SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES DE LA GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

Belén Arrieche
bjarriechedem@gmail.com
Mario Arrieche
marioarrieche@gmail.com
Martha de las Mercedes Iglesias
mmiglesias@gmail.com
Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Núcleo Maracay, Venezuela

Recibido: 16/03/2018 **Aceptado**: 17/05/2018

Resumen

El presente trabajo se centra en la caracterización de los significados institucionales de referencia puestos en juego en la interpretación del texto Geometría Moderna (Moise y Downs, 1970), utilizado en el proceso de formación de futuros profesores de Matemática en la UPEL Maracay cuando se aborda el estudio de la Geometría del Triángulo. La investigación se enmarca en un enfoque cualitativo, siguiendo un diseño de estudio de casos y apoyándose en la técnica del análisis semiótico. El análisis permitió identificar conflictos semióticos que permiten explicar, al menos parcialmente, las dificultades potenciales de los estudiantes en el proceso de estudio, así como identificar las limitaciones de conocimientos y habilidades geométricas efectivamente puestas en juego. Se determinó que el mencionado libro presenta un buen nivel de formalidad matemática; sin embargo, los estudiantes no poseen los conocimientos necesarios para abordar este texto de manera idónea; por lo cual, se recomienda que su uso sea complementando con otra literatura o material instruccional elaborado por los docentes que dictan la asignatura Geometría I.

Palabras clave: Libro de texto, análisis semiótico, formación docente.

INSTITUTIONAL MEANINGS OF THE GEOMETRY OF THE TRIANGLE IN THE PRESERVICES MATHEMATICS TEACHERS EDUCATION

Abstract

The present work focuses on the characterization of the institutional meanings of reference put into play in the interpretation of the text Modern Geometry (Moise and Downs, 1970), used in the process of training future teachers of Mathematics at the UPEL Maracay when it is addressed the study of the Triangle Geometry. The research is framed in a qualitative approach, following a case study design and relying on the technique of semiotic analysis. The analysis allowed us to identify semiotic conflicts that explain, at least partially, the potential difficulties of students in the study process, as well as identify the limitations of knowledge and geometric skills effectively put into play. It was determined that the aforementioned book presents a good level of mathematical formality; however, students do not possess the necessary knowledge to approach this text in an appropriate manner; Therefore, it is recommended that its use be complemented by other literature or instructional material prepared by the teachers who teach the subject Geometry I.

Keywords: Textbook, semiotic analysis, teacher training.

Introducción

Esta investigación se centra en la caracterización de los significados institucionales de la Geometría del Triángulo en la formación inicial de profesores de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay (UPEL, IP. de Maracay). Para tal fin, se adopta el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) propuesto por Godino y Batanero (1994) y Godino (2002, 2003), el cual hace especial énfasis en la indagación de la naturaleza del objeto matemático que, en nuestro caso particular, es el triángulo.

La experiencia profesional como docentes de Matemática en una institución de formación de profesores y, de manera particular de los cursos de Geometría, nos señala que los objetivos de aprendizaje pocas veces son totalmente alcanzados por los estudiantes. Posiblemente, entre otras razones, esto se deba a la manera como tradicionalmente se han gestionado las clases de Geometría. En este sentido, Iglesias (2000) alertaba que, en la formación de los profesores de Matemática, la enseñanza de la Geometría enfatizaba en procesos de aprendizaje memorísticos y repetitivos, ya que, el docente se apoyaba en clases expositivas, siguiendo lo planteado en el libro de texto sugerido en el programa de estudio, con escaso uso de recursos y materiales didácticos, limitándose al planteamiento de los llamados ejercicios – tipo. Lo cual pudiera incidir en una actitud negativa de los futuros profesores hacia la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría; reflejándose, más adelante, en el escaso tratamiento de temas geométricos en escuelas y liceos.

Cabe señalar que, siguiendo el diseño curricular 1996 (UPEL, 1996) para la especialidad de Matemática, en los cursos obligatorios de Geometría I y Geometría II correspondientes al plan de estudio de la mencionada especialidad en la UPEL, IP. de Maracay, habitualmente el docente se ha limitado a una exposición ordenada de los contenidos previstos con una organización exhaustiva de definiciones, postulados y teoremas, guiado por un único libro de texto: Geometría Moderna (Moise y Downs, 1970); es decir, se privilegia la presentación de los contenidos geométricos siguiendo un orden lógico – deductivo, propio de una teoría axiomática, pero dejando a un lado la evolución histórica de la Geometría, así como ciertas orientaciones didácticas. Quizá, por ello, el estudiante tenga un papel pasivo en el proceso de aprendizaje de la Geometría, limitándose a memorizar y repetir lo que no comprende, aunque, en algunos casos, logre entender lo estudiado. Además, son notorias las dificultades para llevar a cabo una demostración, ya que, esta tarea exige la puesta en práctica de conocimientos y habilidades geométricas asociadas a los distintos niveles de razonamiento geométrico propuestos en el modelo de Van Hiele (1957, 1959).

Teniendo en consideración lo antes planteado, esta investigación ha estado orientada por las siguientes interrogantes: (a) ¿El uso del libro de texto Geometría Moderna (Moise y Downs, 1970) será lo más idóneo para abordar la unidad didáctica referida al estudio de la Geometría del Triángulo en el curso de Geometría I?, (b) ¿Cuáles reformas curriculares sería necesario hacer, para adecuar la enseñanza de la Geometría del Triángulo a los requerimientos formativos de los futuros profesores de Matemática? Por lo tanto, la misma tiene como propósito: Caracterizar los significados institucionales de la Geometría del Triángulo en la formación inicial de los profesores de Matemática.

