la elongación del sistema de resortes. Como IR^2 es un espacio vectorial, se tiene que $\vec{x} = (x, y)$ y $\vec{a} = (a_1, a_2)$, por lo que la expresión

$$F(a, b) + F_x(a,b) \cdot (x - a_1) + F_y(a,b) \cdot (y - a_2)$$

escrita en forma vectorial es::

$$f(\vec{x} + \vec{a}) = f(\vec{a}) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (\vec{a})(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (\vec{a})(y - a_2)$$

lo que de modo equivalente se puede escribir como:

$$f(\overrightarrow{x + \Delta a}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}),$$ con ∇ operador gradiente.

La suma formada por los sumandos (f $(\vec{a})$) y ($\nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})$) determina un nuevo estado de la cantidad de f $(\overrightarrow{x})$, en nuestro caso de la elongación del sistema de resortes.

De acuerdo a lo expuesto y usando que $\boldsymbol{\nabla x = (3,5) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial x})}$ y que $\vec{a}$ = (a,b) = (0,0). La aproximación lineal de la expresión analítico-algebraica que caracteriza al fenómeno es:

$$F(x, y) \approx F(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot ((x,y) - (0,0)) \approx F(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (x,y)$$

Es decir:

F (x, y) = F(0,0) + (3,5)·(x,y) considerando que el incremento es infinitesimal

$$dF \approx F(x+dx, y+dy) - F(x, y) \approx \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dy + \text{“algo”}$$

Por lo que:

$$F(x, y) = 0 + 3x + 5y + C = 3x + 5y + C$$

Actividad 3. Simular a partir de una ecuación diferencial

Se pregunta a los estudiantes *Si un sistema de resortes tiene como modelo $\nabla x = (3,5)$ y además $x(33,\ 27) = 22$ ¿Cómo se comporta el sistema de resortes?*

A diferencia de la actividad anterior, ahora se cuenta con la condición inicial por lo que se está frente a una ecuación diferencial.

Desde el gradiente se sigue un razonamiento análogo al de la actividad anterior, es decir, se utiliza que:

$$F(x, y) \approx F(a, b) + F_x(a,b) \cdot (x - a_1) + F_y(a,b) \cdot (y - a_2)$$

Y al reemplazar se obtiene que:

F (x, y) = 3x + 5y + C .

Usando la condición inicial y reemplazando (33,27) en la expresión analítico-algebraica se calcula el valor de C,

F (33, 27) = 3· 33 + 5· 27 + C = 22

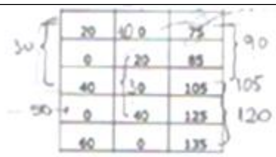
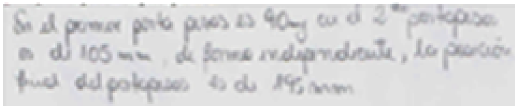
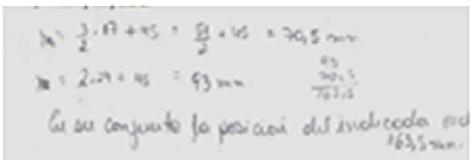
Lo anterior conduce a determinar la expresión analítico-algebraica para simular el comportamiento de la elongación de un sistema de resortes. Para la condición inicial anterior, esta expresión es:

F (x, y) = 3x + 5y + 22

Resultados y discusión

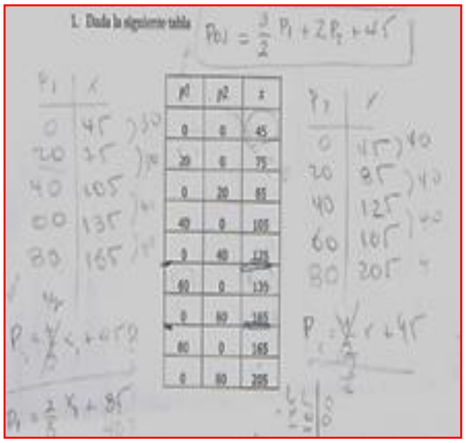
Los resultados se analizan desde el marco socioepistemológico. El análisis de las producciones se lleva a cabo por grupo y por secuencia, de modelación y de simulación.

