ENSEÑANZA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN UNA ESCUELA DE ENSEÑANZA MEDIA PARA ADULTOS

Andrea Beatriz Castanetto
Escuela de Enseñanza Secundaria Orientada Particular Incorporada N° 3042 "Leonardo da Vinci", Escuela de Educación Secundaria Orientada N° 342 "Bernardino Rivadavia" y Escuela de Enseñanza Media para Adultos N° 1223 "Prof. Iris Caserio" (Argentina).
andreacastanetto@gmail.com
Natalia Fátima Sgreccia
nataliasgreccia@gmail.com
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (Argentina).

Recibido: 10/07/2018 **Aceptado:** 18/10/2018

Resumen

En el presente artículo se estudia cómo se enseña el Teorema de Pitágoras en un cuarto año de una escuela de nivel secundario para adultos ubicada en un contexto periférico de la ciudad de Rosario (Argentina). La propuesta se fomenta a través de la resolución de problemas complementada con actividades de fijación. El Teorema de Pitágoras, contenido prescripto en el diseño curricular específico, resulta rico para trabajarlo de esta manera. Se adopta a la Socioepistemología como corriente teórica de referencia. El enfoque metodológico es cualitativo, con diseño cuasi-experimental, alcance descriptivo y temporalidad transversal. Se empleó la técnica de observación de clases y se analizó la información desde dos categorías de interés: guía del docente y tratamiento del contenido. Fue posible advertir que los estudiantes adultos, que cuentan con varios años sin escolarizarse, no están acostumbrados a trabajar con esta metodología y, por lo tanto, aceptan la forma de dar clases de la docente.

Palabras clave: Educación de Jóvenes y Adultos, Resolución de Problemas, Teorema de Pitágoras.

TEACHING OF THE PYTHAGOREAN THEOREM THROUGH THE RESOLUTION OF PROBLEMS IN A MIDDLE SCHOOL FOR ADULTS

Abstract

In this paper, we study how the Pythagorean Theorem is taught in a fourth year of a secondary school for adults located in a peripheral context of the city of Rosario (Argentina). The proposal is promoted through problem solving complemented by fixing activities. The Pythagorean Theorem, content prescribed in the specific curricular design, is rich to work in this way. Socioepistemology is adopted as a reference theoretical current. The methodological approach is qualitative, with quasi-experimental design, descriptive scope and transverse temporality. The class observation technique was used and the information was analyzed from two categories of interest: teacher's guide and content treatment. It was possible to notice that adult students, who have several years without schooling, are not used to working with this methodology and, therefore, accept the way of teaching the teacher.

Keywords: Youth and Adult Education, Problem Solving, Pythagorean Theorem.

Introducción

A partir de nuestra experiencia docente hemos podido apreciar que la población de alumnos del nivel secundario para adultos, en su mayoría, busca en este tipo de institución una forma rápida y fácil de tener el título secundario, ya sea porque la modalidad exige menos horas de cursado, porque son menos años que en la secundaria “común” (es decir, no para adultos), o por un imaginario instalado socialmente.

Los alumnos de la escuela para adultos no encuentran motivación alguna en la misma; sostienen que concurren a ella por un mandato social, ya que la mayoría no trabaja en ámbitos formales (donde es más usual exigir cierto tipo de certificación) y no piensa seguir estudiando alguna carrera de nivel superior al finalizar el secundario. Mucho menos encuentran motivación en la clase de matemática, al considerarla repetitiva, con ejercicios de características similares, sin ningún conflicto cognitivo que pueda impulsarlos al quehacer matemático.

La mayoría del estudiantado trabaja, tiene familia y va con cierto desgano a la escuela. Sostienen que las horas de estudio solo se dan en la institución escolar y que no debe exigírseles esfuerzo fuera de ese horario. Por lo general, no realizan tareas en sus respectivos hogares, no arman grupos de estudio para realizar trabajos escolares de exposición ni le dedican parte de su tiempo al estudio para una cierta instancia de evaluación. Además suele existir una brecha de edad entre sus compañeros, marcándose la diferencia de tiempo en que no han tenido contacto con la matemática o la escuela. Otra de las dificultades que se encuentra en este tipo de establecimientos es la gran cantidad de inasistencias por parte del alumnado, lo cual presenta un obstáculo en la continuidad del desarrollo de un tema.

Ante una población de alumnos que vienen desganados a la escuela, con un horario escolar nocturno, después de un largo día de trabajo, consideramos necesario que las clases a las que concurren sean dinámicas. Una posibilidad metodológica para ello es el trabajo A Través de la Resolución de Problemas (AT/RP), dado que esta metodología ayuda a que los estudiantes le encuentren sentido a los quehaceres escolares y mejoren su actitud ante la clase de matemática (De Guzmán, 2007).

Por otro lado, el Teorema de Pitágoras (TP), contenido con considerable riqueza conceptual y aplicabilidad práctica, está en la currícula de la materia en cuarto año de las escuelas para jóvenes y adultos (Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, 2003). Se pretende que mediante la metodología AT/RP los estudiantes, acompañados convenientemente por el docente del curso, puedan “descubrir” dicha propiedad.

El TP resulta propicio para aprender matemática AT/RP. Este contenido es rico en sí mismo, ya que es un inicio para descubrir varios conocimientos, como el conjunto de los números irracionales o trigonometría. Es uno de los más importantes hallazgos de la Escuela Pitagórica; hasta hizo que esta Escuela flaqueara en su teoría, al toparse con la irracionalidad de la medida de la diagonal del cuadrado unitario. Han pasado 2500 años desde su descubrimiento y el TP sigue presente. Una explicación razonable para una vigencia tan prolongada es que se trata de un resultado básico con una multitud de aplicaciones (Alsina, 2010).

Es así que, ubicados en cuarto año de una Escuela de Enseñanza Media para Adultos de la ciudad de Rosario (provincia de Santa Fe, Argentina), puntualmente mediante una propuesta didáctica basada en la metodología AT/RP y particularizada en el contenido TP, interesa conocer cómo se produce la guía del docente en el tratamiento del contenido.

En cuanto al docente, Reyes (2017) sostiene que las creencias de los profesores, con fuerte impacto en la práctica docente, en torno al TP son un indicador de un reduccionismo didáctico sobre este saber. El autor entiende por reduccionismo didáctico a la falta de interacción entre los contextos de uso que dan significado a los conceptos, así como una carencia de referentes históricos y epistemológicos asociados al entendimiento de los saberes matemáticos. A partir de trabajar con cinco profesores de una escuela preparatoria pública de México (ingenieros industriales y cuatro de ellos cursaron una maestría en enseñanza de las matemáticas o tecnología educativa) y un profesor de matemática y física de carreras de ingeniería (egresado de una licenciatura en matemática aplicada y una maestría en matemática), basa su trabajo en el análisis de creencias por ellos enunciadas. Se encuentra con seis categorías de análisis, entre las que destacamos: i) los docentes solo escriben la fórmula; ii) refieren a la comparación de áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo (demostración geométrica); iii) omiten aspectos históricos y epistemológicos; y iv) no visualizan su generalización o extensión.

Consideramos que una forma para introducir el TP es la de enseñar matemática AT/RP. Barros (2013) sostiene que el alumno aprende matemática partiendo de una situación problemática, teniendo un objetivo, usando estrategias convenientes para buscar la solución del problema. Se despliega con una participación activa de los estudiantes, que pueden trabajar en pequeños grupos, siendo propicio para la construcción del conocimiento matemático.

Es crucial el papel del profesor y la acción comienza con la elección y preparación del problema adecuado al concepto que pretende construir. El docente no es el centro de la actividad, lo cual propicia en los estudiantes más responsabilidad por el aprendizaje que quieren lograr. El profesor se convierte en un investigador, en el sentido de buscar un problema para identificar focos matemáticos importantes, para determinar las mejores estrategias posibles en la resolución del problema. Fomenta el trabajo colaborativo e interviene en la clase cuando es necesario.