Referentes teóricos

Nociones teóricas del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática

Para caracterizar los significados institucionales de la Geometría del Triángulo se ha adoptado el *enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS)* propuesto por Godino y Batanero (1994); Godino (2002, 2003), el cual considera clave la noción de significado para analizar la actividad matemática y los procesos de comunicación del conocimiento matemático. La idea impulsora de este enfoque fue la de articular las *dimensiones epistemológicas* (naturaleza del contenido matemático), *cognitivas* (procesos de comprensión de los estudiantes; dificultades y obstáculos) e *instruccionales* (procesos de enseñanza y aprendizaje en contextos escolares, currículum y procesos de estudio) puestas en juego en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en cualquiera de los niveles educativos existentes. A continuación, describimos brevemente las nociones teóricas descritas en el EOS y que serán aplicadas en esta investigación, atendiendo a lo planteado por Godino y Batanero (1994) y Godino (2002, 2003): (a) *La práctica* es la actuación o manifestación realizada para resolver problemas matemáticos, comunicar, validar y generalizar la solución. (b) *La institución* está constituida por las personas que comparten un sistema de prácticas alrededor de una problemática común y, en el caso de una *institución matemática*, puede estar constituida por quienes producen el saber, por quienes lo utilizan en aplicaciones, por quienes lo enseñan, etc. (c) Un *objeto o entidad matemática* es todo aquello que puede hacerse referencia cuando se hace, comunica o aprende matemáticas.

Los objetos matemáticos pueden estar representados por expresiones lingüísticas, situaciones - problema, actuaciones del sujeto, conceptos, propiedades y argumentaciones. Visto de esta forma existe una diversidad de objetos matemáticos. Se agruparán en dos categorías: las entidades primarias y las entidades secundarias. En ese sentido, la agrupación obedece a una caracterización de tipo pragmático y en otras subcategorías que Godino (2002, p. 6) explica:

> En nuestro caso proponemos las siguientes categorías o tipos de entidades matemáticas basándonos en los diversos papeles o funciones desempeñadas por estas entidades en el trabajo matemático: *situaciones, acciones, lenguaje, conceptos-reglas, propiedades, argumentaciones.* Consideramos estos tipos como “entidades primarias”, las que se pueden a su vez agrupar en entidades secundarias como: praxis, logos, praxeologías, conceptos-sistema, campos conceptuales, teoría de grupos, aritmética, geometría, etc.

Tomando en cuenta la categoría de entidades primarias, Godino (2002, p. 6) las define de la siguiente manera:

> *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos). En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica, pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos.
> *Situaciones* (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios...); son las tareas que inducen la actividad matemática.
> *Acciones del sujeto ante las tareas matemáticas* (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).
> *Conceptos*, dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, media, función...)
> *Propiedades* o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.
> *Argumentaciones* que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).

El *significado institucional de un objeto matemático* O_I, “es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge O_I en un momento dado” (Godino y Batanero, 1994, p. 13). En el análisis de los significados institucionales de un objeto matemático, interesa distinguir cuatro tipos, que designamos como significado: de referencia, pretendido, implementado y evaluado. Godino (2003) los define así:

> *El significado de referencia:* Es lo que representa el objeto para las instituciones matemáticas y didácticas. Son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto matemático que se fija como objeto institucional y que es el producto de las orientaciones de los expertos y del análisis de los currículos.

> *El significado pretendido:* se refiere al sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso instruccional.
> *El significado implementado*: concierne al sistema de prácticas (operativas y discursivas) que efectivamente tienen lugar en la clase de matemáticas, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los estudiantes y las evaluaciones de los aprendizajes.
> *El significado evaluado*: consiste en el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

Por lo tanto, en este reporte, se enfatizará en el significado institucional de referencia del objeto matemático triángulo, a partir del análisis del libro Geometría Moderna (Moise y Downs, 1970), ya que, el mismo, por muchísimo tiempo, ha sido asumido como el libro de texto a seguir en el curso de Geometría I en la UPEL, Instituto Pedagógico Maracay.

La caracterización de los significados implementados y evaluados se muestran en Arrieche (2009), mediante el análisis del proceso de estudio desarrollado para abordar el contenido referido a la unidad de triángulo.

Abordaje metodológico

Esta investigación se enmarca en un enfoque cualitativo, siguiendo un diseño de estudio de casos y apoyándose en la técnica del análisis semiótico (Godino y Arrieche, 2001) del libro de Geometría Moderna utilizado por los profesores que administran los cursos de Geometría en la UPEL, IP. de Maracay, con el propósito de caracterizar los significados institucionales de referencia puestos en juego en el texto cuando abordan los temas referidos a la Geometría del Triángulo. Cabe señalar que se aplicó la mencionada técnica a los bloques de contenido sobre *ángulos y triángulos* y *congruencias*.

Para cada uno de estos contenidos incluimos el texto y las unidades de análisis, los componentes praxeológicos, y conocimientos puestos en juego. También se estudian los conflictos semióticos entre los significados puestos en juego en el texto y los atribuidos a las expresiones por una institución de referencia, que en este caso viene dada por la interpretación que hacen los investigadores de los textos sobre la Geometría del Triángulo. De acuerdo a nuestro marco teórico, dichos conflictos se refieren a toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa; los conflictos semióticos se consideran como explicaciones potenciales de las dificultades y limitaciones de los aprendizajes.

En este sentido, Arrieche (2002) considera que en una primera fase del análisis es útil clasificar la información del texto en tres componentes: (a) *Praxis*: incluye las situaciones-problemas y los elementos actuativos. (b) *Lenguaje*: se refiere a los términos, expresiones, notaciones, gráficos. (c) *Teoría:* abarca los conceptos-definición, las propiedades y argumentaciones. Además, se propone como una primera clasificación de las unidades de análisis semiótico de un texto matemático las siguientes: (a) *Unidades iniciales* (apartados o secciones del texto). (b) *Unidades primarias* (oraciones o sentencias). (c) *Unidades elementales* (términos y expresiones que designan uno de los seis tipos de entidades elementales o primarias descritas en el marco teórico). (d) *Unidades secundarias* (combinación de dos o más unidades primarias).

