UN ESTUDIO SOBRE EL CONCEPTO DE ESTRUCTURA ALGEBRAICA GRUPO EN SITUACIONES DIDÁCTICAS

Ana Paula Teles de Oliveira
anapaulateles@ig.com.br
Universidade Estadual do Salvador de Bahia (UESB)

Ana Lúcia Manrique
analuciamanrique@gmail.com
Pontifícia Universidade Católica do São Paulo (PUC/SP)

Recibido: 20/04/2018 **Aceptado:** 07/06/2018

Resumen

En este artículo tenemos el objetivo de elaborar y analizar una actividad para la constitución del concepto de estructura algebraica grupo, desarrollándolas junto a participantes de nuestro grupo de investigación. Nuestra revisión de literatura reveló la necesidad de estudios sobre la enseñanza de la estructura algebraica grupo. La complejidad de la abstracción de ese contenido es enorme, por eso, incluso los alumnos que ya cursaron esta disciplina presentan grandes dificultades, o, aún, los conocimientos movilizados por los alumnos fueron, en su mayoría, de carácter operacional. De esta forma, creemos que, para solucionar, o al menos minimizar este problema, hay la necesidad de revisar la manera como ese contenido es organizado. Proponemos, por lo tanto, presentación inicial de ejemplos, seguidos de definición, para así, construir actividades con el objetivo de enseñar el concepto de grupo.
Palabras Clave: Estructura algebraica grupo, Teoría de las Situaciones Didácticas, Design Experiments

A STUDY ON THE CONCEPT OF GROUP ALGEBRAIC STRUCTURE IN DIDACTIC SITUATIONS

Abstract

In this article we have the objective of elaborating and analyzing an activity for the constitution of the concept of algebraic group structure, developing them together with participants of our research group. Our literature review has revealed the need for studies on the teaching of algebraic structure group. The complexity of the abstraction of this content is enormous, so even the students who have already studied these subject present great difficulties, or even the knowledge mobilized by the students was, for the most part, of an operational nature. Thus, we believe that in order to solve or at least minimize this problem, there is a need to review the way this content is organized. We propose, therefore, an initial presentation of examples, followed by definition, in order to construct activities with the objective of teaching the group concept.
Keywords: Algebraic structure group, Theory of Didactic Situations, Design Experiments.

UM ESTUDO SOBRE O CONCEITO DE ESTRUTURA ALGÉBRICA GRUPO EM SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Resumo

Neste artigo temos o objetivo de elaborar e analisar uma atividade para a constituição do conceito de estrutura algébrica grupo, desenvolvendo-as junto a participantes de nosso grupo de pesquisa. Nossa revisão de literatura revelou a necessidade de estudos sobre o ensino de

estrutura algébrica grupo. A complexidade da abstração desse conteúdo é enorme, por isso, mesmo os alunos que já cursaram essa disciplina apresentam grandes dificuldades, ou, ainda, os conhecimentos mobilizados pelos alunos foram, em sua maioria, de caráter operacional. Dessa forma, acreditamos que, para solucionar, ou ao menos minimizar esse problema, há a necessidade de se rever a maneira como esse conteúdo é organizado. Propomos, portanto, apresentação inicial de exemplos, seguidos de definição, para assim, construirmos atividades com o objetivo de ensinar o conceito de grupo.
Palavras-chave: Estrutura algébrica grupo, Teoria das Situações Didáticas, *Design Experiments.*

Introdução

Para refletirmos sobre o ensino de álgebra, citamos o trabalho de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), que discorre sobre o pensamento algébrico abstrato e retrata alguns aspectos considerados imprescindíveis à linguagem simbólica - formal. Os autores afirmam que simbolismo da álgebra é sucinto e possui a capacidade de abreviar o tempo de resolução de uma situação problema com as características do total e da estrutura da situação. Em seguida, retratam a facilidade da simplificação dos cálculos, que culminam com a possibilidade de realização de cálculos com quantidades variáveis, o que demonstra sua relevância.

É importante destacar que, como afirmam Bianchini e Machado (2010), apesar da sua abrangência, a álgebra é um obstáculo enfrentado pelos alunos durante a vida escolar. E, por isso, acreditamos ser pertinente, corroborando com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), a necessidade de repensar o ensino de álgebra.

Como os alunos encontram na álgebra um obstáculo em seu processo de aprendizagem (BIANCHINI; MACHADO, 2010), propomo-nos a elaborar uma pesquisa sobre o tema em nosso doutorado. Para tanto, estabelecemos a estrutura algébrica grupo como objeto. Por se tratar de um conceito abstrato, a estrutura algébrica grupo é evidenciada por sua difícil compreensão, o que favoreceu a seleção do tema do trabalho.

Neste artigo apresentamos parte dessa pesquisa e temos como objetivo *elaborar eanalisar uma atividade para a constituição do conceito de estrutura algébrica grupo*, desenvolvendo-as junto a participantes do grupo de pesquisa "Professor de Matemática: formação, profissão, saberes e trabalho docente".

Esta pesquisa será norteada pela seguinte questão: *Quais são as potencialidades e limitações de uma atividade elaborada a partir da Tábua de Pitágoras para a generalização e a formalização do conceito de estrutura algébrica grupo?*

Este artigo está subdividido em cinco seções. Na primeira seção as pesquisas realizadas por estudiosos brasileiros relacionadas ao tema deste artigo. A segunda seção centra-se no estudo do referencial teórico e do metodológico que norteiam nosso trabalho. Na terceira apresentamos os instrumentos de coletas e os sujeitos. A quarta seção oferece a análise do material coletado. Por fim, apresentamos as conclusões sobre a pesquisa que realizamos.

Revisão de literatura

Para a revisão de literatura realizamos algumas buscas no banco de tese da CAPES e encontramos três pesquisas, Elias (2012), Bussmann (2009) e Alburquerque (2005) relacionadas ao ensino da estrutura algébrica grupo, que auxiliaram no desenvolvimento de nosso trabalho.

A dissertação de Elias (2012), "Dificuldades de estudantes de licenciatura em matemática na compreensão de grupo e/ou isomorfismo de grupos", tem como objetivo identificar e interpretar dificuldades apresentadas por oito estudantes do curso de matemática na Universidade Estadual de Londrina na compreensão de conceitos de grupos ou/e isomorfismo de grupos. Para tanto, o pesquisador elaborou um roteiro com algumas perguntas e realizou entrevistas semiestruturadas para aplicar em estudantes que já haviam estudado os conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos.

Na análise, Elias (2012) identificou 29 dificuldades apresentadas pelos estudantes, sendo que a dificuldade com a definição da estrutura grupo foi a única comum aos estudantes. Ele concluiu, ainda, que todos os alunos apresentaram pelo menos uma dificuldade ligada aos conceitos prévios conjunto e funções.

A dissertação de Bussmann (2009), "Conhecimentos mobilizados por estudantes do curso de matemática sobre o conceito de grupo", tem como objetivo investigar os conhecimentos mobilizados por sete estudantes, participantes de grupos de pesquisa sobre Álgebra e o ensino de Álgebra. Fundamentou-se no trabalho de Anna Sfard (1991), relacionado à formação dos conceitos matemáticos, e declarou que, de acordo com essa pesquisadora, para o desenvolvimento do conceito matemático são necessárias noções abstratas denominadas: operacional (processo) e estrutural (objeto), assim, estabelecendo uma hierarquia em sua formação, classificando-a em três fases denominadas, interiorização, em que o indivíduo familiariza o novo conteúdo; condensação, em que nasce o conceito facilitando as generalizações, comparações e combinações com os outros processos; e reificação, quando o indivíduo consegue transformar um conceito em um objeto.