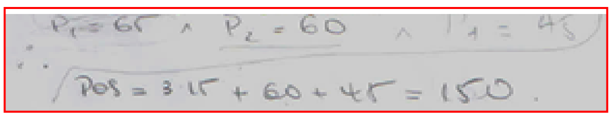
En relación al Momento 2 de la **Secuencia 1: Modelación de la elasticidad de un sistema de resortes,** el Grupo 1 respondió:

  	En el primer porta pesas es 90 mm en el segundo portapesas es de 105 mm, de forma independiente, la posición final del portapesas es de 195 mm (3)$y_a = \frac{3}{2} \cdot 17 + 45 = \frac{51}{2} + 45 = 70{,}5\ mm$ $y_b = 2 \cdot 24 + 45 = 93\ mm$ $93 + 70{,}5 = 163{,}5\ mm$ En su conjunto la posición del indicado es de 163,5 mm

Los estudiantes utilizan el punto medio para predecir, argumentan que 30 grs se encuentra entre 20 y 40. Calculan diferencias Δx=105 -75=30 lo que corresponde a la variación local. Como 30 se obtiene de sumar (20 +40) / 2 y luego lo divide por 2, lo que da 15. De igual modo utilizan la ecuación de la recta para predecir, para ello dejan constante el Peso 2, lo que indica que constantifican. Establecen así el dipolo modélico DM1 **(**elasticidad, tabla de datos**)** el que queda establecido por la articulación “predicción por puntos medios y por la predicción por la ecuación de la recta. Mantienen la forma de predecir en toda la secuencia. Las posiciones se encuentran por separado y se suman, consideran dos veces la posición inicial. Conciben lo bilineal como dos procesos lineales disjuntos.

El grupo 2 responde lo siguiente:





$$Pos = \frac{3}{2}P_1 + 2P_2 + 45$$

P_1	x	
0	45	
20	75	30
40	105	30
60	135	30
80	165	30

P_1	P_2	x
0	0	45
20	0	35
0	20	85
40	0	105
0	40	125
60	0	135
0	60	165
80	0	165
0	80	205

$\frac{1}{3}$

/

$$P_1 = \frac{7}{5}x_1 + 45 \text{ ¿}$$

$$P_2 = \frac{1}{7}x_1 + 45$$

$$P_1 = \frac{2}{3}x_1 + 35 \text{ ?}$$

40 ?

$$P_1 = 65 \ \wedge \ P_2 = 60 \ \wedge \ P_1 = 45$$

$$\therefore Pos = 3 \cdot 15 + 60 + 45 = 150$$

Los estudiantes separan la tabla en dos tablas y calculan las diferencias de elongaciones en cada tabla. Como la diferencia es constante, identifican la relación como lineal, entonces encuentran la ecuación de ambas rectas, calculan las elongaciones, las suman y agregan una vez la posición inicial. Encuentran cuánto se estira el sistema por cada gramo colocado en el portapesas 1 y cuánto se estira por cada gramo en el portapesas 2. Se multiplica el peso 1 por la primera cantidad y el peso 2 por la segunda, luego el resultado se suma junto con la posición inicial.

En síntesis, utilizan la ecuación de la recta para predecir, las posiciones las encuentran por separado y las suman, y, agregan solo una vez la posición inicial. Así conciben lo bilineal, como dos procesos lineales disjuntos al momento de hacer los cálculos. Al encontrar la expresión analítico-algebraica para predecir, ven el sistema como uno solo y se apoyan en la razón de cambio.

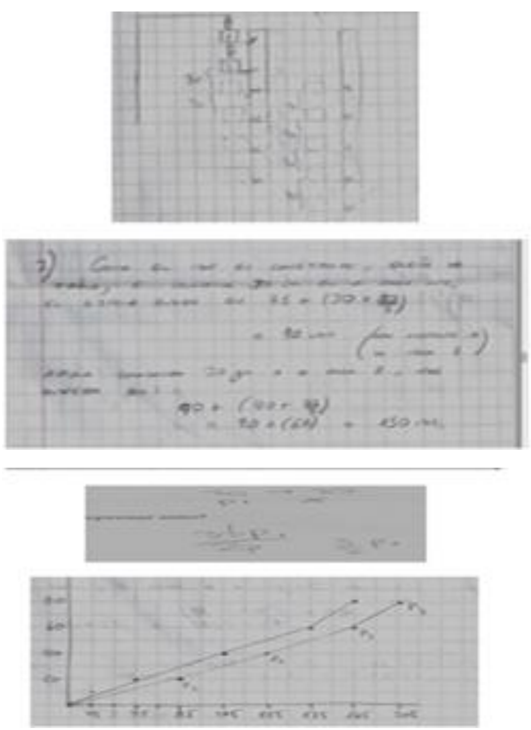
$$x(P_1,P_2)=\frac{\Delta x}{\Delta P_1}P_1+\frac{\Delta x}{\Delta P_2}P_2+x_0$$