Barreto (2012), en su experiencia, llega a la fórmula del teorema del coseno a través de la demostración geométrica del TP, utilizando material manipulativo concreto. Toma las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo, para luego extenderlo a triángulos oblicuángulos. Sostiene que este procedimiento le da una "idea" al alumno para resolver deductivamente el problema (conjeturando afirmaciones que se prueban) y conduce a la solución del mismo teniendo en cuenta las áreas de los cuadrados involucrados. Como siguiente paso explicitan el TP que les servirá de herramienta para aplicarlo a triángulos oblicuángulos y así deducir el teorema del coseno.

Marco Teórico Referencial

Para realizar esta investigación nos basamos en la Socioepistemología, en tanto corriente teórica que se ocupa del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. A partir de esto, se forman discursos, como el discurso matemático escolar, que facilitan la representación en matemática alcanzando un consenso entre los actores sociales. Considera los problemas simples y primordiales como uno de los medios más seguros para el descubrimiento de leyes matemáticas (Cantoral, Montiel y Reyes, 2015). En este trabajo específicamente desde la Socioepistemología se pretende enmarcar el entendimiento de los procesos que se dan en las clases, donde los estudiantes en grupos de pares acompañados por el docente, procuran ir descubriendo el TP.

Por otro lado, desde el Ministerio de Educación de Santa Fe (2003) se considera que la EDJA se perfila como uno de los instrumentos más eficaces para contribuir a la construcción de una sociedad sin exclusiones. Destaca que las adaptaciones curriculares de esta modalidad pretenden brindar las condiciones propicias para el ejercicio de una educación permanente, en las que se recuperan las experiencias cotidianas y del mundo laboral que intervienen en la construcción de conocimientos, capacidades y habilidades de esta población. Esto con el fin de brindar una respuesta válida que les permita afrontar los desafíos de la vida política, ciudadana y del mundo del trabajo, como protagonistas y constructores de su propia vida a través de la participación, la conciencia crítica y el rescate de actitudes y valores que posibiliten el establecimiento de nuevas relaciones sociales en un ámbito de solidaridad y democracia.

La población destinataria de la EDJA son jóvenes y adultos que acrediten la primaria completa y cumplan 18 años al 30 de junio, o jóvenes y adultos que acrediten la no completitud del nivel secundario. El propósito fundamental es generar procesos organizados de educación de modo que sus destinatarios puedan adquirir, actualizar, completar o ampliar sus conocimientos y aptitudes para su desarrollo personal y profesional. Lo realizan mediante ofertas educativas variadas, abiertas y flexibles que les permitan adquirir competencias básicas para saber razonar, saber hacer, saber ser y aprender a convivir. Esto posibilita responder a sus expectativas personales, asumiendo a su vez que son parte del mundo que los rodea y que pueden mejorarlo a través de su participación, adoptando una postura de ciudadanos autónomos y comprometidos con su entorno.

Se le atribuye a Pitágoras y sus seguidores el nacimiento de la matemática como ciencia teórica en el siglo VI a.C. Fue quien comprendió que había que asegurar la certeza de las proposiciones para poder construir con ellas una demostración lógica. Para ello tomó a la lógica (elemento fundamental de la filosofía) y la aplicó a la matemática. Para los pitagóricos la matemática era la explicación del mundo y el instrumento para comprenderlo era el camino para hallar la perfección. La influencia de su filosofía y su ciencia impregnó la cultura occidental durante los siguientes 2000 años. La doctrina pitagórica fue una síntesis entre misticismo y pensamiento racional, una mezcla de ciencia y religión que proponía un auténtico estilo de vida. Pitágoras nació alrededor del año 570 a.C. en la isla de Samos. Durante su juventud se dedicó a viajar por los mayores centros de la civilización, entre ellos Egipto, Persia, Babilonia, Crotona y Metaponto, de donde absorbió su literatura, su religión, su filosofía y su matemática (Alsina, 2010). A partir de esto se pueden identificar elementos heredados, aprendidos y procesados por Pitágoras a lo largo de sus viajes. Entre sus descubrimientos se destaca su proposición acerca de los triángulos rectángulos: que la suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa. Tiene el nombre reconocido a nivel internacional de “Teorema de Pitágoras”.

En este contexto, resulta fundamental que el profesor ayude al alumno a resolver un problema, si bien el estudiante debe asumir una parte considerable del trabajo. Según Polya (1965), este trabajo se produce mediante cuatro fases: comprensión del problema; concepción de un plan; ejecución del plan y visión retrospectiva. Al transitarlas, el docente no debería dejar solo al estudiante pero tampoco ayudarlo demasiado. Deberá realizar preguntas adecuadas y flexibles que se le hubiesen podido ocurrir al alumno y que permitan abordar el problema de diferentes maneras.

Consideramos importante diferenciar problema de ejercicio. En primer lugar la distinción es de acuerdo al contexto del alumno, ya que la misma situación puede ser un problema o un ejercicio dependiendo del mismo.

La realización de ejercicios se basa en el uso de destrezas o técnicas sobreaprendidas (convertidas en rutinas automatizadas como consecuencia de una práctica continuada). Los ejercicios matemáticos no solo son la repetición de las operaciones matemáticas sino también otro tipo de tareas en las que el alumno no tiene que tomar ninguna decisión acerca de los procedimientos que tiene que utilizar para alcanzar la solución. Los ejercicios sirven para consolidar y automatizar ciertas técnicas, destrezas y procedimientos que también son necesarios en matemática.

En la solución de problemas, las técnicas sobreaprendidas, previamente ejercitadas, constituyen un medio o recurso instrumental necesario, pero no suficiente, para alcanzar la solución; además se requieren estrategias, conocimientos conceptuales, actitudes, etc. Los procedimientos utilizados para solucionar problemas dependen tanto del tipo de conocimientos que poseen los sujetos como de las características del contenido que se aplica (Pozo, del Puy y Postigo, 1994).

Una vez diferenciados estos dos conceptos, en esta investigación se introduce el TP mediante una propuesta didáctica encuadrada en el enseñar y aprender matemática AT/RP (Gaulin, 2001). Aquí, el docente propone problemas a los alumnos y los orienta mientras tratan de resolverlos, convalidando la eventual necesidad de establecer nuevos conceptos. El profesor presenta gradualmente aspectos del nuevo contenido (institucionalizaciones parciales), que van surgiendo al abordar nuevas situaciones problemáticas, siempre intercalando el trabajo de los estudiantes que avanzan hasta donde pueden en la resolución de sucesivos problemas.

Según De Guzmán (2007), la enseñanza de la matemática AT/RP pone énfasis en los procesos de pensamiento y de aprendizaje. Se prioriza que el alumno manipule los objetos matemáticos, active su propia capacidad mental, ejercite su creatividad, reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente, adquiera confianza en sí mismo y se prepare para otros problemas de la ciencia.

Con esta metodología el alumno conecta o ancla la nueva información, contenido o idea de modo sustancial con algún aspecto relevante (una imagen, un símbolo, un concepto o una proposición) o subsunsor pre-existente en la estructura cognitiva del sujeto, es decir, aprende significativamente (Ausubel, 1976). Cabe recordar que para que se dé un aprendizaje significativo se requieren dos condiciones: que el sujeto muestre una actitud y disposición positiva para relacionar sustancialmente el material nuevo con su estructura cognoscitiva y que el material que vaya a aprender sea potencialmente significativo para él, especialmente relacionable con su estructura de conocimiento, de modo intencional.

Aspectos metodológicos del estudio

El enfoque adoptado es cualitativo, ya que no se efectúa una medición numérica ni se pretenden generalizaciones; procura dilucidar vías para entender el desempeño del docente, en situaciones específicas de aula. El diseño es cuasi-experimental, dado que se emplea una propuesta de enseñanza intencionalmente diseñada y se implementa en un curso de alumnos previamente existente. Tiene alcance descriptivo, porque busca caracterizar el modo en que trabaja el docente con la metodología AT/RP al enseñar el TP. La temporalidad ha sido transversal (trabajo en clase en cierto momento dado).

Los sujetos son los alumnos y la profesora de matemática de cuarto año de una Escuela Media para Adultos de gestión estatal de la ciudad de Rosario ubicada en un barrio periférico. El edificio donde funciona es compartido con una escuela de nivel primario, habiendo delimitaciones específicas para cada nivel.