O instrumento para coleta de dados foi composto por oito questões. Todas as questões foram formuladas e adaptadas a partir de livros de álgebra. Bussmann (2009) concluiu que os conhecimentos mobilizados pelos alunos foram, em sua maioria, de caráter operacional e a concepção estrutural aparece timidamente em algumas questões. Todas as fases ocorreram nos registros escritos, porém se destacou a interiorização e a condensação. Explicou que, em alguns momentos, houve dúvida sobre a fase manifestada e deduziu que esse fato relaciona-se à familiaridade dos alunos com o conjunto apresentado na questão.

A tese de Alburquerque (2005), "O conceito de grupo: sua formação por alunos do curso de matemática", objetiva analisar o conceito de Estrutura Algébrica Grupo entre 18 estudantes matriculados em duas turmas de Álgebra I, no segundo semestre de 2002, do curso de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, *campus* Campina Grande, sendo a pesquisadora docente nessa instituição.

Para essa pesquisa, Albuquerque (2005) fundamentou-se nas teorias de Lev Semenovich Vygostsky sobre a abordagem sócio-histórica com enfoque em formação de conceito, e de Gerard Vergnaud sobre a teoria dos campos conceituais. Os instrumentos para coleta de dados são três sequências didáticas constituídas por questões abertas e situações problema. Algumas das atividades basearam-se em livros. Elas foram aplicadas em três ocasiões distintas durante um período de quatro meses. Em cada sequência os estudantes tiveram dois momentos: o primeiro, no qual escreveram suas resoluções e o segundo, composto por uma entrevista individual sobre as soluções escritas.

Alburquerque (2005) concluiu que há grande dificuldade apresentada pelos estudantes nas soluções escritas, pois eles revelaram um número considerável de soluções inesperadas e incoerentes com as atividades das sequências, que diminuíram após as entrevistas. Relatou que mais da metade dos alunos não domina o conceito de operação binária.

Concluímos, portanto, que as pesquisa Elias (2012), Bussmann (2009) e Alburquerque (2005) revelam a necessidade de estudos sobre o ensino de estrutura algébrica grupo. A complexidade da abstração desse conteúdo é enorme, por isso, mesmo os alunos que já cursaram essa disciplina apresentam grandes dificuldades, ou, ainda, os conhecimentos mobilizados pelos alunos foram, em sua maioria, de caráter operacional. Dessa forma, acreditamos que, para solucionar, ou ao menos minimizar esse problema, há a necessidade de se rever a maneira como esse conteúdo é organizado. Propomos, portanto, apresentação inicial de exemplos, seguidos de definição, para assim, construirmos atividades com o objetivo de ensinar o conceito de grupo. Dessa forma, consideramos que a pesquisa de Bussmann (2009) ao relatar que a familiaridade com o conjunto em estudo pode influenciar as fases e o resultado, orienta-nos na escolha de grupos com conjuntos diferentes. A partir das dificuldades em operação binária encontrada em Alburquerque (2005), sentimos a necessidade de trabalhar outros conceitos envolvidos na estrutura algébrica grupo.

Referencial Teórico e Metodológico

A orientação teórica para a persecução do objetivo deste estudo são as noções de situações didáticas propostas por Brousseau (1997), que a partir de anos de pesquisa organizou os conceitos da denominada Teoria das Situações Didáticas (TSD) e propôs uma teoria sobre o processo de aprendizagem. Dessa forma, apresenta a TSD ao estabelecer as relações implícitas e explícitas entre aluno e professor em um *milieu*[1] com o objetivo de possibilitar um saber matemático. O conjunto dessas relações estabelecidas denomina-se situações didáticas.

Brousseau (2006) faz distinção entre o conhecimento e o saber e explica que o conhecimento é tudo aquilo que uma pessoa coloca mentalmente em funcionamento quando reage ao ato de conhecer. Por outro lado, o saber é chamado de sabor dos conhecimentos, pois trata da maneira que indivíduo identifica, expressa e institucionaliza o conhecimento espontâneo, apresentando, assim, a forma cultural dele. Relata, ainda, que se um conhecimento não for traduzido em saberes será facilmente esquecido. Assim, resume que o papel do professor é desencadear o surgimento de conhecimentos e de saberes nos alunos através de problemas e que o trabalho do aluno pode simular características de um trabalho científico.

Após a escolha do problema pelo professor, o próximo passo constitui em entregá-lo ao aluno. A partir de então, Brousseau (1997) explica que existem situações didáticas distintas, denominadas: ação, formulação, validação e institucionalização.

Segundo esse pesquisador, no momento em que recebe um problema, o aluno manifestará alguns conhecimentos ao interagir com o cenário ou com parte da situação, mas, ao agir sobre ele, podem surgir expectativas capazes de se alterarem a partir do conhecimento. A aprendizagem consiste nessa mudança. Isso é denominada de ação.

[1]Maranhão (2009) explica que, em português, o termo *milieu* se aproxima de cenário, portanto, em nosso trabalho, ao empregarmos "cenário" ou sinônimos, referimo-nos ao significado dado a palavra francesa.

Brousseau (1997) explica que no momento da ação, os alunos podem mudar seus conhecimentos implícitos. Para tanto, esse conhecimento é reconhecido, identificado, decomposto e reconstruído em um sistema. Assim, o aluno concebe uma formulação inicial, que pode ser real ou fictícia, sendo muitas vezes explicitada ou explicada, para que continue a resolver o problema. Essa situação é denominada de formulação.

Para o pesquisador, é imprescindível assegurar que os conhecimentos mobilizados pelo aluno nos sistemas de ação e de formulação sejam relevantes, adequados e adaptados. Para isso, é necessário que haja o ato de modelar, o que pode ocorrer no momento em que o aluno transmite suas conclusões. Ao explicitar, deve-se mostrar o modelo e justificar e os que estão ouvindo poderão aceitar ou rejeitar esse modelo, apresentando os motivos para tal. Essa situação é denominada de validação. Na última situação didática, denominada institucionalização, o professor descreve que existe um saber reconhecido pelos meios acadêmicos, sociais e culturais por meio de identificação, organização, validação e utilização.

Para que sejam adequadas, Brousseau (1997) salienta que existem condutas do docente e dos seus discentes que devem ser previstas na elaboração do conjunto de situações didáticas, pois tais condutas podem diferir quando se comparam certas instituições escolares. A totalidade dessas condutas, que, na maioria das vezes, são implícitas, é denominada contrato didático.

Adotamos aspectos da Teoria das Situações Didáticas para o embasamento teórico de nossa pesquisa porque ela apresenta uma preocupação com as situações didáticas, o saber e o contrato didático. A seguir, discorremos sobre como essa teoria relaciona-se com nossa pesquisa.

Ao falarmos sobre a estrutura grupo, destacamos o saber, fato presente na estrutura do componente curricular álgebra. Ela é apresentada em alguns livros didáticos da mesma maneira como foi organizada por matemáticos. Referimo-nos ao saber, pois observamos que existe a necessidade de se fazer com que o conceito de estrutura algébrica grupo seja apresentado de maneira diferente, uma vez que as pesquisas de Alburquerque (2005), Bussmann (2009) e Elias (2012) revelam que os alunos apresentam dificuldades nesse conteúdo, mesmo durante o curso de graduação. Por ser complexa, a abstração pode ser um indício do por que as dificuldades surgem em tão pouco tempo.