Posteriormente, los componentes del significado sistémico son agrupados en las siguientes categorías: (a) *Lingüísticos* (Términos, expresiones, notaciones y gráficos). (b) *Situacionales* (Problemas, ejemplos y ejercicios). (c) *Actuativos* (operaciones, técnicas y procedimientos). (d) *Conceptuales* (formulación de reglas que definen los conceptos). (e) *Proposicionales* (Enunciado de propiedades y atributos de los conceptos y operaciones). (f) *Validativos* (Argumentaciones que validan las proposiciones).

En el trabajo desarrollado, es preciso indicar que el bloque sobre *ángulos y triángulos* está dividido en seis (6) sub secciones: (a) Definiciones fundamentales. (b) Algunas observaciones acerca de los ángulos. (c) Medida angular. (d) Ángulos rectos, perpendicularidad, ángulos congruentes. (e) Teoremas enunciados a base de hipótesis y conclusión. (f) Redacción de teoremas sencillos. Mientras que el bloque sobre *congruencias* comprende ocho (8) sub secciones: (a) El Concepto de congruencia. (b) Congruencia de triángulos. (c) Los postulados de congruencias para triángulos. (d) Redacción de demostraciones. (e) Bisectriz de un ángulo. (f) Triángulos isósceles y equiláteros. (g) Triángulos parcialmente superpuestos. Empleo de la figura para obtener información. (h) Cuadriláteros, cuadrados y rectángulos.

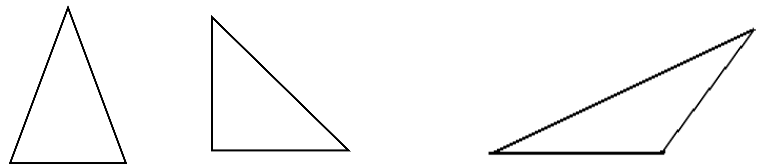
Seguidamente, se presentará el análisis realizado a un fragmento de la sub sección “Definiciones fundamentales” de los bloques de contenidos referidos a "*ángulos y triángulos*".

Unidades de análisis

En atención a los bloques de contenido seleccionados, se tendrá en cuenta la primera subsección *U-1 Definiciones fundamentales,* procediéndose a transcribir el texto objeto de análisis y a identificar las unidades primarias, las cuales se muestran a continuación:

Textos y unidades primarias de análisis

U-1.1 Un *triángulo e*s una figura como una de las siguientes:



U-1.2 Definiciones

Si A, B, C Son tres puntos cualesquiera no alineados, entonces la reunión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llama un *triángulo*, y se indica con Δ ABC.

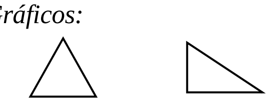
U-1.3 Los puntos A, B y C se llaman *vértices*, y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llaman *lados*.

U-1.4 Todo triángulo Δ ABC determina tres ángulos: $\angle$ B AC, $\angle$ ABCy $\angle$ ACB. A éstos los llamamos los *ángulos* del Δ ABC.

U-1.5 Si está claro a qué triángulo nos referimos, frecuentemente podemos designarlos por $\angle$ A, $\angle$ B y $\angle$ C.

Fuente: Moise y Downs (1970, p. 76)

Seguidamente, se clasifica la información arriba indicada en los tres componentes señalados: *Praxis*, *Lenguaje* y *Teoría.*

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones: Ilustraciones gráfica de triángulos.	➢ *Términos y expresiones:* Triángulo, figura, puntos no alineados, reunión, segmentos, lados, ángulos y vértices.	➢ *Conceptos (definiciones):* • Triángulo • Puntos no alineados • Reunión • Segmento • Lado • Ángulo • Vértice
	➢ *Notaciones:* • $\angle$ A, $\angle$ B y $\angle$ C. • Δ ABC. • $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ • $\angle$ B AC, $\angle$ ABC y $\angle$ ACB ➢ *Gráficos:* 	➢ *Propiedades:* Todo triángulo Δ ABC determina tres ángulos.

Interpretación de la información recabada:

U- 1.1 Se inicia con la representación geométrica de tres triángulos diferentes, los cuales, más adelante, pudiéramos clasificar, según la medida de sus ángulos, como triángulos: acutángulo, rectángulo y obtusángulo. Si tomamos en consideración el modelo de razonamiento geométrico propuesto por Van Hiele (1957, 1959), se estaría introduciendo el concepto de triángulo mediante su representación gráfica, con el propósito de favorecer su reconocimiento por su apariencia global.

U- 1.2 La definición de triángulo implica para su comprensión que el estudiante domine los conceptos de puntos no alineados, segmentos y reunión (o unión de conjuntos); cabe destacar que, en la UPEL Instituto Pedagógico de Maracay, según lo previsto en el plan de estudios, los estudiantes cursan en paralelo Introducción al Álgebra y Geometría I y, por lo general, cuando estudian los contenidos sobre triángulos, aún no han abordado el tema de operaciones entre conjuntos y, de haberlo hecho, en nuestro contexto institucional, suele hablarse de unión en vez de reunión. Esto es un asunto que es importante que el docente aclare a sus estudiantes, para evitar posibles conflictos semióticos reflejados en las confusiones conceptuales que se le puedan presentar. También, se presenta la notación de triángulo, utilizando el símbolo Δ previo a los puntos A, B y C (ΔABC), pero no se aclara que el orden de colocación de los puntos no influye al momento de denotar al mismo triángulo.

U-1.3 Se hace mención que los puntos A, B y C involucrados en la definición reciben el nombre de vértices y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son los lados, sin hacer la distinción que estos también suelen llamarse elementos de un triángulo, la cual es la manera como suelen presentarse en los libros de texto utilizado en los niveles de educación primaria y educación media en Venezuela.