El horario de cursado se divide en dos módulos: el primero de 20 a 21 hs y el segundo de 21:30 a 22:50 hs. Las clases de matemática tienen lugar los días martes en el segundo módulo y los días viernes en el primer módulo. La escuela cuenta con comedor escolar (“copa de leche”) en los 10 minutos que dura el recreo, donde a los alumnos se les otorga un sándwich con una fruta. Muchas veces, los alumnos terminan de comer en la hora de clases, lo cual está permitido.

En cuanto al ingreso, los alumnos llegan hasta media hora más tarde al establecimiento alegando que, por motivos personales, no pueden asistir en el horario estipulado.

Este curso en particular cuenta con 30 inscriptos pero habitualmente una quinta parte no concurre. En la lista de la docente se encuentran estudiantes que nunca asistieron a la clase de matemática; lo mismo ocurre en otras materias.

A continuación se precisan algunas características del grupo (información recogida a través de una encuesta aplicada a los 24 alumnos presentes):

Edad: las tres cuartas partes tiene entre 18 y 25 años. Del resto, tres tienen entre 31 y 50 años, dos entre 26 y 30, y uno no contesta. Es decir, este curso se caracteriza por ser un grupo relativamente joven en el contexto en cuestión (EDJA).

Sexo: en el grupo hay una cantidad semejante de mujeres (13) y varones (10); uno no contesta.

Motivos de deserción de la escuela secundaria “común”: prácticamente la mitad de los estudiantes tuvo la necesidad de un ingreso temprano al mundo laboral. Otros dos, posiblemente vinculado con lo anterior, mencionaron dificultades económicas. También aludieron obstáculos en la continuidad de su trayectoria escolar (5), tanto en términos de repitencia (4) como de materias previas (1). Otros motivos indicados fueron: embarazo precoz (2), falta de motivación (2), problemas familiares (1), año sabático (1) y otros (1).

Realización de actividades fuera de la escuela: la mayoría (21) afirma hacerlo. En particular, 14 trabajan y uno de ellos, además, se capacita para una profesión. De los 7 restantes, realizan algún deporte (3), se capacitan para una profesión (2) o son amas de casa (2).

Familiares a cargo: la mitad revela tener al menos un familiar a cargo. De estos, tienen hijos (8), viven con su cónyuge (5) o tienen otro familiar a cargo (4), como por ejemplo al padre o madre.

Contribuciones que perciben en la escuela para adultos en general: 23 responden. De ellos, pretenden un mejor empleo (8), quieren seguir un estudio superior (8) -un alumno menciona ambos-, manifiestan obtener mayor conocimiento (3), buscan mejorar la calidad de vida (3), solo pretende terminar la escuela (1) y la escuela no le puede aportar nada (1).

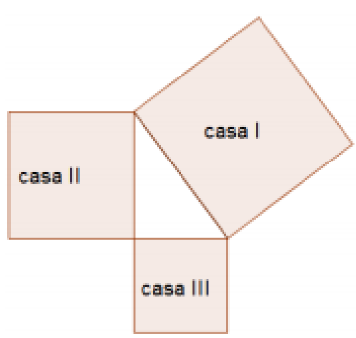
Contribuciones que perciben en la escuela para adultos en matemática en particular: 14 responden. De ellos: la matemática sirve para la vida cotidiana, para resolver problemas (7), necesitan saber conceptos matemáticos por las carreras que estudiarán (3), relaciona al espacio curricular con el trabajo que realiza actualmente (1), alegan que la matemática no les aporta nada (3).

El grupo de alumnos observado es participativo en las clases de matemática. En su mayoría, trabajan en las clases y, a diferencia de lo habitual (señalado en la presentación), una gran parte realiza las tareas propuestas por la docente. Se destaca que algunas alumnas, al ser madres, concurren con sus hijos a clases ante una situación de emergencia, permitiendo la institución que esto suceda.

La docente de matemática a cargo del curso tiene 56 años de edad, cuenta con el título de Profesora de Matemática, Física y Cosmografía, tiene 20 años de antigüedad en la docencia y en la escuela donde se realiza el trabajo de campo cuenta con ocho horas cátedras desde abril de 2004. Comenzó a trabajar como docente interina y desde inicios del año 2006 es profesora titular de los dos cursos que posee actualmente. Además se desempeña como vice directora del turno tarde de un colegio secundario público del centro de Rosario.

Para obtener la información que se comparte en este artículo se empleó la técnica de *observación de clases* en las que se implementaron actividades para desarrollar el TP, a través de situaciones problemáticas especialmente diseñadas en el marco de la metodología AT/RP mediante la siguiente propuesta:

1) *En el estudio de arquitectura Construcciones se presenta un caso de una vecindad en donde los dueños de tres casas comparten un patio de forma de triángulo rectángulo, como muestra la figura.*



Las casas están sobre terrenos cuadrados de 10m, 8m y 6m de frente respectivamente.

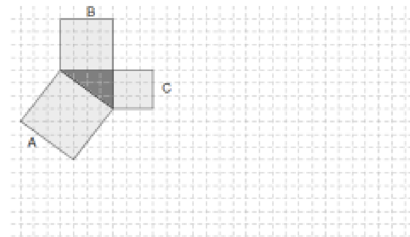
El dueño de la casa II y el dueño de la casa III son padre e hijo, y sostienen que el patio les corresponde a ellos. Pero el dueño de la casa I difiere de lo dicho anteriormente, ya que sostiene que el patio le corresponde porque su casa es más chica que las casas II y III juntas. Construcciones les propone dividir el patio con una medianera, de forma proporcional a la superficie de las casas que le corresponde a cada dueño.

a) ¿Cuál es la superficie de la casa I?

b) ¿Cuál es la superficie total de las casas II y III?

c) ¿A qué dueño le corresponde más superficie de patio?

2) *Un amigo del dueño de la casa I contrata a Construcciones ya que en su patio hay un cantero de forma de triángulo rectángulo y quiere modificarlo de manera que el mismo sea una fuente y en cada lado se construya un cuadrado para que sean canteros.*



En el gráfico se muestra el plano del patio donde Construcciones modificó el cantero inicial:

Se sabe que los lados de la fuente miden 50cm, 40cm y 30cm. Se desea saber:

a) La superficie que se necesita para rellenar con tierra cada cantero.

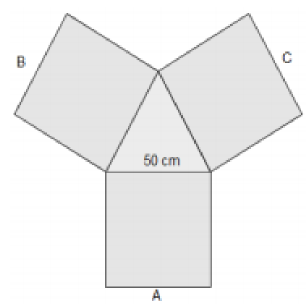
b) ¿Qué relación se puede establecer entre los canteros de lado A, lado B y lado C?

3) *El propietario del patio de la situación anterior desea dividir a los canteros cada 10 cm para que queden formados cuadrados en el interior de cada uno y luego colocar una flor en el centro de cada cuadrado.*

a) ¿Cuántas flores colocará en cada cantero?

b) ¿Se puede establecer la misma relación que en el ejercicio anterior entre la cantidad de flores que necesita el cantero de lado A y la cantidad de flores de los canteros de lados B y C?

4) *Si el dueño del patio ahora quisiera hacer una fuente con forma de triángulo equilátero de lado 50 cm, ¿se establece la misma relación entre las superficies de estos canteros?*



Completar:

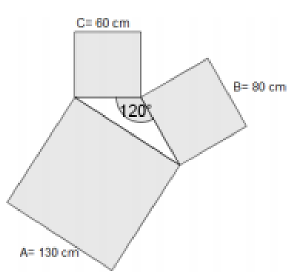
Sup. Cuadrado de lado A=……

Sup. Cuadrado de lado B =……

Sup. Cuadrado de lado C=……

Sup. Cuadrado de lado A ….Sup. Cuadrado de lado B + Sup. Cuadrado de lado C

5) *Y si la fuente es un triángulo como muestra la siguiente figura:*



a) ¿Cuánta superficie deberá rellenar con tierra en cada cantero?

b) Relacionar la superficie del cantero de lado A con las superficies del cantero de lado B y de lado C.

Completar:

Sup. Cantero de lado A=….

Sup. Cantero de lado B=….

Sup. Cantero de lado C=….

Sup. Cantero de lado A ….Sup. Cantero de lado B + Sup. Cantero de lado C

Luego de resolver las situaciones problemáticas, la docente y los alumnos enuncian el TP, quedando plasmado en las carpetas de los alumnos y en el pizarrón.