Buscamos, então, verificar se nos encontros para realização das atividades elaboradas as situações didáticas propostas por Brousseau surgem no sentido de que passem por esse movimento de ação, formulação, validação e institucionalização. Referirmo-nos ao contrato didático porque as condutas de todos os que estão participando de nossa pesquisa foram negociáveis.

Dessa forma, a TSD foi de grande importância para o embasamento de nosso trabalho, para que de fato possamos encontrar caminhos para o ensino e aprendizagem da estrutura algébrica grupo.

Sentimos falta de alguns aspectos teórico-metodológicos relacionados ao que pretendemos investigar. Por isso, decidimos aprofundar certos princípios de uma metodologia denominada *Design Experiments* ou *Instructional Design.*

De acordo com Brown (1992), a partir da década 1970, seus trabalhos focalizaram o estudo do aprendizado em sala de aula, empregando alguns princípios de metodologia qualitativa e quantitativa e algumas teorias de aprendizagem, como de Vygotsky.

Segundo Cobb et al. (2003), o termo *Design Experiments* frequentemente é associado aos pesquisadores Ann L. Brown e Allan Collins. Eles explicam que essa metodologia tem auxiliado teorias de ensino por mais de um século e fornece condutas para o desenvolvimento de novas teorias, envolvendo assim tanto a aprendizagem, como o estudo do contexto dessas formas de aprendizagem com a finalidade de sustentá-las. Para tanto, o contexto está sujeito a testes e revisões e a interações sucessivas. Esses autores delineiam cinco características dessa metodologia. São elas:

- Finalidade do projeto: ao saber qual é a finalidade do projeto pode-se delinear o que vai ser observado, usado etc. Dessa maneira, o projeto inicial será formulado para ser aplicado a uma nova experiência e a nova forma de aprendizagem é visto de forma mais geral, para uma análise teórica.
- Natureza altamente intervencionista.
- Possuem duas faces: a prospectiva e a reflexiva. Na prospectiva,a partir de hipóteses mentais sobre o processo de aprendizagem e os meios de sustentá-las, os projetos são implementados. Na reflexiva, as análises são feitas em vários níveis, em que conjecturas iniciais sobre o processo de aprendizagem são testadas. Durante o processo, se as conjecturas iniciais forem refutadas, outras podem ser formalizadas e testadas.
- Desenho característico e interativo: o processo de geração de conjecturas e análise e, quando necessário, o desenvolvimento de novas conjecturas para serem submetidas a teste, resultam em um processo iterativo com ciclos de invenção e revisão.

- Enfatizar um escopo teórico intermediário: apesar de estar em um contexto específico, o projeto não leva para contingências particulares, tendo assim, uma amplitude de possibilidades de orientações.

Cobb et al. (2003) relatam que para que essa análise seja feita cuidadosamente, há a necessidade de existirem variadas formas para a obtenção de dados, dependendo do ambiente em que esteja ocorrendo a pesquisa.

Ao olharmos o trabalho de Collins e Berge (2006), encontramos um modelo para essa metodologia, que é denominado modelo *design*. Esses pesquisadores salientam que esse modelo pode ser utilizado independente do tempo do curso, ou ainda, do próprio curso, pois a única exigência é que se obtenham os resultados através das avaliações. O resultado da avaliação é um dos quatros componentes do processo educacional para esses autores. Os componentes são: definição das metas educacionais; o que fazer para atingir as metas; verificação de quais metas foram cumpridas por meio dos resultados obtidos na avaliação; e fazer alterações nas ações com a finalidade de atingir as metas.

Para os autores, primeiramente é necessário saber qual é o objeto da aprendizagem. Depois, eles apresentam os tópicos importantes do modelo, que são os Resultados de Aprendizagem, os Recursos de Aprendizagem do Curso, as Atividades de Aprendizagem / Prática, a Avaliação e o Tema de Discussão.

Portanto, ao olharmos a metodologia *Design Experiments,* observamos que a característica peculiar é de melhorar a proposta inicial, a partir de análises durante todo andamento da pesquisa.

Essa metodologia foi escolhida, pois não conseguimos atividades diferenciadas sobre a estrutura algébrica grupo. Dessa forma, elaboramos atividades que foram avaliadas a partir das resoluções escritas e informações dos sujeitos, gravações realizadas e nossas observações. Depois da reflexão, foram realizadas alterações nas atividades, se necessárias, seguidas de nova aplicação e nova avaliação, criando, assim, um ciclo durante toda a pesquisa. Para esse processo utilizamos várias formas de coleta de dados, como gravações em áudio, observações e registros escritos pelos sujeitos.

Muitos aspectos da metodologia *Design Experiments* auxiliaram-nos, primeiramente, na concepção do projeto inicial, por viabilizar que, caso necessário, o processo fosse alterado durante seu desenvolvimento; depois, na elaboração, análises e aprimoramento das atividades, por considerarmos as análises prospectivas e reflexivas apontadas nessa metodologia; e na forma da aplicação das atividades e na coleta de dados, por possibilitar alterações para alcançarmos nossas metas.

Sujeitos e Instrumentos de Coleta

Cinco professores matriculados nos cursos de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP constituíram o grupo de sujeitos de nossa pesquisa. Escolhemos esses sujeitos, primeiramente, por acreditarmos que professores ao escolherem realizar um curso de Pós-Graduação em Educação Matemática têm interesses relacionados ao ensino de matemática. Assim, entendemos que poderiam fornecer sugestões, ou seja, serem uma fonte de dados, considerando a metodologia *Design Experiments*, utilizada nesta pesquisa. Por outro lado, as pesquisas de Alburquerque (2005), Bussmann (2009) e Elias (2012) sugerem que os alunos apresentam dificuldades no conceito de estrutura algébrica grupo, mesmo após concluírem seus cursos de graduação. Dessa forma, supomos que nossos sujeitos participariam das atividades como pessoas que aprenderiam esse conceito por meio das nossas atividades.

Com o objetivo de promover interação entre os participantes, formamos duas equipes. As atividades foram aplicadas em horários diferentes das aulas desses sujeitos, das reuniões do grupo de pesquisa e das reuniões do programa.

Inicialmente, enviamos um *e-mail* para todos os participantes do grupo de pesquisa, para explicar a relevância de nosso estudo e convidá-los a participarem, em seguida, conversamos pessoalmente com eles. Após esses contatos, cinco demonstraram interesse em participar. Para preservação da identidade de cada participante, eles foram identificados com os seguintes nomes fictícios: Maria, Márcia, Carlos, Claudia, Caio.

Todos os participantes foram submetidos ao mesmo questionário, a fim de obtermos características acadêmicas e profissionais e, quando necessário, conversarmos pessoalmente ou pelos meios de comunicações disponíveis.

Ao considerarmos as características acadêmicas, observamos que se formou uma equipe heterogênea, pois os cursos de graduação eram de Licenciaturas em Matemática, Pedagogia e Construção Civil. Dentre os cincos participantes três possuíam o título de mestres, e os cursos eram distintos, como Psicologia da Educação, Educação para a Saúde e Meio Ambiente e Educação Matemática. Por isso, acreditamos que, possivelmente, dos professores que estudaram licenciatura em matemática, poucos se lembrarão de conteúdos do componente curricular álgebra.

Ao considerarmos a atuação profissional concluímos que nenhum professor lecionava o componente curricular álgebra no ensino superior. A chance dos participantes de nossa pesquisa ter afinidade com os conceitos de estrutura álgebra grupo diminuiu.