Expresión Analítico-Algebraica

La tabla de datos - Razón de cambio y la elasticidad de los resortes conforman un dipolo modélico DM2, **(**elasticidad, tabla-razón de cambio**),** articulados por medio de la expresión analítico-algebraíca, que se constituye en modelo en tanto que se usa para predecir el comportamiento del sistema resortes. La predicción permite el paso de una expresión aritmética a una expresión analítico-algebraica. Establecen así el dipolo modélico DM2

(elasticidad , x=$\frac{\Delta x}{\Delta P_1}P_1$ + $\frac{\Delta x}{\Delta P_2}P_2$ + la posición inicial**)**

Grupo 3 responde como sigue:

	Como e_1 y e_2 constante, suelta la tabla, su constante 30 cm en la pesa n_3, el sistema queda en $45+\left(30+\frac{82}{2}\right)=90\,mm$ (con constante a su son 2) Ahora colocando 30 gr a su cosa 2, solo queda en $$90+\left(40+\frac{82}{2}\right)$$ $$=90+(60)=150\,m$$ $20 \rightarrow 30$ $p_1 \rightarrow x$ $\frac{3bp_1}{2p}$

Los estudiantes construyen un modelo pictórico, de lo que se desprende que en este grupo separan el sistema de resortes en dos sistemas, lo que indica que constantifican una de las variables. Calculan las diferencias de elongaciones en ambos sistemas por separado. Concluyen que a 20 grs le corresponden 30 mm.: Consideran el sistema con la pesa1, 30 grs se encuentra entre 20 grs. y 40 grs., dejando constante el peso 2, es decir, es el valor promedio.

Calculan la diferencia de elongaciones correspondientes a 20 grs. y 40 grs., Δx=105mm - 75mm=30mm. Como el peso de 30grs. se obtiene promediar los pesos de 20 grs. y 40 grs., dimidian la diferencia de elongaciones de 30 mm, obteniendo 15 mm. Luego suman, 45 mm + 30 mm + 30/2 mm = 90 mm. Realizan un procedimiento análogo con el sistema de la pesa 2. Como es un solo sistema, al resultado de elongación del resorte 1 se le suma el resultado de elongación del resorte 2 y obtienen 150 mm.

Al predecir usando el dipolo modélico tabular en el inicio de la secuencia, los estudiantes conciben lo bilineal como dos procedimientos lineales disjuntos. Utilizan al predecir figuración, punto medio y regla de tres. Establecen el dipolo modélico DM1 **(**elasticidad, tabla de datos**).** Al momento de predecir lo que sucede al colocar 30 grs. en cada pesa, dejan de concebir el sistema como dos sistemas disjuntos. Esto se infiere desde el hecho de que no suman dos veces la posición inicial. En esta acción emerge lo bilineal.

No se aprecian intentos por determinar la expresión de la relación analítico-algebraíca entre pesos y elongaciones en el sistema de resortes. Al intentar construir el modelo gráfico vuelven a concebir el sistema como dos sistemas disjuntos.

Producciones estudiantiles grupales y sus análisis en relación a la Secuencia 2. Simulación de la elongación de un sistema de resortes.

GRUPO A
Actividad 1

Al analizar el sistema, en la primera etapa, donde se le agrega, pero sólo al primer resorte, este comportamiento es lineal ya que el resorte n°1 cambiar sin causar cambios en el estiramiento del resorte n°2.