U-1.4 Se destaca que todo triángulo determina tres ángulos y establece que éstos se denominan ángulos del triángulo, sin hacer mención que es otro de los elementos del mismo. Además, se supone que el lector conoce la notación de los ángulos $\angle$BAC, $\angle$ABC y $\angle$ACB que muchas veces no es asimilada por los estudiantes. También se considera importante que el futuro profesor de Matemática entienda que dos lados cualesquiera de un triángulo determinan un ángulo, pero no lo forman, ya que, por ejemplo, < BAC está determinado por los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, pero el mismo está formado por la unión de dos semirrectas que tienen el mismo origen: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Además, sería útil indicar que los ángulos $\angle$BAC, $\angle$ABC y $\angle$ACB son los ángulos internos de un triángulo, debido a que más adelante se hablará de ángulos externos de un triángulo.

U-1.5 Se aclara que si no existe ambigüedad respecto a los ángulos, estos se pueden denotar haciendo uso solo de un vértice ($\angle$ A, $\angle$B, $\angle$ C). El autor muestra dos maneras de denotar los ángulos de un triángulo, pero no clarifica cuando usar una u otra, lo cual puede causar un conflicto en los lectores; además, no se ilustra de forma gráfica situaciones donde se pueda hacer uso de estas notaciones.

Con respecto a las ocho (8) subsecciones que conforman el bloque sobre *congruencias*, se seleccionaron como unidades primarias aquellas relacionadas de manera directa con la Geometría del Triángulo; éstas son: U-1. Congruencia de triángulos. U-2. Los postulados de congruencias para triángulos. U-3 Redacción de demostraciones. U-4. Triángulos isósceles y equiláteros. En este reporte, se mostrará el análisis semiótico efectuado a las unidades U-1 y U-2, aunque, más adelante, en el apartado referido al significado sistémico sobre la Geometría del Triángulo, se tendrán en cuenta los insumos obtenidos al realizar el análisis de las unidades U-3 y U-4.

U-1. Congruencia de triángulos
Textos y unidades primarias de análisis

U- 1.1	Definición Sea ABC $\leftrightarrow$ DEF una correspondencia entre los vértices de un triángulo.
U- 1.2	Si los pares de lados correspondientes son congruentes, y los pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia ABC $\leftrightarrow$ DEF se llama una *congruencia entre los dos triángulos.*
U- 1.3	Cuando escribimos $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, queremos decir que la correspondencia ABC $\leftrightarrow$ DEF es una congruencia. Ésta es una taquigrafía muy eficiente, pues una sola expresión como nos dice a la vez *seis* cosas, a saber: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, o AB = DE, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, o AC = DF, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, o BC = EF, $\angle A \cong \angle D$, o $m\angle A = m\angle D$ $\angle B \cong \angle E$, o $m\angle B = m\angle E$ $\angle C \cong \angle F$, o $m\angle C = m\angle F$
U- 1.4	Definiciones Un *lado* de un triángulo se dice estar *comprendido* por los ángulos cuyos vértices son los extremos del segmento. Un *ángulo* de un triángulo se dice estar *comprendido* por los lados del triángulo que están en los lados del ángulo.
U-1.5	Por ejemplo, en el ΔABC anterior, $\overline{AC}$ está comprendido por los ángulos $\angle$ A y $\angle$ C, y el $\angle$ A está comprendido por los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$

Fuente: Moise y Downs (1970, p. 115)

A continuación, se clasifica la información usando los tres componentes señalados: *Praxis*, *Lenguaje* y *Teoría*.

Componentes y unidades elementales

Praxis	Lenguaje	Teoría
➢ Una ilustración de Correspondencia entre los vértices de dos triángulos, para mostrar las definiciones de lado y ángulo comprendido	➢ *Términos y expresiones:* Correspondencia entre los vértices de dos triángulos, pares de lados correspondientes, pares de ángulos correspondientes, congruentes ➢ *Notaciones:* ABC $\leftrightarrow$ DEF para denotar correspondencia entre los vértices de dos triángulos, Δ ABC $\cong$ Δ DEF para denotar la congruencia entre dos triángulos, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ para denotar congruencia entre dos segmentos, $\angle A \cong \angle D$ para denotar la congruencia entre dos ángulos, BC = EF para denotar igualdad de longitud de dos segmentos, y $m\angle A = m\angle D$ Para denotar la igualdad de medida de dos ángulos.	➢ *Conceptos:* • Correspondencia • Vértices • Triángulo • Lado • Ángulo • Congruencia

Interpretación de la información recabada:

U- 1.1 Se presenta de manera notacional (ABC $\leftrightarrow$ DEF) la correspondencia entre los vértices de un triángulo, se supone que el concepto de correspondencia es conocido por el lector.

U- 1.2 Se presenta la definición de congruencia entre dos triángulos, la cual exige de parte del lector el (re)-conocimiento de pares de lados correspondientes congruentes y pares de ángulos correspondientes congruentes. Es evidente que para la comprensión del concepto de congruencia entre dos triángulos es importante reforzar en los estudiantes el significado de correspondencia entre los vértices de los triángulos, haciendo énfasis en los lados y ángulos correspondientes.

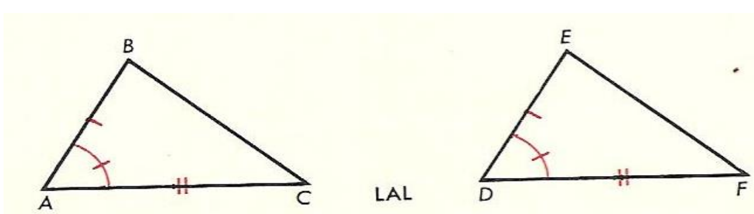
U- 1.3 Se señala la notación de triángulos congruentes (Δ ABC $\cong$ Δ DEF), destacando que esta expresión simplifica el hecho de escribir la congruencia entre los pares de lados correspondientes congruentes y los pares de ángulos correspondientes congruentes que determina toda congruencia entre dos triángulos. Un posible conflicto semiótico que pueda ocurrir es asumir que el orden de colocación de los vértices de los triángulos no influye en la notación de la congruencia; es decir que si establecemos la correspondencia ABC $\leftrightarrow$ DEF, la congruencia entre los triángulos la podrían expresar de varias formas. Algunas de estas podrían ser $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ó $\Delta ABC \cong \Delta EFD$; por lo tanto, tendrían el mismo significado para los estudiantes. También sería conveniente que el estudiante conociera que la congruencia entre triángulos no exige que los triángulos sean distintos; en algunos casos, es sumamente útil establecer la correspondencia de un triángulo consigo mismo. Esta idea se emplea para probar que todo triángulo equilátero es equiángulo o que los ángulos en la base de un triángulo isósceles son congruentes.