Por último se acordó que los alumnos, para fortalecer la comprensión del TP, prueben la relación de las áreas con material manipulativo concreto (figuras en cartulina), partiendo de la figura de un triángulo rectángulo y tres cuadrados cuyos lados se corresponden con los lados del triángulo. Luego se desarrollaron actividades de aplicación, propuestas por la docente del curso. El tratamiento del tema comprendió seis clases, desarrolladas durante un mes.

Para el análisis respectivo nos valemos de dos categorías[1]: *guía del docente* y *tratamiento del contenido*, devenidas a partir de un entramado teórico-empírico, que conjugan distintas modalidades de acuerdo a lo observado.

En lo que sigue se comparten los principales hallazgos del estudio de acuerdo a cada una de estas categorías de interés.

Guía del docente

Constituida por las *pautas de trabajo* que se proponen desde la enseñanza, cierto tipo de preguntas que conducen inexorablemente a respuestas correctas -*efecto Topaze* (Brousseau, 2007)- y los modos en que se produce un *redireccionamiento de respuestas* de los estudiantes.

Pautas de trabajo

Comprende los momentos donde se ha de realizar una actividad; estos pueden venir acompañados por indicaciones de la docente para entender el problema -paso 1 para resolver problemas según Polya (1965)- o, incluso a veces, carecer de algún intercambio de ideas.

La docente ayuda a los alumnos con algunas recomendaciones que pueden tener en cuenta para realizar el problema 1.

> *1-P-5[2]: Muy bien, leído el problema, ahí tienen para trabajar. Fíjense que ya tienen en el esquema de cómo están las casas, cuál es el frente de cada casa, cuál es el patio que comparten, entonces, en el grupo decidan cómo empezar a resolver este problema. El que no lo entiende lo volvemos a leer y van a tener que contestar las preguntas. Una buena forma de empezar es poniendo los datos sobre el esquema así pueden visualizar y resolver el problema.*

Luego de haber sido resueltos los cinco problemas propuestos para introducir el TP, la profesora invita a los alumnos a que redacten una conclusión basándose en lo que vieron hasta el momento. Se percibe cierta desorientación por parte de los estudiantes, por lo que la docente debe explicar varias veces ante las consultas que recibe.

La docente indica cómo proceder para retomar lo dado en la clase anterior.

> *3-P-1: De la última clase ustedes tenían que redactar una conclusión para ver cómo habían interpretado esos problemas. Necesito que la lean por grupo o que cada uno cuente lo que escribió.*

---

[1]Esta investigación forma parte de otra más amplia (Castanetto, 2016) que contempla, además, otras categorías de análisis.

[2]Este código alude al número de clase (de 1 a 6), al emisor de la palabra (P o A) y al número de acto de habla (de acuerdo a lo transcurrido en la clase). Así, por ejemplo, “1-P-5” hace referencia a un extracto de la primera clase (1), en particular del quinto acto de habla (5), el cual fue emitido por la profesora (P).

También, cómo registrar instancias de institucionalización.

3-P-23: Muy bien, Teorema de Pitágoras. Entonces escribimos la fecha de hoy, y escribimos la conclusión porque es algo obligatorio, pero la vamos a formalizar, es decir, la vamos a escribir con palabras apropiadas.

Sugiere modos de reconocer los lados de un triángulo rectángulo.

3-P-44: Siempre la hipotenusa es el mayor de los lados. Y los otros dos son el cateto mayor y el menor.

Orienta a los alumnos en la resolución de una actividad.

3-P-72: Fíjense qué tipos de triángulos quedaron determinados cuando marcamos la diagonal. 3-A-73: Rectos. 3-P-74: Dos triángulos rectángulos. Necesitamos saber cuántos metros de alambre necesito para dividir el terreno. De acuerdo a los datos del problema, hay un dato que me falta. ¿Cuál es el dato que me falta? 3-A-75: La hipotenusa. 3-P-76: La hipotenusa. ¿Pueden calcular la hipotenusa? (Los alumnos asienten). 3-P-77: Bueno, hagan.

La profesora había dictado una actividad:

4-P-10: … "De los tres problemas a continuación, indicar en cuál o en cuáles se puede aplicar el Teorema de Pitágoras, en los que sea posible aplicarlo, resolverlo. 1) Una escalera de 10 metros de longitud se coloca sobre una pared separada 6 metros de la base. ¿Cuál es la altura a la que llega? 2) Una rampa de acceso a un edificio debe llegar a una altura de 4 metros y está separada 3 metros de la base. ¿Qué longitud tiene la rampa? 3) Un terreno tiene forma de triángulo equilátero, su perímetro es de 18 metros. ¿Cuál es la superficie?".

Durante la clase se observa que la docente no les da el tiempo esperado para resolver la primera y tercera actividad, pero sí la segunda. Se advierte que las actividades 1 y 3 tienen variantes con respecto a lo que venían desarrollando (en la primera deben calcular un cateto y en la tercera deben descubrir el triángulo rectángulo trazando la altura del triángulo equilátero) tratándose, por ello, de genuinos problemas; mientras que en la 2 no (es del tipo de que venían realizando). Es decir, en las actividades con variantes la docente de alguna manera acelera los procesos sin dejar tiempo a los pasos de resolución requeridos. Además, cabe advertir que en las tres actividades es posible aplicar el TP (la profesora había anunciado que los alumnos debían darse cuenta en cuáles no se podía aplicar dicha propiedad).

4-P-11: ¿Listo? ¿Ya decidieron cuál podían resolver? 4-A-12: Profe, ¿se puede hacer en grupo? ¿No? 4-P-13: Claro. 4-A-14: Profe, ¿longitud es el número? 4-P-15: Longitud es la medida, cuánto mide el lado, es lineal… 4-P-17:… ¿Pudieron decidir en cuáles pueden aplicar el Teorema de Pitágoras? 4-A-18: No. 4-P-19: Bueno, recuerden que desde hace unas clases estuvimos trabajando con el Teorema de Pitágoras, descubriendo cuál era su fórmula, descubriendo cuál era su enunciado. Vamos a utilizar este conocimiento para aplicarlo en problemas. Tenemos que acordarnos que hay un triángulo rectángulo, que tiene una hipotenusa y dos catetos y que la relación que existe entre la hipotenusa y los catetos, ¿cuál era?... 4-P-53: Bueno, pasemos al segundo problema para analizar cómo se resuelve. Les dejo 5 minutos para resolverlo… 4-P-58: Bien, hasta ahora, a estos dos problemas los pudimos resolver con el Teorema de Pitágoras, vamos a ver el tercero. (La docente comienza con la resolución escribiendo en el pizarrón mientras explica).

Luego de recalcar que el TP se aplica a triángulos rectángulos, la docente comienza con la resolución de la tercera actividad, que involucra en primera instancia un triángulo equilátero. Aquí, como se anunciara, los alumnos están ante un nuevo procedimiento.

> *4-P-59: Por empezar tenemos un triángulo equilátero de 18 metros de perímetro, los tres lados son iguales. Acá tenemos un impedimento porque para el Teorema de Pitágoras tenemos que tener un triángulo rectángulo. Si el perímetro es de 18 metros, ¿cuánto mide cada lado?*

Si bien se rescata la intencionalidad de darle un cierre al grupo de tres actividades, la docente tendría que, por ejemplo, haber indagado en cómo "encontrar" un triángulo rectángulo dentro de uno equilátero (en la tercera propuesta) y no quedar en que solo fue una dificultad.

> *4-P-74:… Entonces, en los tres problemas, ¿pudimos aplicar el Teorema de Pitágoras? 4-A-75: Sí. 4-P-76: Con una dificultad el último, pero lo pudimos aplicar.*

Como cierre, también, podría preguntar qué se aprendió en cada actividad y que los alumnos cuenten con sus palabras.