En el caso n°2 el comportamiento que podemos utilizar es no lineal. Ya que el sistema va cambiando tanto en el resorte n°1 como en el n°2 ya que la medida de la flecha cambia con el resorte 1 y 2

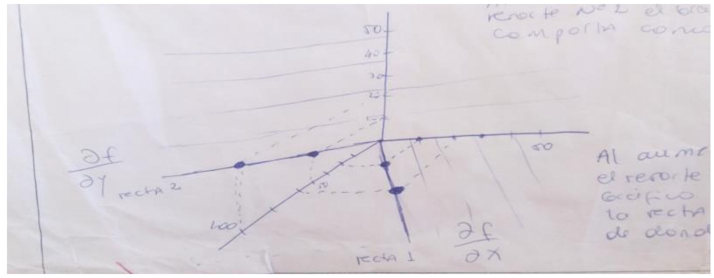
Actividad 2

$$\nabla x = (3,5) \Rightarrow ¿?$$
$$f(x,y) = \nabla x$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = 3 \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} = 5$$

Consideremos que el sistema se comporta de la siguiente forma:
1. Pero en el primer porta pesas la razón de cambio del sistema es 3
2. Pero en el segundo porta pesas la razón de cambio es 5

Representado en:



Al aumentar pero en resorte n°2 el grafico se comporta como la recta 2.

Al aumentar pero en el resorte n°1 el grafico se comporta como la recta 1, dependiendo de donde se comience

Actividad 3

$$P_1 \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad P_2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad cte \quad POS$$

$$33 \cdot 3 + 27 \cdot 5 \pm C = 22$$

$$99 + 135 \pm C = 22$$

$$234 \pm C = 22$$

$$C = 22 - 234$$

$$C = -212$$

El sistema se comporta igual al sistema de la empresa hoja 2, lo que pudimos notar es que el punto de partida respecto a la regla está 212 unidades sobre la posición inicial mencionada en la hoja uno.

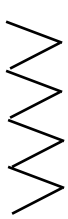
En este grupo se aprecia un razonamiento análogo al esperado y descrito más arriba.

GRUPO B

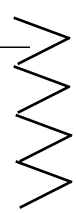
Actividad 1

El modelo se comporta de acuerdo a $f(P_1, P_2) = a \times P_1 + b \times P_2 + c$

Análisis para P_1



X	Y
0	0
15	34,5
22	52
41	91,9



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{1,5} = 2,3 \quad \Delta y = 2,3 \cdot 15 = 34,5$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{19} = 2,1 \Rightarrow \Delta y = 17,5$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{19} = 2,4 \Rightarrow \Delta y = 39,9$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{19} = 2,4 \Rightarrow \Delta y = 39,9$$

Análisis para P_2

X	Y
0	0
34	163,2
40	192,6
55	263,1
76	369,1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4{,}8 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{34} = 4{,}8 \ \Rightarrow \Delta y = 163{,}2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4{,}9 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{6} = 4{,}9 \ \Rightarrow \Delta y = 29{,}4$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4{,}7 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{15} = 4{,}9 \ \Rightarrow \Delta y = 70{,}5$$

Asocian el modelo diferencial con el modelo ordinario, esto se aprecia cuando escriben *el* modelo se comporta de acuerdo a $x\ (P_1,P_2) = a\ P_1 + b\ P_2 + c,$ ", pero perciben lo bilineal como dos modelos disjuntos tal al modelar el sistema, en la respuesta anterior del este grupo, ya que la tabla la separan en dos tablas.En esta respuesta se aprecia el patrón reportado por Cordero (2005) que comienza al utilizar
la razón de cambio para encontrar Δy, y $\frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{1{,}5} = 2{,}3$
así escriben

De lo que se desprende que

Δy= 1,5· 2,3 = 34,5 F(x + dx) – F(x)= F'(x)dx.

De esta manera Calculan las acumulaciones locales una por una.

Actividad 2 : **Simular a partir del Gradiente**

El grupo 1 respondió como sigue :

Sobre la función polinómica= vector

$$\frac{\partial f}{\partial P_1} = \frac{\partial f}{\partial P_2}$$

$$\nabla x = (3{,}5)$$

$$\nabla x = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

P_1 P2

$$\frac{\partial x}{\partial P_1} = 3 \qquad \frac{\partial f}{\partial P_2} = 5$$

El sistema se comporta de forma lineal ya que con respecto a P1 siempre $\frac{\partial x}{\partial P_1} = 3$ y con respecto a P2 $\frac{\partial f}{\partial P_2} = 5$

Debe cumplir dos cosas

1.- El Peso agregado sea constanste

2.- El estiramiento sea fijo

Este grupo1 usa la definición de gradiente para formar un sistema de ecuaciones diferenciales, pero nuevamente separan en dos razones, y analizan cada una por separado, concluyendo que como cada una de ellas es constante, el sistema se comporta en forma lineal, siguen percibiendo lo bilineal como dos modelos disjuntos.