Decidimos aplicar as atividades com pelo menos dois professores de cada vez. Isso porque, com a metodologia escolhida, seriam necessárias diferentes equipes para o aprimoramento das atividades e, também, ser interessante a interação entre os participantes, uma vez que seria outra fonte de dados. Dessa forma, realizamos um levantamento dos horários disponíveis para a formação das equipes e, a partir da disponibilidade, organizamos duas equipes.

A equipe formada por Maria e Márcia encontrava-se às segundas-feiras das 12h às 14h. Nenhuma das componentes tinha cursado Licenciatura em Matemática. A equipe formada por Carlos, Claudia e Caio não tinha horário fixo, mas as reuniões ocorreram às segundas-feiras, em horários distintos da equipe anterior. Todas as reuniões foram presenciais. Todos os encontros ocorreram no segundo semestre de 2015.

As atividades

Inicialmente elaboramos três atividades para a realização da coleta de dados.

Denominamos Atividade A a elaborada a partir dos conjuntos numéricos, mais precisamente da Tábua de Pitágoras. Ela é utilizada nos anos iniciais do ensino fundamental para ensinar multiplicação, por isso acreditamos que poderia ser aproveitada para se trabalhar conhecimentos necessários para alcançarmos nosso objetivo. Com essa tábua é trabalhado o conjunto finito {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} com a operação binária multiplicação. Apesar de não ser um exemplo da estrutura grupo, existem algumas propriedades dessa operação necessárias para essa estrutura. Assim, podemos trabalhar propriedades da multiplicação como comutatividade e existência de elemento neutro, além de características razões que fazem com que esse conjunto, junto à operação multiplicação, não seja um grupo.

Como fizemos as alterações das atividades a partir da metodologia *Design Experiments*, utilizamos números para indicar a nova atividade. Dessa forma, a Atividade A.1 é a atividade que foi alterada após análise da face reflexiva da Atividade A.

Outros instrumentos de coleta de dados

Uma parte importante da pesquisa é o desenvolvimento, pois é a partir dele que conseguiremos chegar às conclusões. Concordamos com Lüdke e André (1986) de que a mente humana é altamente seletiva e, por isso, duas pessoas que olhem um mesmo objeto ou estejam em uma mesma situação enxergam coisas diferentes, influenciadas pela história pessoal e bagagem cultural que carregam. Esses fatores fazem com que a atenção se concentre em determinados aspectos da realidade e se afaste de outros.

Diante disso, ao utilizarmos a observação como uma fonte de coleta de dados, como proceder para que ela seja um instrumento válido e fidedigno de investigação científica? Lüdke e André (1986) destacam a necessidade de um planejamento cuidadoso do trabalho e um preparo do observador, uma vez que ele precisa se organizar para o "do que" e "o como" observar a partir do objetivo proposto inicialmente. Diante de nosso objetivo, concordamos com essa argumentação, pois, assim, a atenção a aspectos que fogem ao nosso objeto de pesquisa será reduzida.

Lüdke e André (1986) afirmam que a observação ocupa um lugar privilegiado nas pesquisas, sendo um dos principais métodos de investigação e coleta de dados, pois possibilita um contato pessoal e estreito do pesquisador e o fenômeno pesquisado. Essa proximidade faz com que se verifique a ocorrência desse fenômeno, recorra aos conhecimentos pessoais como auxiliares do processo de compreensão e interpretação do fenômeno e chegue mais perto nas perspectivas dos sujeitos.

Essas autoras explicam que existem variações nos métodos de observação considerando-se o grau de participação, uma das quais é denominada de observação participante. Aqui o pesquisador além de observar, envolve-se de forma ampla com o contexto estudado.

Observamos os sujeitos enquanto realizavam as atividades e fizemos questionamentos com a finalidade de entender a lógica do pensamento deles e, ainda, direcioná-los para que se alcançasse o objetivo proposto. Assim, as indagações não eram fixas, dependiam da equipe, da atividade e de nossa observação. Como se tratava de uma estratégia em todos os encontros, acreditamos que nesse trabalho tivemos a observação participante, visto que além de observarmos diretamente, havia, ainda, a interação entre os componentes da equipe.

Quando Lüdke e André (1986) retratam a relevância da observação como um método de coleta de dados, explicam que o observador deve iniciá-la buscando sempre manter uma perspectiva de totalidade, sem se desviar demasiado de seus focos de interesse. Além disso, salientam a necessidade do registro, e assim, exemplificam que podem ser anotações escritas, filmes, fotografias, slides ou por meio de outros equipamentos.

Em nossa pesquisa, observamos a aplicação das atividades e fizemos os registros. Em alguns momentos os registros foram realizados simultaneamente a observação e em outros logo após.

Ao aplicarmos as atividades didáticas a uma equipe de sujeitos, gravamos as ações deles e a nossa, possibilitando um levantamento de dados mais minucioso do que seria possível se partíssemos somente de nossa observação.

Com o objetivo de saber a opinião dos participantes da pesquisa, orientamos que cada um fizesse registros de sua opinião e sugestões sobre a atividade que realizaram. De acordo com Tozoni-Reis (2009), o questionário é um conjunto de questões pré-definidas e sequenciais apresentado aos entrevistados e exigem alguns cuidados no momento da elaboração: a clareza sobre o que se quer e deve obter, e as perguntas precisam ser claras ao entrevistador, permitindo a sua compreensão. O autor propõe, também, que seja elaborado com uma estrutura lógica e sequencial, com clareza, simplicidade, coerência e precisão, para obter respostas curtas.

O questionário teve como objetivo apresentar as características acadêmicas e atuações profissionais dos sujeitos, principalmente, a relação entre os sujeitos com a estrutura algébrica grupo. Dessa forma, perguntamos qual foi o curso de graduação, a sua duração e o ano de conclusão para sabermos se estudaram, e caso afirmativo, quando estudaram a estrutura algébrica grupo. Em relação à atuação profissional, indagamos sobre as atividades que exerceram e se lecionavam, além de informarem em quais disciplinas, em qual nível e o tempo que exerceram a profissão, em questionário que responderam individualmente.

Resultados e Análises

A seguir apresentamos de que maneira os aspectos da metodologia *Design Experiments* foram empregados na Atividade A. Além do mais, analisamos os encontros com o objetivo de identificar se surgiram as situações didáticas propostas por Brousseau.

Atividade A

Iniciamos a apresentação dos resultados com a face prospectiva. Assim, para a elaboração das atividades, baseamo-nos em reflexões relacionadas ao conhecimento prévio dos sujeitos e em exemplos apresentados em livros didáticos. A partir de então, observamos que Garcia e Lequain (2002), Gonçalves (2003) e Heirstein (1970) apresentam exemplos com conjuntos numéricos e uma operação. Dessa forma, consideramos a possibilidade de se trabalhar com um conjunto e uma operação binária com suas propriedades. Fizemos várias pesquisas e encontramos um tema que nos chamou a atenção, a Tábua de Pitágoras e assim elaboramos uma atividade a partir dela.

Ao elaborarmos a Atividade A, propomos os seguintes objetivos:

- A partir da Tábua de Pitágoras verificar as propriedades da multiplicação.
- Generalizar os conceitos do item anterior em diferentes conjuntos com diferentes operações.

Supomos que a partir das discussões poderiam aparecer questionamentos relacionados à operação binária, a operação fechada e elemento neutro. Sendo assim, no Quadro 1, expomos nossa proposta para a Atividade A:

Quadro1: Atividade A na face prospectiva

Atividade A

1) Você conhece a Tábua de Pitágoras? Ela consiste em um quadro em que a primeira linha e a primeira coluna são os números de 1 a 10, e a interseção entre a linha e a coluna são os resultados da multiplicação dos números correspondentes. Preencha a tábua.