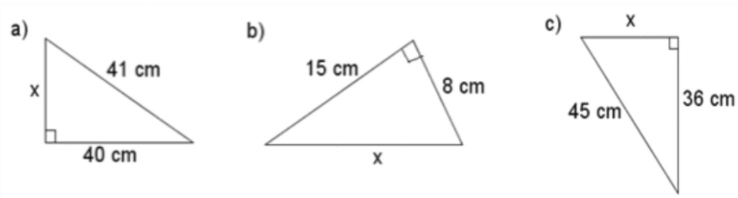
Luego de resolver la tercera actividad, la docente realiza una síntesis procedimental que conjuga datos (catetos/hipotenusa) con cálculos para hallar el lado desconocido, sin invitar a que los alumnos expresen lo realizado por ellos mismos, como se sugiere en la metodología AT/RP.

> *4-P-78: Tienen que fijarse dónde están los datos. Si tienen los catetos, calculan la hipotenusa directamente con la fórmula. Si tienen que averiguar cualquiera de los dos catetos, va a ser la hipotenusa al cuadrado menos el otro cateto al cuadrado, y a eso le saco la raíz cuadrada. Entonces, si quiero averiguar la hipotenusa, le saco la raíz cuadrada a la suma de los cuadrados de los catetos, y si quiero averiguar un cateto, a la hipotenusa al cuadrado, le resto el otro cateto al cuadrado.*

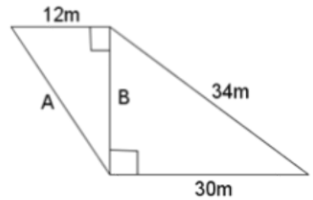
Las siguientes actividades realizadas en la última instancia de la cuarta clase podrían estar relacionadas con las tres actividades dictadas al principio de la misma (analizadas recientemente, que involucraban una escalera, una rampa y un triángulo equilátero).

Ejercicio

Aplicar el Teorema de Pitágoras. Calcula x.



Se tiene que armar la siguiente estructura con caños. ¿Cuántos metros de caño se necesitan?



Por ejemplo, si la primera actividad contara con un triángulo equilátero (con la medida de los lados como dato), los alumnos buscarían en él el triángulo rectángulo para calcular la altura. Además, cabe mencionar que en el título podría omitirse "Aplicar el Teorema de Pitágoras", ya que es justamente el medio que conduce al fin (segunda parte de la consigna: "Calcula x"). Por otro lado, hay un salto demasiado marcado entre esta actividad y la siguiente (estructura con caños), lo que no se condice con la metodología AT/RP (graduación en las sucesivas dificultades). En la segunda los alumnos deben tomar decisiones (¿calculo primero A o B?) con una serie de procedimientos no directos (calcular B, calcular A, sumar las medidas de todos los lados sin repetir B) que en la primera actividad no se encuentran.

La docente tendría que indagar, por ejemplo, por qué primero deben averiguar el lado B y no el A.

> *5-P-7: Muy bien, si tenemos un triángulo rectángulo, la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo de 90 grados, y los otros dos lados son los catetos. Bien, teníamos en este problema una estructura y queríamos saber cuántos metros de caño necesitábamos. ¿Qué lado averiguaron primero? 5-A-8: El lado B. 5-P-9: Claro, el lado B.*

La docente, en su guía, indica el compromiso que deben asumir los alumnos de una escuela para adultos, por más que tengan otras responsabilidades.

> *6-P-32: No, lo que tenés que hacer cuando faltás es pedirle las cosas que hicimos a un compañero y traerlas copiadas para la próxima clase. 6-A-33: Pero yo trabajo profesora, no tengo tiempo. 6-P-34: Bueno, pero si vienen a la escuela es porque quieren terminar el secundario, y para aprobar Matemática tienen que ser responsables y hacerse el tiempo para completar las carpetas y estudiar. 6-A-35: Sí, voy a pedir las cosas para completarla.*

Efecto Topaze[3]

Se observa cuando la docente hace preguntas a los alumnos que ya sabe que van a contestar correctamente. Es la profesora quien produce el hilo del razonamiento y los alumnos van contestando, a modo de ping-pong, palabras "sueltas" (asociaciones, datos, resultados).

[3]Brousseau (2007) define como "efecto Topaze" o el "control de la incertidumbre" como aquella circunstancia donde el alumno llega a la respuesta correcta de una actividad, pero no es por sus propios medios, sino que el docente realiza la resolución.

> *1-P-8: Bueno, vamos a corregir el problema uno. ¿Cuál es la medida de la casa uno? 1-A-9: 10 metros. 1-P-10: ¿La casa dos? 1-A-11: 8 metros. 1-P-12: ¿La casa tres? 1-A-13: 6 metros…*
> *2-P-98: Muy bien, y en cada lado quiere construir un cantero cuadrado. Si estos tres cuadrados son iguales, ¿cómo va a ser la superficie de los tres cuadrados? 2-A-99: Iguales. 2-P-100: Muy bien, los tres canteros cuadrados tienen la misma superficie. ¿Cuánto vale la superficie de cada cantero cuadrado? 2-A-101: Lado al cuadrado. 2-P-102: Muy bien. ¿Se puede establecer la misma relación entre los lados? 2-A-103: No…*
> *4-P-22: Claro, esta fórmula es la que vamos a aplicar siempre, la tienen que tener a mano. Si yo puedo plantear un problema, que la figura que se forme es un triángulo rectángulo, y a ese triángulo rectángulo le voy a poner los datos, aplicar el Teorema de Pitágoras es más fácil, siempre que tenga ese tipo de figura. ¿Qué pasó con la escalera de 10 metros de longitud que se apoya sobre una pared, separada a 6 metros de la base? ¿Qué forma tiene esta estructura? 4-A-23: Un triángulo rectángulo.*

Los alumnos atinan solo a contestar las preguntas puntuales realizadas por la docente; además, afirman que necesitan ayuda para resolver una actividad cuando es la profesora quien realiza la misma, es decir, inconscientemente validan esta forma de proceder.

> *4-P-31: ¿Qué tendrían que plantear ustedes como primera medida? 4-A-32: La fórmula. 4-P-33: ¿Cuál es la fórmula? 4-A-34: La del Teorema de Pitágoras. 4-P-35: Bueno, la hipotenusa mide 10 metros y los catetos, uno mide 6 metros y al otro no lo conocemos. Yo digo que la hipotenusa al cuadrado tiene que ser igual a la suma de los catetos al cuadrado, ¿cuánto vale la hipotenusa en este caso? 4-A-36: 10. 4-P-37: 10 metros, ¿qué le tengo que hacer a 10 metros en la fórmula? 4-A-38: Elevarlo al cuadrado. 4-P-39: ¿A qué va a ser igual? ¿A la suma de qué catetos? 4-A-40: A 6 metros al cuadrado y la altura al cuadrado, que no la conocemos. 4-P-41: Muy bien, 10 al cuadrado les da 100, 6 al cuadrado les da 36. (Va registrando en el pizarrón). ¿Hay algo que ustedes puedan hacer acá? 4-A-42: Pasar el 36 para el otro lado, restando. 4-P-43: Bueno, ¿pueden terminar el problema, solos? 4-A-44: Sí, pero para empezar necesitábamos un empujoncito, porque no nos dábamos cuenta de cómo resolverlo.*

La docente guía a los alumnos para el pasaje de centímetros a metros, siendo ella la que realiza el razonamiento y no los alumnos (ellos efectúan cuentas).

> *5-P-41: Veamos de esta otra manera, ¿por cuánto dividimos a 100 centímetros para llegar a 1 metro? 5-A-42: Por 100. 5-P-43: Claro, entonces a 5600 centímetros, ¿qué le tenemos que hacer para pasarlo a metros? 5-A-44: Dividirlo por 100. 5-P-45: Muy bien, entonces si a 5600 lo dividimos por 100, ¿cuánto nos da? 5-A-46: 56. 5-P-47: Muy bien, tenemos que 5600 centímetros son 56 metros. Entonces la base del rectángulo del tercer problema mide 56 metros. Anoten en los datos del gráfico que la base mide 56 metros.*

En la justificación que sigue la profesora es quien efectúa el razonamiento y los estudiantes se restringen a asociaciones inmediatas. Para una mayor comprensión por parte de los alumnos resultaría propicio plantear al menos un ejemplo numérico de lo que se está tratando ($3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$; $(3 + 4)^2 = 7^2 = 49$).