Actividad 3: **Simular a partir de una ecuación diferencial.** El mismo grupo responde:

$$\nabla x = (3{,}5)$$

X(33,27)=32

X(33,27)= a x P_1 + b x P_2 + C = 22

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3 \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 5$$

$$\Delta X = 3\Delta P_1 \qquad \Delta X = 5\Delta P_2$$

$$\Delta P_1 = \Delta P_2$$

$$\Delta X = 3\Delta P_1 + 5\Delta P_2$$

Otra idea relacionada con la pregunta 1

Obtenemos X de las $\frac{\partial f}{\partial P_1}$, $\frac{\partial f}{\partial P_2}$

Dado $\frac{\partial f}{\partial P_1} = 2{,}325$ $\frac{\partial f}{\partial P_2} = 4{,}85$

X(P_1,P_2)= 2,325 x P_1 + 4,85 x P_2 + 0 = 22

X(P_1,P_2)= 2,325 x P_1 + 4,85 x P_2

Utilizan el modelo algebraico de la red ordinaria de lo bilineal, pero no asocian que las derivadas parciales son a y b y que solo falta calcular, las razones de cambio como una fracción que permite calcular las diferencias de pesos

Cuando escriben x (33, 27) = a P_1 + b P_2 + c = 22 se aprecia que usan el modelo algebraico, pero no reemplazan los valores no reconocen que tienen que reemplazar P_1 por 33 y P_2= 27.

En el análisis del momento 1 se constatan las formas de predecir reportadas por Arrieta y Méndez (2006), el punto medio, la regla de tres y la constantificación de una de las variables para así predecir usando la ecuación de la recta. Al comenzar a predecir visualizan la tabla como dos tablas de dos variables cada una en todos los grupos. Aquí se confirma lo reportado por Méndez (2006), con respecto a que lo bilineal se devela en la complejidad de lo lineal.

También se aprecia el fenómeno reportado por Arrieta y Díaz (2016) que es la centración en lo lineal. En dos grupos lo bilineal emerge como dos modelos lineales disjuntos. Compartiendo con Méndez (op. cit., 2006) que el salto de dos a tres variables es complejo, se aprecia que un grupo logra hacerlo al momento de relacionar el fenómeno, razones de cambio y expresión analítico-algebraica, configuran al sistema como un todo. El otro grupo también logra constituir al sistema como un todo a partir de la expresión analítico-algebraica, pero vuelven a separarlo en dos modelos disjuntos al graficar.

El momento 2 reporta el patrón encontrado por Cordero (2005) que asocia la diferencia de dos estados, inicial y final con la derivada, de modo análogo a lo que se manifiesta en un fenómeno de mecánica de fluidos en el que esa diferencia se refiere a la acumulación local. La suma de esas acumulaciones locales constituyen a la integral. Ello confirma la hipótesis del estudio, a saber, que en la práctica de simulación emerge la integral doble.

Conclusiones

Este estudio se propuso reportar evidencias de emergencia de lo bilineal en un curso de modelación de estudiantes de pedagogía en matemáticas. Se estudian sus producciones frente a situaciones que involucra a un sistema de resortes. En las situaciones se exige la práctica de modelar y simular el sistema. Las producciones se analizan deconstruyéndolas para detectar la emergencia de lo bilineal.

Para el campo de la matemática el cálculo de las diferencias es la herramienta que se usa para determinar cuánto cambia la variable en un fenómeno de variación. En la práctica de modelación, los estudiantes dejan en evidencia como procedimiento recurrente a los cálculos de diferencias para dar cuenta de cambios. En relación con la práctica de simulación, el procedimiento de cálculo de diferencias aparece al iniciar la práctica de predecir.

Para dar oportunidad al estudiantado de enfrentar situaciones específicas de variación continua y cambio, las secuencias de modelación y de simulación que se aplicaron consideraban a la predicción como una práctica para cuantificar lo variable, al indagar un estado futuro $f\ (x_0 + h)$ conociendo el estado presente o inicial $f(x_0)$. Se aprecia en las producciones que los estudiantes usan como herramientas para predecir puntos medios, regla de tres y ecuación de la recta.