U- 1.4 Se establecen las definiciones de lado comprendido por dos ángulos de un triángulo y ángulo comprendido por dos lados. Para la comprensión de la primera se necesita conocer el significado de vértice de un ángulo y extremos de un segmento, y para la segunda definición el lector debe conocer lo que significa que los lados de un triángulo estén en los lados de un ángulo, queda implícito que el lector conozca que los lados de un triángulo son segmentos y los lados de un ángulo son rayos y por lo tanto, el segmento puede estar contenido en el rayo.

U- 1.5 De acuerdo al texto, se ejemplifican, dado un triángulo ΔABC las definiciones anteriores (lado y ángulo comprendido); sin embargo, el dibujo del triángulo no aparece de forma inmediata a la definición, solo se señala que es una figura anterior, y en páginas previas aparecen varios triángulos de vértices A, B y C, en consecuencia queda sin efecto la ejemplificación de las definiciones.

U-2. Los postulados de congruencias para triángulos.

Texto y unidades primarias de análisis

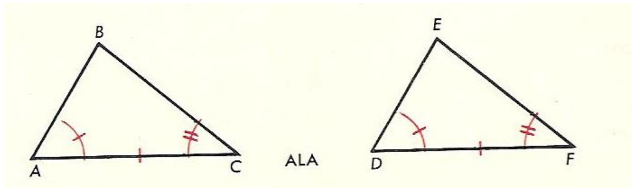
U- 2.1	Sin duda el alumno habrá descubierto que hay por lo menos tres casos en los cuales podemos concluir que una correspondencia entre dos triángulos es una congruencia.
U- 2.2	En el primer caso, ABC $\leftrightarrow$ DEF se llama una correspondencia LAL; con esto, queremos decir que los lados y el ángulo comprendido del primer triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo. (“LAL” representa “lado-ángulo-lado”.) En este caso se deduce que $\Delta ABC \cong \Delta$ DEF.
U-2.3	
U- 2.4	En el segundo caso, ABC $\leftrightarrow$ DEF se llama una correspondencia ALA; con esto, queremos decir que los ángulos y el lado comprendido del primer triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo. (“ALA” representa “ángulo-lado-ángulo”.) En este caso, también, se deduce que $\Delta ABC \cong \Delta$ DEF.

Continúa

U-2. Los postulados de congruencias para triángulos.

Texto y unidades primarias de análisis (continuación)

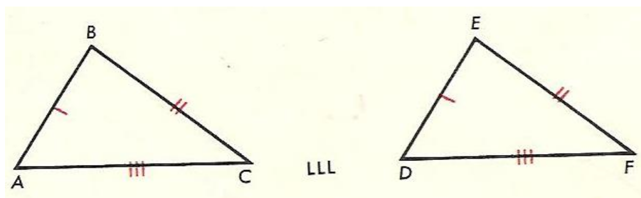
U- 2.5



U- 2.6 Finalmente, en el tercer caso, ABC $\leftrightarrow$ DEF se llamauna correspondencia LLL; con esto, queremos decir los tres lados del primer triángulo son congruentes con los lados correspondientes del segundo triángulo.

(“LLL” representa “lado-lado-lado”.) aquí debemos tener ΔABC $\cong$ Δ DEF.

U- 2.7



U-2.8 Hacemos oficiales estas observaciones en los siguientes postulados:

U-2.9 **POSTULADO 15**. El postulado LAL.
Toda correspondencia LAL es una congruencia.

U-2.10 **POSTULADO 16**. El postulado ALA.
Toda correspondencia ALA es una congruencia.

U-2.11 **POSTULADO 17**. El postulado LLL.
Toda correspondencia LLL es una congruencia.

Fuente: Moise y Downs (1970, pp. 119-120)

A continuación, se presenta la clasificación de la información en los tres componentes señalados: *Praxis*, *Lenguaje* y *Teoría.*

Componentes y unidades elementales

Praxis	Lenguaje	Teoría
➢ Tres ilustraciones para mostrar la definición de las correspondencias ALA, LAL y LLL.	➢ *Términos y expresiones:* • ABC $\leftrightarrow$ DEF se llama una correspondencia LAL. • Dos lados y el ángulo comprendido. • Dos ángulos y el lado comprendido • Se deduce que ΔABC $\cong$ Δ DEF • Correspondencia LAL • Correspondencia ALA • Correspondencias LLL • Partes correspondientes. • Postulado ➢ *Notaciones:* ABC $\leftrightarrow$ DEF para denotar correspondencia entre los vértices de dos triángulos, ΔABC $\cong$ Δ DEF para denotar la congruencia entre dos triángulos.	➢ *Conceptos:* • Correspondencia • Vértice • Triángulo • Lado • Ángulo • Lado comprendido • Ángulo comprendido • Postulado Congruencia

Interpretación de la información recabada:

U- 2.1 Los autores del texto aseguran que el estudiante ha descubierto los casos en los cuales se puede concluir que una correspondencia entre dos triángulos es una congruencia; sin embargo, fundamentados en nuestra experiencia docente afirmamos que esto no ocurre, en apartados previos no se presenta ninguna situación o tarea que de manera explícita induzca al lector a deducir tales conclusiones. En este sentido, queda de parte del docente que haga uso del libro para abordar el contenido de congruencia y diseñar estrategias que permitan a los estudiantes concluir que, por lo menos, hay tres casos donde se puede establecer que una correspondencia sea una congruencia.