Tábua de Pitágoras

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

2) Escreva diferentes multiplicações que possuam o mesmo produto.

3) O que acontece em cada uma das colunas?

4) Quais as relações encontradas entre duas colunas? Represente algebricamente.

5) Quais as diferenças e semelhanças, se ao invés de colunas colocarmos linhas nas questões 3? Ou no lugar de linhas colocarmos colunas na questão 4?

6) Quais as características dos números que estão na diagonal principal?

7) Como encontrar um resultado de uma multiplicação que não está na tábua?

Fonte: Oliveira (2017, p. 70)

A seguir apresentamos a face prospectiva, em cada questão:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

1) Discutir as propriedades da operação multiplicação: a comutatividade, a existência do elemento neutro e a associatividade. Por exemplo, 2 x 3 = 3 x 2 = 1x 6 = 6 x 1.

2) Coluna do 1: 1 é o elemento neutro, assim os elementos dessa coluna são os números de 1 a 10.

   Por exemplo, colunas do 2, 4 e 6: Só existem números pares.

   Por exemplo, colunas 1, 3 e 5: Um resultado é ímpar e outro é par. Discussão quando a multiplicação é uma operação fechada.

3) Sobre a relação de duas colunas, podemos dizer que as colunas de números pares, por exemplo colunas do 4 e 6, apresentam como valores o dobro dos valores das colunas, no exemplo das colunas 2 e 3, respectivamente.

   Seja $p = 2n,\ n \in N$, então os valores da *coluna p = 2. valores da coluna n*.

   Apesar de a propriedade distributiva não ser necessária na estrutura grupo, consideramos que essa poderia aparecer em, por exemplo: A soma dos valores das *colunas 2 e 3* resulta nos valores da *coluna 5*. Trabalhar a distributiva da multiplicação em relação à adição.

   Seja $n = r + s$, então os valores da *coluna m.n = coluna m.coluna r + coluna m.coluna s, com m, r, s* $\in \{1, \ldots , 10\}$. Assim, consideramos que seria possível começar o trabalho com a linguagem algébrica.

4) Não há diferença pela propriedade da comutatividade. Por exemplo: A linha 1 é o elemento neutro, assim os elementos dessa linha são os números de 1 a 10.

5) Os números da diagonal principal são quadrados perfeitos (n^2). Pode-se falar que a operação multiplicação é binária e verificar operações que não são binárias.

6) A partir das propriedades associativa, comutativa e distributiva da multiplicação, pode-se encontrar valores que não estão na tábua. Por exemplo: pelas propriedades associativas e distributiva tem-se que 12 x 5 = (4 + 8) x 5 = (4 x 5) + (8 x 5). Assim, embora 12 x 5 não está na tábua, temos que 4 x 5 e 8 x 5 estão.

Esperávamos que essa atividade possibilitasse o movimento das situações didáticas de ação, formulação, validação e institucionalização. Em relação aos conteúdos, propusemo-nos a trabalhar primeiro essas propriedades e, em seguida, o conceito da estrutura algébrica grupo.

O encontro da equipe composta por Carlos, Claudia e Caio

Apresentamos a face reflexiva da Atividade A, a primeira aplicada para a equipe formada por Carlos, Claudia e Caio. Eles iniciaram preenchendo a Tábua de Pitágoras, o que exigiu um tempo. A atividade inicia-se com a situação didática de ação.

Ao encontrarem diferentes multiplicações que possuíssem o mesmo produto, observamos que os exemplos escolhidos tinham a propriedade comutativa e o elemento neutro da multiplicação. Consideramos que o trabalho estava sendo mecânico. Então, começamos a inquiri-los. O primeiro questionamento foi em relação à maneira como os resultados estavam posicionados em relação à diagonal. Os participantes discorreram sobre simetria e sobre a propriedade comutativa. Observamos aqui que não existiam dificuldades relacionadas a essa propriedade.

Depois indagamos sobre o elemento neutro e cada um expôs o que se lembrava sobre essa propriedade. Claudia perguntou se era o número um. Levamos a questão aos demais que concordaram. Carlos concordou que se tratava do número um, porém afirmou existirem outros exemplos. Caio contribuiu ao dizer que o número zero também é um elemento neutro. Nessa discussão, parece surgir a situação didática de formulação. Após a discussão, pedimos que escrevessem como definiriam essa propriedade em um conjunto qualquer. Apresentamos no Quadro 2 as respostas de Claudia e Caio, que escolhemos por se mostrarem distintas uma da outra.

Quadro 2: Definição de elemento neutro em um conjunto elaborado por Claudia e Caio

Nome	Resposta
Claudia	Qualquer nº multiplicado por 1 resulta nele mesmo.
Caio	Chamamos de elemento neutro (e), o elemento onde para $\forall$ elemento c, dentro do conjunto dado, vale a relação: $e \circ c = c$ e $c \circ e = c$

Fonte: Oliveira (2017, p. 82)

Claudia escreve sobre o número um, que é o elemento neutro do conjunto apresentado na Tábua de Pitágoras, reforçando, assim, o exemplo que havia exposto. Por outro lado, vemos que Caio utiliza a definição de um elemento neutro em um conjunto genérico, raciocínio também seguido por Carlos. Para escrevê-la, utilizam os símbolos matemáticos que são convencionalmente empregados nos livros. Após a elaboração, vimos que havia duas posições distintas, uma focada no exemplo concreto e o outro na generalização desse conceito. Acreditamos que uma situação didática de validação surgiria no momento que lessem sua definição. Dessa forma, propusemos que cada um lesse o que escrevera. Após a leitura perguntamos quais eram as diferenças, as semelhanças, e se falavam do mesmo assunto. Observemos as respostas no Quadro 3.

Quadro 3: Diálogo em que se inicia a validação da formalização do elemento neutro

Claudia: O número 1 é o *e* que vocês escreveram? Carlos: Isso, pois depende do conjunto e da operação. Claudia: Então escrevemos a mesma coisa, só que de maneiras diferentes? Caio: Se lembra que eu falei que o número zero também era um elemento neutro? Claudia: Sim. Caio: Isso porque ele é o elemento neutro em relação à adição. Carlos: Será que eu posso ir à lousa para explicar? Pesquisadora: Fique a vontade.

Fonte: Oliveira (2017, p. 83)

No início Claudia ficou em dúvida, contudo, ao observar as explicações de Carlos e Caio, concluiu que a definição apresentada pelos colegas era o elemento neutro de um conjunto qualquer. No momento em que Carlos vai à lousa e explica, surge a situação didática de institucionalização, pois aproveitamos a sua explicação para conceituar o elemento neutro em um conjunto.

Na terceira questão, quando se fez necessário verificar o que ocorria em cada coluna, surge à operação adição, retratado no Quadro 4.

Quadro 4: Diálogo em que surge a operação adição

Claudia: Isso é fácil. Uma coluna é a soma das outras colunas. Carlos: Será? Caio: Como assim?

Fonte: Oliveira (2017, p. 84)

No momento em que Claudia fala sobre adição, aparece uma dúvida. Parece que o conhecimento, tanto de Carlos como de Caio, em relação à Tábua de Pitágoras seria insuficiente ou, até mesmo, inexistente, sendo necessária à verificação dessa afirmação. Dessa forma, Caio e Carlos optaram por verificar se realmente isso ocorre a partir da tábua que possuem, como confirmado no Quadro 5.