En el segundo momento de la secuencia relacionada con la modelación, las producciones muestran que los estudiantes construyen modelos y al articular el fenómeno con estos modelos constituyen dipolos modélicos. De esta manera Lo bilineal emerge como dos modelos lineales disjuntos. También emerge la diferencial para predecir en esta práctica de modelación. Se aprecia en uno de los grupos el recurso a la formulación algebraica de una recta para predecir. Otros en su elaboración suman las elongaciones, agregando solo una vez la posición inicial. Esto deja en evidencia que ellos se desplazan desde el trabajo con dos variables a considerar tres variables en juego y buscan una expresión general para la elongación del sistema según los pesos, considerando al sistema como un todo. Uno de los grupos trabaja lo bilineal como dos modelos bilineales disjuntos, utilizan la razón de cambio para predecir y calcular las elongaciones y con la tabla de datos conforman un dipolo modélico, DM2: (elasticidad; tabla y razón de cambio). Calculan la elongación del sistema de resortes para dos pesos,

$$P=3/2*65 + 2*60 + 45$$

En este grupo lo bilineal emerge desde lo lineal: los estudiantes, al calcular las diferencias de cantidades de pesos y de elongaciones, consideran dos tablas por separado y calculan diferencias de elongaciones, para un caso de 30 mm y para el otro de 40 mm. Obtienen entonces las expresiones analítico-algebraicas de dos rectas:

$$P_1=2/3\ x_1 + 45 \qquad \text{y} \qquad P_2 =1/7\ x_2 + 45$$

No obstante estas dos expresiones no se corresponden con la expresión analítico-algebraica que modela al sistema de resortes,

$$X(P_1, P_2) = \frac{\Delta x}{\Delta P_1} P_1 + \frac{\Delta x}{\Delta P_2} P_2 + x_0$$

Considerando la notación de una relación entre dos variables, esta expresión se vincula a su vez con la expresión:

$$\Delta X(\mathrm{P1}, P2) = \mathrm{F}\ (\mathrm{x}+\Delta\mathrm{x},\ \mathrm{y}+\Delta\mathrm{y}) - \mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \approx F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + \text{“algo”}$$

Esta última expresión se corresponde con el diferencial que informa el desplazamiento del resorte afecto a los pesos p1 y p2 a la vez.

Si el desplazamiento es del orden de cero, se tiene que,

$$dF \approx F(x+dx, y+dy) - F(x, y) \approx \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dy + \text{“algo”}$$

En relación con la práctica de simulación se aprecia, en las producciones de uno de los grupos de estudiantes, que la integral emerge desde el significado de acumulación. Utilizan como primera estrategia separar la tabla dada en dos tablas. Ello evidencia que, igual que al modelar, perciben lo bilineal como dos modelos lineales disjuntos. Este grupo utiliza como herramienta la razón de cambio, para encontrar cómo varía la elongación,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{1{,}5} = 2{,}3$$

Calculan el cambio de pesos y lo reemplazan en las diferencias de x, calculan la diferencia de la elongación a través del producto de 1,5 y 2,3.

Al llevar a cabo estos cálculos, los estudiantes modelan el cambio a través de la diferencia en un determinado intervalo, esto significa que calculan las acumulaciones locales usando la expresión

$$F(x + dx) – F(x) = F'(x)dx.$$

La elongación total será la suma de los pequeños cambios modelados por la diferencia.

Así, los estudiantes de pedagogía conforman lo bilineal al modelar/simular la elongación de un sistema de resortes, utilizando para predecir puntos medios, regla de tres, ecuación de una recta y diferencial, en la práctica de modelación. Y simulan con cálculo de diferencias, emergiendo la integral como herramienta para simular.

Referencias

Alanís, J. A. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del Cálculo.* Tesis de doctorado, Cinvestav, México

Arrieta J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula (Tesis de doctorado no publicada). Disertación doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav – IPN, México.

Arrieta y Díaz (2015) Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 22. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, pp. 429-440.

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9 (2) 227-251.

Cantoral (2001 Enseñanza de la matemática en la educación superior Revista Electrónica Sinéctica, núm. 19, julio-enero, 2001, pp. 3-27 Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente Jalisco, México.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4(2), 103 – 128

Cordero, F (2003). Reconstrucción de significados del Cálculo Integral: la noción de acumulación como una argumentación. Ciudad de México, México: grupo Editorial Iberoamérica, 269p.

Cordero (2005) El rol de las categorías de conocimiento matemático en educación superior. Una Socioepistemología de la integral. Relime. Vol.8, Núm. 3, pp. 265-286

Díaz, L. (2005). Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa *8*(2), 145-168.