U- 2.2 a U- 2.7 Para hacer la introducción de los postulados que permiten establecer la congruencia entre dos triángulos, se enuncia el concepto de las correspondencias ALA, LAL y LLL, utilizando el mismo enunciado para las tres correspondencias sin indicar distinción entre ellas; esto es, ABC $\leftrightarrow$ DEF se llama una correspondencia LAL, ALA y LLL. Luego, es que se menciona el significado de cada una de las correspondencias.

Es necesario para la comprensión del concepto de la correspondencia LAL que el lector conozca la definición de ángulo comprendido y para la correspondencia ALA la definición de ángulo comprendido, el desconocimiento de estas definiciones puede ser agente causal de algunos conflictos semióticos.

Los tres tipos de correspondencias (ALA, LAL y LLL) se ilustran con un dibujo, pero solo se muestran las congruencias entre los segmentos y ángulos de forma gráfica; es decir, no se hace un análisis escrito de las figuras donde se señale cuál es el lado o el ángulo comprendido, según el caso, así como los lados congruentes; se le deja al lector hacer la interpretación de los dibujos (triángulos congruentes).

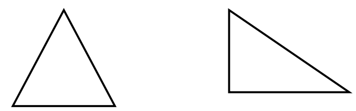
U- 2.8 a U- 2.11 Se exponen los tres postulados (ALA, LAL y LLL) que permiten establecer la congruencia entre dos triángulos, señalando que cada correspondencia estudiada previamente es una congruencia. No se ilustra mediante alguna figura ningún postulado. Los autores utilizan la misma notación para los postulados y las congruencias, queda de parte del docente aclarar el significado atribuido al postulado y el atribuido a la congruencia.

Significado sistémico sobre la Geometría del Triángulo

Las tablas que se presentan a continuación tienen la finalidad de sintetizar, los distintos componentes del significado sistémico o praxeológico puestos en juego en el libro de texto Geometría Moderna, utilizado por los docentes y estudiantes de la especialidad de Matemática como documento de referencia para abordar el curso de Geometría I. En este sentido, los conocimientos descritos por Moise y Downs (1970) son el marco institucional al cual se apegan los futuros profesores de Matemática, junto con las explicaciones del docente, en el proceso de estudio de la Geometría del Triángulo. En las siguientes tablas se muestran los componentes descritos en la teoría, correspondientes a cada unidad de análisis:

Unidad: Ángulos y triángulos.

U-1 Definiciones fundamentales.

Componentes Lingüísticos	U – 1	*Términos y expresiones:* Triángulo, figura, puntos no alineados, reunión, segmentos, lados, ángulos y vértices. *Notaciones:* • $\angle$ A, $\angle$ B y $\angle$ C. • Δ ABC. • $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ • $\angle$ B AC, $\angle$ABC y $\angle$ACB. *Gráficos:* 
Componentes Situacionales	U – 1	Ejemplos gráficos de triángulos
Componentes Conceptuales	U- 1	Conceptos: Triángulo, puntos no alineados, reunión, segmento

Unidad: *Congruencias*[1].

Componentes Lingüísticos	U - 1	*Términos y expresiones:* Correspondencia entre los vértices de dos triángulos, pares de lados correspondientes, pares de ángulos correspondientes, congruente. *Notaciones:* ABC $\leftrightarrow$ DEF para denotar correspondencia entre los vértices de dos triángulos, Δ ABC $\cong$ Δ DEF para denotar la congruencia entre dos triángulos, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ para denotar congruencia entre dos segmentos $\angle A \cong \angle D$ para denotar la congruencia entre dos ángulos, BC = EF para denotar igualdad de longitud de dos segmentos $m\angle A = m\angle D$ para denotar la igualdad de medida de dos ángulos.
	U - 2	*Términos y expresiones:* ABC $\leftrightarrow$ DEF se llama una correspondencia LAL, dos lados y el ángulo comprendido, dos ángulos y el lado comprendido, se deduce que Δ ABC $\cong$ Δ DEF, correspondencia LAL, correspondencia ALA, correspondencias LLL, partes correspondientes. Postulado. *Notaciones:* ABC $\leftrightarrow$ DEF para denotar correspondencia entre los vértices de dos triángulos, Δ ABC $\cong$ Δ DEF para denotar la congruencia entre dos triángulos.
	U - 3	*Términos y expresiones:* Correspondencia entre los vértices de dos triángulos, pares de lados correspondientes, pares de ángulos correspondientes, congruentes, correspondencia LAL, correspondencia LLL, postulado LAL, ángulos comprendidos, ángulos opuestos por el vértice.

[1] U-1 Congruencia de triángulos. U-2 Postulados de congruencias. U-3 Redacción de demostraciones. U-4. Triángulos isósceles y equiláteros