Quadro 5: Diálogo em que se inicia a verificação de que uma coluna é a soma de outras duas

Caio: A coluna do número 3 pode ser encontrada adicionando a coluna do número 1 com a coluna do número 2. Carlos: A coluna do número 4 é a soma das colunas do número 1 e a do número 3.

Caio: Parece que realmente é válido. Claudia: Mas é válido. Carlos: Vejamos mais um pouco. Caio: A coluna do número 4 é também a soma da coluna do número 2 com o número 2. Carlos: Então temos mais de uma possibilidade.

Fonte: Oliveira (2017, p. 84)

A discussão sobre esse assunto foi extensa, uma vez que os participantes conferiam cada uma das colunas e todas as possibilidades da tábua (10 x 10). Sabíamos que a possibilidade apresentada por eles é válida empregando a propriedade distributiva, contudo ninguém fez referência a ela. Resolvemos intervir com a finalidade de focalizar na operação de multiplicação, como apresentamos no Quadro 6

Quadro 6: Diálogo em que iniciamos o questionamento para tentar focalizar a multiplicação

Pesquisadora: E a coluna do número 1? Claudia: A do número 1? Pesquisadora: Isso. Também é a soma de quais colunas? Caio: Como assim? Pesquisadora: Vocês concluíram que uma coluna é a o resultado da adição de pelo menos duas colunas. Eu quero que vocês me expliquem a coluna do número 1. Carlos: Vamos verificar. Claudia: A coluna do número 1 é adição do número zero? Pesquisadora: Mas existe uma coluna do número zero? [...] Claudia: Não existe uma coluna do número zero porque não é necessária, pois todo número multiplicado por zero, dá zero.

Fonte: Oliveira (2017, p. 85)

Mesmo indagando sobre como resultaria a coluna do número 1, a explicação foi que era a soma desta coluna com o número zero. Esperávamos que alguém chegasse a uma conclusão relacionada à multiplicação, porém não foi o que ocorreu. Percebemos que o tempo do encontro estava se encerrando e a discussão ainda centrava-se na adição, por isso interferimos lembrando que se tratava da tábua de multiplicação e indagamos se eram capazes de observar alguma propriedade relacionada a essa operação, o que se revelou uma tentativa frustrada.

Ao elaborarmos essa atividade esperávamos movimentos entre as situações didáticas nas discussões sobre as propriedades da operação multiplicação e generalizações. Ao aplicarmos a Atividade A, não detectamos dificuldades na propriedade comutativa nem observamos situações didáticas de formulação, validação e institucionalização. Outra limitação em relação a essa atividade é que a discussão não focou somente na operação de multiplicação. Houve prejuízos nas discussões sobre operação binária, operação fechada e outros conceitos envolvidos na estrutura algébrica grupo.

Apesar das limitações dessa atividade, constatamos que a partir do encontro para sua realização foi possível constatar as situações didáticas de ação, formulação, validação e institucionalização quando trataram sobre o conceito do elemento neutro. Assim, reelaboramos essa atividade, denominando de Atividade A.1, buscando conseguir que ela promovesse essas situações didáticas, principalmente, a institucionalização do conceito estrutura grupo.

Atividade A.1

Na face reflexiva da Atividade A, levamos em consideração o trabalho que os sujeitos tiveram para realizar os cálculos, pois percebemos que não houve tempo para discussão de tudo o que foi previsto. Dessa forma, iniciamos a face prospectiva da Atividade A.1.

Constatamos que a Tábua de Pitágoras poderia ser entregue preenchida. Observamos que provavelmente as propriedades de comutatividade e elemento neutro da multiplicação são assuntos dominados pelos sujeitos. Sendo assim, propomo-nos trabalhar as propriedades da operação em conjunto com a estrutura grupo.

Como o objetivo consistia em chegar ao conceito da estrutura grupo, colocamos um exemplo de grupo com a operação multiplicação a fim de se comparar as propriedades e diminuir a possibilidade de discussões relacionadas à adição de colunas. Com todos esses aspectos em mentes, na Atividade A.1 propomos os seguintes objetivos:

- A partir da Tábua de Pitágoras verificar as propriedades da multiplicação necessária a estrutura algébrica grupo.
- Generalizar os conceitos do item anterior em diferentes conjuntos com diferentes operações.
- A partir da Tábua 1 verificar a propriedade de elemento inverso em relação à operação de multiplicação.
- Distinguir a Tábua 1 como grupo e a tábua de Pitágoras como um contraexemplo de grupo.

Esperávamos que a partir das discussões aparecessem questionamentos relacionados a conceitos como operação binária, operação fechada, elemento neutro, elemento inverso. Sendo assim, propusemos o seguinte para a Atividade A.1:

Quadro 7: Atividade A.1 na face prospectiva

Atividade A.1
Você conhece a Tábua de Pitágoras? Ela consiste em um quadro em que a primeira linha e a primeira coluna são os números de 1 a 10 e a interseção entre a linha e a coluna são os resultados da multiplicação dos números correspondentes.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Tábua de Pitágoras

1) Circule diferentes multiplicações que possuam o mesmo produto. Como os resultados comuns estão posicionados em relação à diagonal?
2) Se comutar a posição da linha com a posição da coluna o que acontece com a multiplicação? Generalize esse fato.
3) O que acontece na interseção entre a linha do número 1 e as outras colunas? E a interseção entre a coluna do número 1 e as outras linhas? Generalize esse fato.
4) A generalização da questão 2 e da 3 vale na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**? Justifique sua resposta.

X	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Tábua 1

5) Quais as diferenças entre a Tábua de Pitágoras e a **Erro! Fonte de referência não encontrada.**?
6) Um conjunto com uma operação binária fechada é um grupo se a operação é associativa, possui elemento neutro e possui elemento inverso. O conjunto {1,-1} com a operação multiplicação é grupo? Justifique sua resposta.
7) O conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} com operação multiplicação é grupo? Justifique sua resposta.

Fonte: Oliveira (2017, p. 87)

A seguir apresentamos a face prospectiva de cada questão da Atividade A.1:

1. Trabalhar o conceito de comutatividade na multiplicação e a simetria em relação a diagonal.
2. Generalizar o conceito da comutatividade dos elementos de um conjunto em relação a uma operação.
3. Distinguir o número 1 como o elemento neutro no conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} em relação à multiplicação. Conceituar o elemento neutro de um conjunto com uma operação.
4. Identificar que as propriedades de comutatividade e elemento neutro em relação à multiplicação são válidas no conjunto {-1, 1}.

5. Verificar que a operação multiplicação na Tábua de Pitágoras não é fechada e na Tábua 1 é fechada. Na Tábua de Pitágoras existe um único elemento invertível, enquanto na Tábua 1 todos os elementos são invertíveis.
6. Trabalhar o conceito de grupo. Identificar a Tábua 1 como um exemplo de grupo.
7. Trabalhar o conceito de grupo. Identificar que a Tábua de Pitágoras não é grupo porque a operação não é fechada e todos os seus elementos não são invertíveis.

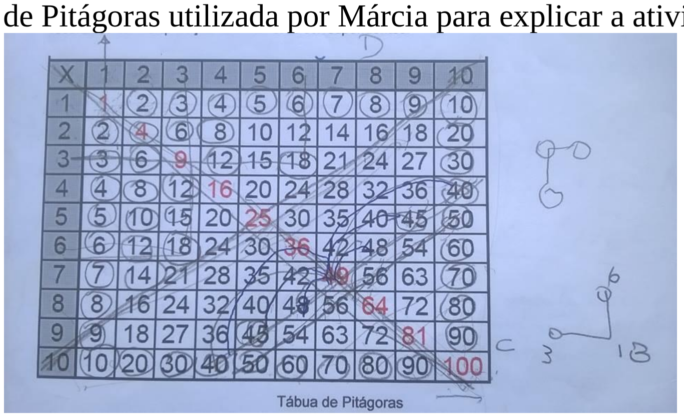
Essa atividade foi aplicada na equipe formada por Maria e Márcia.