> *6-P-55: No, esa no es una justificación. Pensemos en el enunciado, dice "la raíz cuadrada de la suma de los catetos al cuadrado" (mientras, lo escribe en el pizarrón). Entonces nos queda que H es igual a B más C todo al cuadrado. ¿Es la misma fórmula que veníamos usando? 6-A-56: Sí, es la misma, lo único que tiene el dos en cada cateto. 6-P-57: Bueno, ahí está el error, no es lo mismo la suma de los catetos al cuadrado, como está en el pizarrón, que la suma de los cuadrados de los catetos (escribe esto último al lado de la fórmula anterior). No nos va a dar el mismo resultado. 6-A-58: Entonces esta también es falsa. 6-P-59: Claro, también es falsa y la justificación es que*

> *no es lo mismo la suma de los catetos al cuadrado que la suma de los cuadrados de los catetos, porque nos da distinto resultado…*

Redireccionamiento de respuestas

Se produce cuando los alumnos dan una respuesta incorrecta o imprecisa a las preguntas de la docente. Dentro de este grupo se distinguen tres comportamientos:

a) Los alumnos llegan a la respuesta correcta, opción -dentro de las tres observadas- que más se condice con la metodología AT/RP.

> *1-P-35: Le vamos a poner un nombre a la hipotenusa: A, y los otros dos lados los vamos a llamar B y C. Vamos a relacionar los lados, si yo elevo al cuadrado la hipotenusa, ¿va a ser igual a qué valores?1-A-36: A B y a C.1-P-37: ¿A B y a C? ¿O a qué parte de B y C? ¿Qué les hago a B y a C para calcularles la superficie? 1-A-38: ¿Cómo? 1-P-39: ¿Qué le hice al lado B para calcularle la superficie? 1-A-40: Lo elevé al cuadrado. 1-P-41: ¿Qué le hice al otro lado? 1-A-42: Lo mismo.*

b) La profesora es quien responde correctamente, afinando precisión en el lenguaje.

> *1-P-63: Si sumo, la superficie del cantero B y la superficie del cantero C, es igual a la superficie del cantero A. Entonces si la superficie de A, es A al cuadrado, porque multiplico lado por lado, va a ser igual a la suma de B al cuadrado, más C al cuadrado. En total, ¿cuántos centímetros cuadrados de tierra necesito para cada cantero? (haciendo referencia a la primera pregunta de la actividad)… 1-P-67: ¿Y la hipotenusa al cuadrado es igual a qué?1-A-68: A los catetos al cuadrado. 1-P-69: A la suma de los cuadrados de los catetos. Entonces si tenemos la hipotenusa y los catetos podemos concluir que si elevo al cuadrado la hipotenusa es exactamente la misma medida que si elevo al cuadrado a los catetos por separado y los sumo. Entonces en la otra pregunta contestan que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Ahora sigan con el problema número tres.*

c) La docente no redirecciona las respuestas de los alumnos, aceptando expresiones que en otro momento corrige.

> *4-A-5: Que el cuadrado de la hipotenusa es igual al cuadrado de los catetos. 4-P-6: Muy bien… 5-P-5: Bien, ¿y qué decía el Teorema de Pitágoras? 5-A-6: La hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los catetos al cuadrado. 5-P-7: Muy bien…*

Tratamiento del contenido

En esta categoría se encuentran *omisiones que llevan a ambigüedad*, donde la docente realiza preguntas o afirmaciones imprecisas o incompletas, así como *deslices en la expresión del docente*, observando momentos en que expresa errores matemáticos o palabras inapropiadas; también en ocasiones *omite unidades* cuando realiza una actividad o manifiesta un *énfasis prematuro* adelantándose al contenido a explicar.

Omisión que lleva a ambigüedad

En ocasiones la docente no es específica en sus preguntas (o afirmaciones), lo que lleva a que los alumnos no respondan o interactúen, por el carácter no concreto de las mismas (no saben a qué se refiere la profesora) o lo hacen de manera automática (adivinando, suponiendo).

La suma de estas ambigüedades puede condicionar desfavorablemente el proceso que se da mediante la metodología AT/RP, donde se procura avanzar gradualmente apoyándose en las respuestas a las situaciones que se han ido dando.

Cuando pregunta por "la medida de la casa I" entra en una omisión al no aclarar que se refiere a la medida del lado del terreno cuadrado (otras medidas podrían ser el perímetro, el área, la diagonal).

> *1-P-8: Bueno, vamos a corregir el problema 1. ¿Cuál es la medida de la casa I? 1-A-9: 10 metros. 1-P-10: ¿La casa II? 1-A-11: 8 metros. 1-P-12: ¿La casa III?*

Hace referencia a "los lados de un triángulo", sin precederlo por ejemplo con "nombres de" o "características de".

> *1-P-30: ¿Se acuerdan de los lados de un triángulo rectángulo?*

Cuando la profesora dice "para calcularle la superficie" no aclara de qué objeto, alguien podría pensar que es "la superficie del lado B" (algo incoherente).

> *1-P-39: ¿Qué le hice al lado B para calcularle la superficie?*

No tiene por qué inferirse a qué alude la profesora con "una de estas fórmulas"; de hecho al momento, en cuanto a fórmulas se refiere, solo trabajaron con la fórmula de cálculo del área del cuadrado, conocido su lado. Además, alude a una relación que no ha sido explicitada en esta ocasión (igualdad entre 2500 cm^2 y la suma entre 1600 cm^2 y 900 cm^2).

> *1-A-64: Para el cantero A necesito 2500 centímetros cuadrados, para el cantero B 1600 centímetros cuadrados y para el cantero C, 900 centímetros cuadrados. 1-P-65: Muy bien, 2500 centímetros al cuadrado para el cantero A, 1600 centímetros al cuadrado para el cantero B y 900 centímetros al cuadrado para el cantero C. Fíjense que nos da la misma relación que habíamos obtenido en el ejercicio anterior. Basándonos en el triángulo rectángulo, ¿cómo podríamos decir esto? Sabiendo que A es la hipotenusa y que B y C son los catetos, ¿cómo dirían de forma oral una de estas fórmulas?*

La diferencia entre el problema 3 y los dos anteriores radica en el cambio de unidades: mientras que se venía trabajando con unidades de medida convencionales (metro, centímetro), este requiere que la unidad sea una flor (ubicada en el centro de cada cuadrado realizado dentro del cantero). Al expresar "la misma relación entre los lados del triángulo y sus cuadrados", no se entiende a qué alude la docente.

> *1-A-83: En el cantero A hay 25 flores y si sumamos el B y el C también hay 25 (16 + 9). 1-P-84: Entonces tenemos la misma relación entre los lados del triángulo y sus cuadrados, entonces la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, ¿van entendiendo?*

Asocia al cateto con la casa, omite decir "el lado del terreno donde se encuentra cada casa". Al hablar solo de "casa" no queda explícito a qué medida/s de la misma se refiere (lados del terreno, perímetro, área).

> *2-P-18: Entonces la casa I corresponde a la hipotenusa. ¿Y la casa II? 2-A-19: Al cateto. 2-P-20: Se llama cateto. La casa II y la casa III son… 2-A-21: Son los catetos.*

La docente expresa "calcular la casa I" sin hacer mención a qué calcularon con la medida del lado del cuadrado donde se encuentra la casa I (área en este caso).

> *2-P-24: ¿Qué le hice a la hipotenusa para calcular la casa I? ¿Qué letra le habíamos puesto a la hipotenusa?*

En el problema 2 omite aclarar que las medidas a las que alude (en centímetros), corresponden al lado de cada cantero cuadrado. Simplemente expresa "cantero de 'tantos' centímetros".

> *2-P-47:… ¿Cuál es la superficie que ocupa el cantero de 50 centímetros?… 2-P-51:… Ahora, cuando quiero trabajar con el cantero de 40 centímetros y quiero sacar la superficie, ¿qué valor tendrá?*

Luego de resolver los tres primeros problemas, se disponen a trabajar en el 4, que presenta un triángulo equilátero. Al inicio la docente expresa "la misma relación" sobreentendiendo el "TP" y "entre los lados" sobreentendiendo el "cuadrado de la hipotenusa con respecto a la suma de los cuadrados de los catetos".