	U - 3	*Notaciones:* - ABC $\leftrightarrow$ DEF para denotar correspondencia entre los vértices de dos triángulos. - Δ AFB $\cong$ Δ RFH para denotar la congruencia entre dos triángulos. - $\overline{AF} \cong \overline{RF}$ y $\overline{FB} \cong \overline{FH}$ para denotar congruencia entre dos segmentos. AF = RF para denotar igualdad de longitud de dos segmentos.
Componentes Lingüísticos	U - 4	*Términos y expresiones:* Correspondencia LAL, postulado LAL, pares de partes correspondientes, forma de dos columnas, lados, congruencia idéntica, lados opuestos, ángulos opuestos. *Notaciones:* - ABC $\leftrightarrow$ ACB para denotar correspondencia del Δ ABC consigo mismo. - Δ ABC $\cong$ Δ ACB para denotar la congruencia entre dos triángulos, - $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ para denotar congruencia entre dos segmentos - $\angle B \cong \angle C$ para denotar la congruencia entre dos ángulos.
Componentes situacionales	U - 2	Ejemplos gráficos que ilustran las correspondencias LAL, ALA y LLL.
	U - 3	Ejemplo de un problema para ilustrar el proceso a seguir para el desarrollo de una demostración en geometría. Ejemplo gráfico de una figura para ilustrar el enunciado de un problema.
	U - 4	Ejemplos gráficos para ilustrar el enunciado del teorema del triángulo isósceles, su reciproco y corolarios respectivos.
Componentes conceptuales	U - 1	Definición de Congruencia entre dos triángulos.
	U - 2	Definiciones de: Correspondencia ALA, Correspondencia LAL y Correspondencia LLL.
	U - 4	Definiciones de triángulo isósceles, equilátero, escaleno y equiángulo. Definiciones relacionadas con los lados y ángulos de un triángulo isósceles: base, ángulos asociados a la base y ángulo en el vértice.
Componentes proposicionales	U - 2	Toda correspondencia ALA es una congruencia. Toda correspondencia LAL es una congruencia. Toda correspondencia LLL es una congruencia.
	U - 3	El punto medio de un segmento lo biseca. Ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
	U - 4	Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son congruentes. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes. Todo triángulo equilátero es equiángulo. Todo triángulo equiángulo es equilátero

Síntesis de conocimientos y conflictos semióticos

El análisis semiótico descrito anteriormente es calificado por Arrieche (2002) como microscópico porque permite identificar significados puestos en juego en una actividad matemática puntual.

Con este análisis se pretende describir los conocimientos y actividades presentadas en torno a la Geometría del Triángulo, permitiendo pormenorizar los detalles que sin esta técnica se podrían pasar por alto tanto a nivel general como específico.

La técnica ofrece la posibilidad de detectar las disparidades en los significados atribuidos por dos personas o instituciones en los procesos de estudio de un objeto matemático. Estas disparidades de acuerdo al marco teórico que sustenta la investigación se califican como conflictos semióticos potenciales y son fuente de estudio para el mejoramiento en la actividad matemática, dando la sustentación necesaria para prevenir las posibles causas de las dificultades de comprensión de los textos evitándose así, las consecuencias negativas en los procesos de comprensión por parte del alumno (semiosis) que aborda un texto con significados contradictorios con respecto a otras instituciones (otros libros de texto o el docente)

La detección temprana de los conflictos semióticos en los materiales de referencia sugeridos por el docente permite diseñar la actividad de clase con mayor eficiencia al momento de implementar un tema de clase, pues se toman en cuenta factores como el tiempo y los recursos necesarios para las actividades docentes.

A continuación se señalaran de forma sucinta los principales conflictos semióticos encontrados en el análisis realizado:

Es importante destacar que los estudiantes cursan en paralelo las asignaturas Geometría I e Introducción al Álgebra, situación que redunda de forma negativa en la comprensión de ciertos conceptos relacionados con la Geometría del Triángulo en particular y con el resto del curso en general. Por ejemplo, en la definición de triángulo que se presenta en el texto, se hace uso de la teoría de conjuntos al considerarlo como la unión de tres segmentos en condiciones muy específicas. De igual manera, cuando se hace mención que los lados del triángulo están sobre los lados de un ángulo, se hace uso de manera implícita de la definición de inclusión de conjuntos, pues tanto el segmento como el rayo son conjuntos cuyos elementos son puntos. En conclusión, se puede apreciar a lo largo del texto que es necesario la comprensión de ciertas definiciones relacionadas a la teoría de conjuntos, tales como la unión de conjuntos, inclusión o subconjunto, etc.; para una compresión efectiva de los contenidos presentados por los autores.

Se establecen el significado de lados, vértices y ángulos de un triángulo, sin señalar que estos son los elementos del mismo, aspecto que es necesario que conozca todo futuro profesor de Matemática, por ser este un tema a enseñar en educación media. También, se abordan las definiciones de triángulo isósceles, equilátero y escaleno sin hacer mención que estas permiten la clasificación de los triángulos atendiendo al criterio de las medidas de sus lados; en cuanto al otro criterio, según la medida de sus ángulos, no solo se ignora, ni siquiera se abordan las definiciones de los triángulos involucrados en este criterio (obtusángulo, rectángulo y acutángulo). Si el docente sigue fielmente al texto, los estudiantes no conocerán los criterios de clasificación de los triángulos, tema que está presente en los programas de estudios de la educación media, futuro campo laboral del estudiante de la especialidad de Matemática.

Se considera al triángulo isósceles como aquel que tiene dos lados congruentes, no se hace referencia al tercer lado, es decir, que este pudiera ser congruente o no con los otros dos, de ser congruente estaríamos en presencia de un triángulo equilátero, por lo que haciendo uso de la teoría de conjuntos se afirmaría que el conjunto de los triángulos equiláteros es subconjunto del conjunto de los triángulos isósceles. En términos de proposiciones, se podría enunciar que: Todo triángulo equilátero es isósceles y que su reciproco es falso. Si el docente aplica la teoría de Van Hiele en el abordaje de estos conceptos, los estudiantes están en capacidad de comprender los aspectos considerados anteriormente.

En la definición de triángulo isósceles se señala que tiene dos lados congruentes y que el otro lado se llama base, muchos estudiantes concluyen que este tercer lado es no congruente. No se aclara que si estamos en presencia de un triángulo equilátero, cualquier lado puede ser la base.

Todas las figuras que ejemplifican definiciones, teoremas o postulados son presentadas en posición clásica. Por ejemplo, el triángulo isósceles (no equilátero) es presentado con el lado no congruente en forma horizontal y además se le indica que este es llamado base, se debe tener mucho cuidado con este término, los estudiantes asocian a la base de un triángulo con el lado que tiene la posición horizontal, en consecuencia si un estudiante observa un triángulo isósceles en forma no clásica tendrá dificultad en identificar cuál lado es la base y no podrá señalar los ángulos en la base y el ángulo en el vértice.