O encontro da equipe composta por Márcia e Maria

Apresentamos alguns aspectos que consideramos importantes sobre a Atividade A.1 aplicada para a equipe formada por Maria e Márcia, quando se iniciou a face reflexiva.

Ao iniciarem a atividade, observamos que nenhuma participante conhecia a Tábua de Pitágoras. Ao receberem a tarefa, Márcia lê em voz alta, enquanto Maria acompanha a leitura, o que, para nós, parece ser o início da situação didática de ação. Destacamos que essa equipe trabalha de forma diferente, uma vez que tentam realizar juntas todas as questões e Márcia propõe-se a explicar qualquer palavra que acredita que sua colega não conheça, ou seja, uma explicitação de um contrato didático. O primeiro termo que ela explicou foi diagonal. E para tanto utilizou a sua atividade, como podemos perceber no Quadro 8.

Quadro 8: Tábua de Pitágoras utilizada por Márcia para explicar a atividade



Fonte: Oliveira (2017, p. 90)

Para explicar o termo diagonal, Márcia emprega algumas estratégias: riscos nas diagonais; utilização do número 49 = 7 x 7 para esclarecer como se situa em relação a essa posição; arcos que ligam os números 48, 45 e 40 e o uso da palavra “oposto” para elucidar sua disposição; semirretas perpendiculares a diagonal, com os números em vermelho.

Esperávamos o uso de alguma palavra relacionada à simetria, visto que já aparecera em atividades anteriores. No entanto, isso não ocorreu, como podemos ver no Quadro 9.

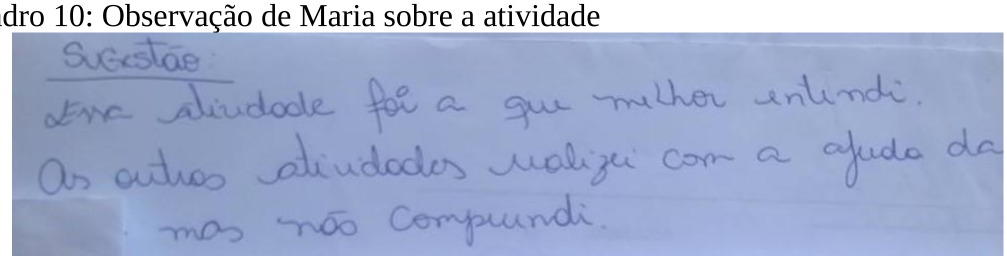
Quadro 9: Diálogo referente à palavra simetria

Pesquisadora: Existe algum outro termo além do oposto que vocês poderiam usar para explicar?
Maria: Explicar o quê?
Pesquisadora: Explicar como os resultados comuns estão posicionados em relação a diagonal.
Márcia: Essa diagonal?
Pesquisadora: Sim.
Márcia: Mas eles são opostos em relação a diagonal. Olha aqui. Tá vendo essa diagonal. Então esse aqui acima é oposto a esse daqui de baixo.
Pesquisadora: Entendi o que você está falando. Mas será que não existe uma outra palavra que utilizamos na atividade anterior que poderia ser utilizada nessa sua explicação.
Maria: Eu não me lembro. Márcia você se lembra?
Márcia: Deixa eu pensar. Acho que não.
Pesquisadora: Vocês se lembram da atividade que utilizamos a folha quadrada?
Maria e Márcia: Sim.
Pesquisadora: Pense mais um pouco.
Maria: Aquela atividade é muito complicada.
Márcia: E já faz algum tempo.
Pesquisadora: Vocês lembram como utilizamos à palavra simetria?

Fonte: Oliveira (2017, p. 91)

Como o termo simétrico foi ignorado, resolvemos questioná-las sobre as atividades realizadas, pois acreditávamos que o contato anterior ativaria a memória. Contudo, para nossa surpresa, ouvimos que ela foi “muito complicada” e que “já fazia algum tempo”. Maria expos na sugestão sua opinião sobre a atividade, como podemos ver no Quadro 10. Retiramos o nome exposto pela colega, para não identificar a participante.

Quadro 10: Observação de Maria sobre a atividade

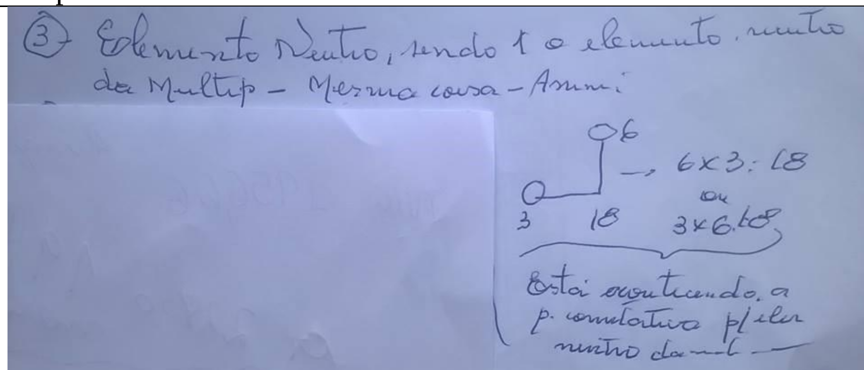
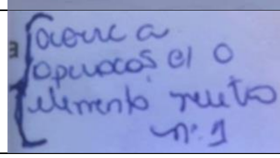

Sugestão
Essa atividade foi a que melhor entendi.
As outras atividades realizei com a ajuda da
mas não compreendi.

Fonte: Oliveira (2017, p. 91)

Maria esclarece que só se sentiu capaz de realizar as demais atividades com auxílio de Márcia, contudo, afirma que não conseguiu compreendê-las. Acreditamos que, por isso, Maria assume a posição de auxiliar da colega, o contrato didático estabelecido na dupla. No momento em que pronunciamos o termo simetria, vemos que Márcia conseguiu fazer a relação e propôs-se a explicar a Maria, possibilitando, assim, que terminassem a questão.

A propriedade comutativa não é explicitada na segunda questão, todavia, aparece na terceira, quando Márcia explica a Maria a propriedade do elemento neutro. Para isso, faz anotações que estão ao lado da sua Tábua de Pitágoras, apresentada no Quadro 11. Para entendermos melhor, vejamos cada resposta no Quadro 11.

Quadro 11: Resposta referente à terceira questão da atividade

Nome	Resposta
Márcia	
María	

Fonte: Oliveira (2017, p. 92)

Para explicar a propriedade comutativa Márcia utilizou o exemplo 6 x 3 e 3 x 6, que destacou na Tábua de Pitágoras e depois representou em sua anotação. Apesar de todo esclarecimento, Maria não fez uso de tudo o que lhe foi explicado. Na verdade, parece que resumiu o que compreendeu. Pensamos em um questionamento para identificar possíveis diferenças entre as respostas, com objetivo de suscitar outras situações didáticas, entretanto, lembramos que as respostas saíram de uma discussão sobre o assunto.

De acordo com elas, as tábuas eram iguais, o que provocou a primeira dificuldade, uma vez que não identificaram as diferenças. As demais questões foram realizadas com o nosso auxílio.