Dolores, C. (1999). Una introducción a la derivada a través de la variación. Cuadernos Didácticos. Vol 6. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores (2000) Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada, En R, Cantoral. *El futuro el cálculo infinitesimal, ICME-8 (pp155-181)* México Grupo Editorial Iberoamericana.

Farfán, R. M. (1997). Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

García, M. (2015). Construcción de la realidad, Comunicación y vida cotidiana – Una aproximación a la obra de Thomas Luckmann. Intercom – RBCC São Paulo, v.38, n.2, p. 19-38, jul./dez..

Jaramillo, D. (2003). Reconstituição do ideário de futuros professores de Matemática num contexto de investigação sobre a prática pedagógica. (Tese de Doutorado) Universidade Estadual De Campinas, Facultade de Educação

Marcolini, M. y Perales, J. (2005). La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8(1), 25-68.

Martínez, M. (1999) El enfoque sociocultural en el estudio del desarrollo y la educación REDIE. Revista Electrónica de Investigación Educativa, vol. 1, núm. 1, noviembre, 1999, pp. 16-37 Universidad Autónoma de Baja California Ensenada, México

Méndez, M. (2006). *Las prácticas sociales de modelación multilineal; modelando un sistema de Resortes* (Tesis de licenciatura no publicada). Universidad Autónoma de Guerrero, Unidad Académica de Matemáticas, México

Muñoz, G. (1994). Un estudio acerca de la relación entre un sistema nocional y los algoritmos en el cálculo integral. En T. Cordero, M. Murillo &T. Peralta (Eds.), Memoria de la Octava reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de Profesores e investigación en Matemática Educativa (pp.101-106). Costa Rica..

Muñoz, G. (2005a). Dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico relativa a prácticas sociales con Cálculo integral. En J. Lezama, M. Sánchez, J. G. Molina (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18, 597-603. México: Clame A.C.

Muñoz, G. (2005b). Naturaleza de un campo conceptual del Cálculo infinitesimal: una visión epistemológica. En J. Lezama, M. Sánchez, J. G. Molina (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18, 589-595. México: Clame A.C

Ojeda, C. (2001). Francisco Varela y las ciencias cognitivas Revista Chilena de Neuro-Psiquiatría 39(4):286-295.Soc.de Neurología, Psiquiatría y Neurocirugía. Chile

Pulido, R. (2008). De la Regla de Tres a la Ecuación de Continuidad (o la Innovación en la Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo). Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano (pp. 121-142). México: CLAME, Ediciones Díaz de Santos S.A.

Ramírez, M. (2015). Las prácticas de simulación lineal y la emergencia de la integral. Tesis de Magíster en Ciencias, mención Matemática Educativa. Tesis no publicada.

Salinas y Alanís, (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza de cálculo dentro de una institución educativa. Relime, Vol. 2(3), noviembre 2009

Soto, D. y Cantoral, R. (2014) Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una visión Socioepistemológica. Bolema, Rio Claro (SP), V 28, Núm. 50, p. 1525-1544.

Autores

Silvana Margarita Gómez Ojeda

Magíster en Enseñanza de las Ciencias, Mención Didáctica de las Matemáticas y Profesora de Matemáticas por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Candidata a Doctora en Educación Matemática por la Universidad de Los Lagos de Chile.
Profesora del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Chile.
Línea de Investigación: Enseñanza y Aprendizajes de Cálculo desde el Pensamiento y Lenguaje Variacional. E-mail: silvana.gomez@usach.cl.

Leonora Díaz Moreno.

Doctora en Ciencias de la Educación por la Pontificia Universidad Católica de Chile; Magíster en Matemáticas, Magíster en Educación Matemática, Licenciada en Educación Matemática y Profesora de Matemáticas y Computación por la Universidad de Santiago de Chile.
Profesora titular del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Valparaíso.
Líneas de investigación: Modelación en Matemática Educativa, Pensamiento y Lenguaje Variacional, Formación de Profesores. Correo-e: leonora.diaz@uv.cl

Ismenia Guzmán Retamal,

Dra. Docteur en Didactiques des Mathématiques,
Université Louis Pasteur de Strasbourg, Francia.
Profesora Fides et Labor, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
Profesora Titular, Depto. de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos, Chile.
Línea de Investigación: Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática, Formación Docente.
Ismenia.guzman@ulagos.cl