No se señala que el triángulo de vértices A, B y C se puede denotar de varias formas (ΔABC, ΔBCA o ΔBAC); es decir, que el orden de colocación de los vértices no influye en la notación del triángulo.

Los autores expresan que la congruencia de segmentos y el enunciado de la igualdad de sus longitudes significan lo mismo, esto es, $\overline{AF} \cong \overline{RF}$ y AF = RF son notaciones equivalentes. El estudiante podría asumir en términos de notación la siguiente igualdad $\overline{AF}$ = AF, lo cual es totalmente falso el primer miembro es un conjunto de puntos llamado segmento y el segundo miembro es un número real positivo que denota la longitud del segmento.

Los autores asumen el dominio pleno por parte del lector el significado del proceso que se debe seguir para realizar una demostración; sin embargo, de acuerdo al modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, esto ocurre cuando el estudiante está ubicado en el 4º nivel y, de acuerdo a la experiencia de los docentes - investigadores, en el mejor de los casos, la mayoría de los estudiantes alcanzan el 3º nivel. Desde el punto de vista didáctico, pudiera constituirse en un obstáculo el enfocar el contenido de los triángulos de una forma tan rigurosamente axiomática como se presenta en el texto de Moise y Downs (1970).

En concordancia con Urdaneta (2006) el uso inadecuado de las notaciones puede interferir en los procesos de comprensión de los conceptos geométricos y también va en detrimento de la adquisición por parte del estudiante de niveles superiores de formalidad matemática en donde las notaciones son convenios uniformes a lo largo del proceso de estudio de los conceptos geométrico-algebraicos y que dependen de circunstancias especiales.

Una definición geométrica clara debe permitirle al estudiante reproducir gráficamente el objeto matemático. Cuando se obvian condiciones se torna ambiguo el proceso de comprensión del concepto. El proceso concepto-definición requiere que no se considere implícito ningún elemento que conforma el concepto.

Finalmente, es importante resaltar que desde el punto de vista matemático, el texto de Moise y Donws (1970) presenta una estructura axiomática muy bien desarrollada, donde se respeta la formalidad y el rigor matemático que un libro de texto de este nivel amerita. Sin embargo, se sugiere que no se utilice como única bibliografía en un curso de Geometría dirigido a futuros profesores de Matemática; lo recomendable es que su uso sea complementado con otra literatura donde se considere el aspecto didáctico y los contenidos geométricos presente en el currículo de Matemática para la educación media.

Referencias

Arrieche, B. (2009). *Significados institucionales de la geometría del triángulo en la formación inicial de los profesores de matemática*. Trabajo de Ascenso a la Categoría Profesor Agregado. Departamento de Matemática UPEL-Maracay.

Arrieche, M. (2002). *La Teoría de Conjuntos en la Formación de Maestros. Facetas y factores condicionantes del estudio de una Teoría Matemática*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J y Batanero, C. (1994). Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3):1-26. Disponible:http://www.ugr.es/~jgodino/funcionesemioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf[Consulta: 2016, Noviembre 15]

Godino, J. D. y Arrieche, M. (2001). *El análisis semiótico como técnica para determinar significados*. Comunicación presentada en el V Simposio de la SIEIEM, Grupo de Trabajo DMDC. Almería, Septiembre 2001.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques* 22(2/3): 1-32. Disponible: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf[Consulta: 2016, Noviembre 15]

Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Disponible: http://www.ugr.es/~jgodino. [Consulta: 2016, Noviembre 15]

Iglesias, M. (2000). *Curso de resolución de problemas geométricos asistido por computadora*. Trabajo de Grado de Maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Maracay.

Moise, E. y Downs, F. (1970) *Geometría Moderna*. Estados Unidos: Addison-Wesley.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador. (1996). *Diseño curricular de la especialidad de Matemática*. Caracas: Autor.

Urdaneta, Y. (2006). *Significados institucionales de la parábola en el segundo año del ciclo diversificado.* Trabajo de grado de Maestría no publicado. Universidad Rómulo Gallegos. San Juan de los Morros

Van Hiele, Hiele, P.M. (1957): *El problema de la comprensión. En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría.* Tesis doctoral no publicada. Universidad Real de Utrecht: Utrecht, Holanda. Disponible:http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf. [Consulta: 2016, Diciembre 2]

Van Hiele, P.M. (1959). La pensée de l'enfant et la géométrie. *Bulletin de l'APMEP* 198, 199-205. Traducido al español por Ricardo Barroso. Disponible: http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/aprgeorefer.html. [Consulta: 2016, Diciembre 2]

Autores:

Belén Arrieche Alvarado
Profesora de Matemática con Maestría en Enseñanza de la Matemática y cursante del Doctorado en Educación Matemática; Integrante del Centro de Investigación en Enseñanza de la Matemática Usando Nuevas Tecnologías (CEINEM – NT); Docente – investigadora adscrita a la Línea de Investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría, UPEL Maracay. Miembro de la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT), Capítulo Aragua.
bjarriechea@hotmail.com

Mario Arrieche Alvarado
Profesor de Matemática con Maestría en Educación Superior mención Matemática por la UPEL-Maracay y Doctorado en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada. Miembro del Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM); Coordinador de la Línea de Investigación Perspectivas del enfoque semiótico antropológico para la didáctica de la Matemática, UPEL Maracay. Miembro de la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT), Capítulo Aragua.
marioarrieche@gmail.com

Martha de las Mercedes Iglesias Inojosa
Profesora de Matemática con Maestría en Enseñanza de la Matemática y Doctorado en Educación; Coordinadora del Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM); Integrante del Centro de Investigación en Enseñanza de la Matemática Usando Nuevas Tecnologías (CEINEM – NT); Coordinadora de la Línea de Investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría, UPEL Maracay. Miembro de la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT), Capítulo Aragua.
mmiglesias@gmail.com