Consideramos que essa atividade não proporcionou as situações didáticas esperadas por consequência de possíveis problemas nas questões da atividade, ou a inadequação da atividade às participantes dessa equipe, que apresentaram dificuldades em conhecimentos básicos, como o elemento inverso na multiplicação, dificultando assim a compreensão da atividade.

Conclusões

Propusemo-nos, nesse artigo, elencar as potencialidades e as limitações de uma atividade que elaboramos a partir da Tábua de Pitágoras, que fez parte da nossa pesquisa de doutoramento, denominada Atividade A. Para tanto, fundamentamo-nos em alguns aspectos da Teoria de Situações Didáticas de Brousseau (1997), pois esperávamos que as situações didáticas de ação, formulação, validação e institucionalização surgissem nas discussões referentes ao conceito de estrutura algébrica grupo.

Após a aplicação e análise das limitações dessa atividade observamos que as situações formulação, validação e institucionalização não surgiram nos conceitos de operação binária, operação fechada, propriedade associativa e propriedade comutativa. Contudo, todos os participantes dominavam o conteúdo referente à propriedade comutativa.

Em relação à potencialidade, constatamos que essa atividade proporcionou as situações de ação, formulação, validação e institucionalização em relação ao conceito do elemento neutro.

Durante a aplicação da Atividade A muito tempo foi gasto em cálculos e discussões referentes a adição, fugindo do objetivo proposto. Portanto, reelaboramos essa atividade e substituímos o estudo das propriedades pelo conceito de estrutura grupo, denominado-a de Atividade A.1. Para tanto, utilizamos a metodologia *Design Experiments.*

Essa metodologia foi fundamental a essa pesquisa, pois como supomos que se apresentássemos primeiro o exemplo seguido do conceito de grupo a compreensão ocorreria de maneira mais fácil. Eram necessárias atividades com essa finalidade. Entretanto, como não conhecíamos pesquisas ou livros organizados dessa forma, foi necessário elaborar as atividades. Dessa forma, como *Design Experiments* possui duas faces, a prospectiva, que se baseia em hipóteses mentais sobre ensino e aprendizagem para implementação do projeto, e a reflexiva, em que a partir de análises as conjecturas iniciais podem ser refutadas, testadas ou formalizadas, elaboramos a Atividade A. A partir dos nossos pressupostos e após a aplicação, analisamos na face reflexiva com objetivo de verificar se as suposições deveriam ser refutadas, testadas, ou ainda, se era preciso formalizar outras. Assim, reelaborando a Atividade A.1.

A Atividade A.1 sofreu limitações uma vez que não proporcionou as fases das situações didáticas quando aplicada, sugerindo estar inadequada aos participantes. Assim, percebemos que é insuficiente ter um exemplo simples, como a Tábua de Pitágoras, pois também se faz necessário que os participantes tenham algumas ideias básicas sobre os conceitos de elemento neutro, comutatividade, associatividade, em relação à operação multiplicação em conjuntos numéricos.

A atividade A.1 apresenta potencial em relação a sua representação, a mesma utilizada para representar um grupo finito, uma vez que os participantes foram capazes de distinguir a operação e os elementos naturalmente do grupo apresentado na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, em que o grupo é o conjunto {-1,1} com a operação multiplicação.

Referências

ALBURQUERQE, I. M. B. *O conceito de grupo: sua formação por alunos do curso de matemática.* 2005. 333 p. Tese (Doutorado em Educação Brasileira). Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará. Fortaleza. 2005. Disponível em:http://www.repositorio.ufc.br:8080/ri/bitstream/123456789/3111/1/2005_Tese_IMBAlbuquerque.pdf. Acesso em 11 abr. 2013.

BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. *A Dialética entre Pensamento e Simbolismo Algébricos*. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.12, n.2, pp. 354-368, 2010. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4198/3310. Acesso em: 28 dez. 2016.

BROUSSEAU, G. *La théorie des situations didctiques*.1997. Disponível em: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/06/MONTREAL-archives-GB1.pdf. Acesso em: 10 set. 2012.

_ BROUSSEAU, G. *A etnomatemática e a teoria das situações didáticas*. Educação Matemática em Pesquisa, Volume 8, número 2, p. 267-281, 2006. Disponível em: file:///C:/Users/Samsung/Downloads/458-1285-1-PB.pdf. Acesso em: 01 jan. 2017.

BROWN, A. L.; *Design experiments: theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings*. In: The journal of the learning sciences, 2(2). p.141 -178. Lawrence Erlbaum Associates. 1992.

BUSSMANN, C. J. C. *Conhecimentos Mobilizados por Estudantes do Curso de matemática sobre o Conceito de Grupo*. 2009. 90 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina. Londrina. 2009. Disponível em: http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?view=vtls000151199. Acesso em: 11 abr. 2013.

COBB, P.; CONFREY, J.: DLSESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L; Design *experiments in educational research*. In: Educational Researcher, Vol. 32, No. 1, pp. 9–13. 2003

COLLINS, M.; BERGE, Z. *Helping faculty help themselves: design consulting for online teaching* In S. Garg, S. Panda, C.R.K. Murthy & S. Mishra (Eds.) Open and Distance Education in Global Environment: Opportunities for collaboration. New Delhi, India: Viva Books Private Ltd. 2006.

ELIAS, H. R. *Dificuldades de Estudantes de Licenciatura em Matemática na compreensão de grupo e/ou isomorfismo de grupos.* 2012. 152 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Centro de Ciências Exatas. Universidade Estadual de Londrina. Londrina. Disponível em:http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?view=vtls000170670. Acesso em: 11 abr. 2013.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M.; MIGUEL, A. *Contribuição para um repensar a educação algébrica elementar.* Pro-posições, v. 4, n. 1[10], p. 78-91, mar. 1993.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. *Elementos de álgebra.* Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. 2002.

GONÇALVES, A. *Introdução à álgebra*. 5 edi. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. 2003.

HEIRSTEIN, I. *Tópicos de álgebra*. Tradução Pergamasco, A. P; Monteiro, L. H. J. São Paulo: Editora Universidade de São Paulo e Polígono. 1970

LÜDKE, M.; ANDRÉ, E.D.A. *PesquisaemEducação : AbordagensQualitativas*. São Paulo: EditoraPedagógica e UniversitáriaLtda.1986.

OLIVEIRA, A. P. T. *Um estudo sobre estrutura algébrica grupo: potencialidades e limitações para generalização e formalização.* 2017. 128 p. Tese. (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/20383 . Acesso em: 06 mai. 2018.

TOZONI-REIS, M. F. C. *Metodologia da Pesquisa*. 2 edi. IESDE Brasil. Curitiba. PR. 2009.

Autoras:

Ana Paula Teles de Oliveira

Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2017). Mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo (2006). Atualmente, é professora assistente da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia. A ênfase de seus estudos situa-se no âmbito da Educação Superior, mais especificamente no estudo do ensino da Álgebra para os cursos de licenciatura em Matemática.

Ana Lúcia Manrique

Possui Pos-Doutorado no Programa de Pós-graduação em Educação da PUC/RJ (Pós-Doc Júnior CNPq) (2008). Mestrado em Ensino de Matemática (1994) e doutorado em Educação (Psicologia da Educação) (2003), ambos pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Graduação em Matemática pela Universidade de São Paulo (1987). Atualmente, é professora do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Pesquisa sobre os seguintes temas: Formação de professores que ensinam matemática, Formadores de professores, Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra e Educação Inclusiva.