> *2-P-102: Muy bien. ¿Se puede establecer la misma relación entre los lados?*

Deslices en la expresión de la docente

A lo largo de las clases fue posible advertir que los términos empleados por la docente en algunas oportunidades resultaron desacertados y esto desde dos planos: "Errores matemáticos" y "Palabras inapropiadas", que condicionan cualquier metodología de enseñanza, en particular la AT/RP.

a) Errores matemáticos.

Se observa un error al decir "5 centímetros" (en el problema 3) incluso asociándolos a las "5 flores", ya que se trata de 5 cuadrados de 10 centímetros de lado cada uno y con 1 flor cada uno.

> *2-P-79: Muy bien, porque por cada lado son 5 centímetros, o sea, 5 flores, y 5 por 5 son 25…*

La profesora dicta una actividad que podría ser usada para introducir el recíproco del TP, pero la presenta como un ejercicio de aplicación. De este modo realiza una "transferencia natural" de la validez de una propiedad (TP) y su recíproca (que si bien en este caso es válida, no siempre lo es).

> *3-P-25: A ver el ejercicio, si los datos de los lados de un triángulo son 13 centímetros, 12 centímetros y 5 centímetros, ¿podemos decir que es un triángulo rectángulo?, ¿es o no es?*

La docente afirma que la escalera alcanza una altura de cuatro metros cuando en realidad tendría que preguntarse si, con los datos dados, tal altura puede ser alcanzada (como interroga la consigna: ¿Una escalera de 5 m, me alcanza para llegar a 4m de altura, si está separada 3m de la pared?). Se observa que un alumno hace foco en la consigna, pero la docente continua afirmando la igualdad e introduce el interrogante al final (cuando la actividad ya está resuelta).

> *6-P-70: Bien, tenemos una escalera de 5 metros apoyada sobre una pared, alcanza una altura de 4 metros y la base de la escalera está separada a 3 metros de la pared (mientras lo explica realiza la representación gráfica en el pizarrón). Nos queda formado un triángulo rectángulo, ¿qué lado es la escalera? 6-A-71: La hipotenusa. 6-P-72: Muy bien, la hipotenusa, y la pared y el piso son los catetos. ¿Qué tienen que hacer en este ejercicio? 6-A-73: Poner los datos y fijarnos si nos da lo mismo. 6-P-74: Claro, si reemplazamos los datos por la fórmula del Teorema de Pitágoras tenemos que 5 metros al cuadrado tiene que ser igual a 4 metros al cuadrado más 3 metros al cuadrado (escribe en el pizarrón mientras explica y lo termina de resolver). Entonces nos queda que 25 metros cuadrados es igual a 25 metros cuadrados, entonces ¿puede cumplir esta condición la escalera?*

Además, hubiese resultado formativo que en alguna/s instancia/s donde se involucró al recíproco del TP, la igualdad en cuestión no se cumpla para concluir que, en ese caso, no se está en presencia de un triángulo rectángulo.

La docente presupone que hay solo una disposición para el triángulo rectángulo y que los de la actividad de la clase 4 (ítems b) y c) de la figura 3) "están girados". De esta manera, se inducen desde la enseñanza figuras geométricas estereotipadas (Barrantes, López y Fernández, 2015). En particular en este caso se trata de un distractor de orientación.

> *4-P-77: En este ejercicio tienen que calcular cuánto vale x, aplicando el Teorema de Pitágoras, plantean todo el ejercicio, paso a paso, que es lo que voy a evaluar en la prueba. En estos tres ejercicios sí se puede aplicar el Teorema de Pitágoras porque tengo triángulos rectángulos, que están girados, distintos como los damos siempre, y ahí tienen los datos.*

La cuarta actividad en la quinta clase no corresponde a un triángulo rectángulo con los datos dispuestos como se pretende (habrá una parte de la longitud del hilo de la caña que estará por debajo del agua la cual debería restarse de la longitud total del hilo, también habrá una distancia entre el brazo del pescador que tiene la caña y el muelle, y además el hilo de la caña de pescar al lanzarlo no queda tenso como un segmento de recta sino más bien curvo). La docente tendría que dar las condiciones de "simplificación" de la situación, tornándola semireal, para que el modelo matemático que se pretende se asemeje a la situación presentada, o directamente cambiar de situación.

> *5-P-48: Ahora les dicto el cuarto problema así ya se ponen a trabajar. El cuarto problema dice: "Un pescador se encuentra sobre un muelle, el hilo de la caña de pescar tiene 5,2 metros de longitud y altirarlo al agua queda a 2 metros de la base del muelle. ¿Qué altura tiene el muelle? Realizar un esquema para indicar los datos"…*

La docente manifiesta que hay dos formas de hallar la medida desconocida de un cateto de un triángulo rectángulo, que en realidad son equivalentes entre sí (posiblemente a esto último se refiere luego: "es lo mismo"). Este tipo de comentarios pueden estar tendiendo a propiciar la memorización y mecanización de fórmulas más que el entendimiento del proceso de resolución.

> *6-P-18:… Entonces pueden calcular el cateto de dos formas, con el Teorema de Pitágoras o con el cateto ya despejado… 6-P-20: Es lo mismo, de una manera planteás el Teorema de Pitágoras y de la otra manera ya tenés despejado el cateto…*

Al realizar la "demostración" gráfica del TP, la docente adiciona medidas a los lados de cada cuadrado formado sobre los lados del triángulo rectángulo. Luego, se basa absolutamente en estas medidas para verificar la propiedad; es decir, prevalecen las cuentas y pierde sentido lo que se está haciendo (supuestamente era "demostrar" la propiedad comparando áreas de cuadrados, no "comprobarla" con datos deliberadamente proporcionados), similar a la experiencia llevada a cabo por Barreto (2012).

> *6-P-60: Bien, tenemos un triángulo rectángulo y realizábamos un cuadrado a cada lado del triángulo, si le ponemos medidas a los lados del cuadrado, por ejemplo, el cuadrado que le corresponde a la hipotenusa mide 10 metros, el de este cateto 8 metros (señala al cateto) y el otro 6 metros (mientras, escribe estas medidas al lado de los lados de los cuadrados que había hecho el alumno). Bien, si hacemos el área de este cuadrado (señala al cuadrado de 10 metros de lado)… 6-A-61: 100 metros cuadrados. 6-P-62: Muy bien, 100 metros cuadrados, y si sacamos el área de los otros dos cuadrados, ¿cuál es el resultado? 6-A-63: Uno 64 y el otro 36. 6-P-64: Muy bien, no se olviden de las unidades, uno es 64 metros cuadrados y el otro 36 metros cuadrados (anota las áreas de los cuadrados en el dibujo hecho por el alumno). Entonces nos queda que el cuadrado que hicimos sobre la hipotenusa, ¿tiene la misma superficie que quiénes? 6-A-65: Que los otros dos juntos. 6-P-66: Muy bien, es decir que 100 metros cuadrados es igual a la suma entre 64 metros cuadrados y 36 metros cuadrados. La superficie del cuadrado grande es igual a las superficies de los otros dos cuadrados juntas.*

b) Palabras inapropiadas. Se dan cuando la docente utiliza expresiones inadecuadas ante la explicación de un concepto, procedimiento o actividad.

La profesora pregunta a sus alumnos por la "parte" de *B* y *C* (medidas de los lados de cuadrados en el problema 2) donde, en realidad, se quiere calcular una potencia.

> *1-P-37: ¿A B y a C? ¿O a qué parte de B y C? ¿Qué les hago a B y a C para calcularles la superficie?*

Los alumnos, en grupo, habían escrito "una conclusión" de acuerdo a lo trabajado en las clases en las que se implementó la secuencia didáctica intencionalmente diseñada en el marco de la investigación. Luego, a modo de cierre, la docente expresa que a partir de lo que ella les indique, van a escribirla "con palabras apropiadas", quitándole de este modo valor a las producciones estudiantiles. Una opción para "formalizar" es ayudar a cada grupo a pulir su conclusión, sin desecharla, señalando los aciertos y aspectos que ameritan mayor precisión.

> *3-P-23: Muy bien, Teorema de Pitágoras. Entonces escribimos la fecha de hoy, y escribimos la conclusión porque es algo obligatorio, pero la vamos a formalizar, es decir, la vamos a escribir con palabras apropiadas.*

En una de las actividades para verificar si el triángulo dado es rectángulo -teniendo como datos las medidas de los lados-, hubiera sido más apropiado preguntar "¿Por qué puede ser?" -incluso tomando en consideración lo expresado por el estudiante-, ya que al interrogar "¿Por qué es?" da por sentado que el triángulo es rectángulo.

> *3-A-28: Puede ser que sea un triángulo rectángulo. 3-P-29: ¿Por qué es un triángulo rectángulo?*

En la corrección de una actividad donde trabajan con el recíproco del TP, teniendo como dato las medidas de los lados de un triángulo, hay que verificar si la propiedad pitagórica se cumple (o no), no hay que "demostrarla".

> *3-P-44:… Hay que demostrar que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos…*

La docente se refiere a "directamente usamos el TP" cuando el lado desconocido es la hipotenusa, distinguiéndolo del caso en que el lado desconocido sea un cateto (aunque, en realidad, en ambas instancias se está empleando dicho teorema).

> *6-P-22: Muy bien, entonces directamente usamos el Teorema de Pitágoras porque tenemos que averiguar la hipotenusa. La hipotenusa al cuadrado va a ser igual, entonces, a 12 metros al cuadrado más 5 metros al cuadrado, ¿cuánto les dio el resultado final de x?*

Omisión de unidades

Se hallan numerosos casos en que tanto la docente como los alumnos se desentienden de las unidades de medida que se están utilizando para longitudes y áreas. Esto también se considera de importancia, pues están trabajando con problemas que se basan en situaciones que pueden ser reales.

En el problema 2 trabajan con los lados de los canteros de forma cuadrada, expresados en centímetros. Es así que tanto "40" como "30" deben ir acompañados de "centímetros" y "900" de "centímetros cuadrados".

> *2-P-55: Como es la superficie del cuadrado, tenemos que multiplicar 40 por 40. ¿El otro cómo les va a quedar? 2-A-56: 900, porque hicimos 30 por 30. 2-P-57: Muy bien…*

Al abordar el problema 3 falta un nexo entre “cantidad de cuadrados en los canteros” y “medida de cada lado”. Puntualmente no expresa “centímetros de lado” al decir 50, 40 y 30, ni cómo colocar las flores en el cantero. Si bien es un repaso de la clase anterior, es trascendente en este caso ya que las unidades cambian de centímetros a cantidad de flores.

> *2-P-71: Cada 10 centímetros yo voy a hacer un cuadradito, entonces me queda dividido cada cantero en cuadrados de 10 centímetros cada uno. ¿Cuál era la pregunta? 2-A-72: Cuántas flores hay en cada cantero. 2-P-73: Entonces, tenemos el cuadrado de 50, el cuadrado de 40 y el cuadrado de 30, y dentro le hago los cuadraditos para poner flores, ¿cuántas flores se pueden colocar? 2-A-74: ¿En dónde? 2-P-75: En el cantero de 50, ¿cuántas flores se pueden colocar?*

En una de las actividades no especifica “metros cuadrados” ni luego “metros” al calcular la raíz cuadrada. Tampoco lo promueve en los estudiantes.

> *3-P-79:… La raíz cuadrada de 400 es 20 y esa es la respuesta a mi problema, que es lo que necesito para dividir el terreno… 4-P-47: Muy bien, la potencia tiene que pasar como la operación inversa, que es la radicación. ¿Cuál es la raíz cuadrada de 64?4-A-48: 8.*

Énfasis prematuro

La docente realiza comentarios que, de alguna manera, se adelantan al proceso necesario requerido por los alumnos al ir transitando las actividades mediante la metodología AT/RP.

Ni bien se concluye el trabajo con el primer problema, denomina con “fórmula” a la relación hallada (TP), mientras que está previsto institucionalizarlo una vez desarrollada toda la secuencia intencionalmente diseñada (que contiene cinco actividades).

> *1-P-43: Miren qué relación más interesante, si tenemos los lados de un triángulo rectángulo, y relaciono la hipotenusa con los catetos obtengo esta fórmula súper importante y súper interesante. Copien esa relación en la carpeta y continúen en grupos con el problema número dos.*

Una actividad pide calcular la altura de un triángulo equilátero teniendo como dato la medida del lado del mismo. Lo que sigue a la pregunta “¿puedo calcular la altura?”, la responde implícitamente (“sí”) indicándoles además que el resultado no es un número entero.

> *4-P-72: ¿Puedo calcular la altura? No les va a dar un número exacto, les aviso. Lo vamos a hacer aproximado con la raíz cuadrada. Los dejo que lo terminen solos. Ustedes pueden trabajar con el valor exacto o con el valor aproximado, lo podemos dejar con un decimal, o como una raíz sin calcular, eso lo vamos a ver cuando demos radicales.*

En una de las actividades se presentan las medidas de los lados de la figura en distintas unidades (metros y centímetros). La docente tendría que dejar que los alumnos se den cuenta y ensayen formas posibles de plantearlo, y no advertirles ella de antemano.

> *5-P-36: Tengan cuidado en este problema, que la base está expresada en centímetros y la altura en metros. ¿Qué tienen que hacer antes de empezar a resolverlo?*

Conclusiones

La principal inquietud del estudio es cómo se produce la guía del docente en el tratamiento del contenido. Durante las observaciones de las clases surgen ciertas consideraciones a ser mejoradas o para tener en cuenta para llevar a cabo la metodología AT/RP.

En sus prácticas de enseñanza se encuentran ciertos aspectos a tener en cuenta, se destaca en *pautas de trabajo* cómo la docente propone actividades que no se condice con lo trabajado, no cuenta con una graduación de sucesivas dificultades.

En el *efecto Topaze* los alumnos solo contestan a preguntas puntuales siendo estos resultados numéricos en su mayoría. En otros casos es la docente quien realiza el razonamiento de la resolución de las actividades sin dar lugar a que los alumnos resuelvan lo pedido. La respuesta que debe dar el alumno está previamente determinada, la docente elige la pregunta que puede provocarla. Evidentemente, los conocimientos necesarios para producir esas respuestas cambian de significación. Planteando preguntas cada vez más fáciles, intenta obtener la máxima significación para el máximo de alumnos. De este modo es la profesora quien tiene la responsabilidad de mantener el sentido en los cambios de preguntas. La profesora es quien, en ocasiones, responde correctamente o no redirecciona las respuestas de los alumnos.

También se destacan momentos donde la docente realiza preguntas ambiguas y los alumnos no saben qué contestar, así como comentarios donde se omite información necesaria. Las interrogaciones son realizadas de manera que el alumno no sabe a qué alude, debido a que la profesora no brinda ciertos datos, donde es recomendable que estén explícitos, para que los estudiantes puedan dar una respuesta a partir de su propio razonamiento. Además, al omitir unidades, conlleva a que el alumno repita esta práctica. Esto influye en el trabajo con la metodología AT/RP pues se intenta avanzar de acuerdo a las respuestas proporcionadas por los alumnos. En este sentido la docente, nuevamente, es quien hace el razonamiento y los estudiantes la siguen.

En el recorrido de las clases surgen peculiaridades en el desempeño docente que se consideran de importancia para el desarrollo de la metodología AT/RP, debido a la incidencia que tienen en los alumnos ciertas prácticas que surgen de manera -se supone- “inconsciente” y que el alumno reproduce luego en su hacer matemático. Se hace referencia, por ejemplo, a la *omisión de unidades*, donde la profesora no especifica las unidades de medida con las que se trabaja. También, a los *deslices en la expresión del docente* observándose que enuncia ciertos conceptos de forma equivocada o con expresiones no muy acertadas. Un mayor énfasis desde la enseñanza, al señalar siempre las unidades de medida en cuestión, podría contribuir a contrarrestar este tipo de omisiones por parte de los estudiantes.

Cabe destacar que luego de que los grupos exponen sus respectivas conclusiones, la docente prosigue la clase especificando que van a mejorar lo redactado, de una manera más "apropiada", dejando de lado el consenso al que deben llegar entre alumnos y docente para que el discurso matemático escolar acerca del nuevo conocimiento -en este caso, la redacción del TP- se dé en forma conjunta.

Se rescata de la metodología empleada que, luego de las primeras clases, surge de los alumnos el trabajo en grupos para resolver las actividades propuestas. Afortunadamente la docente accede a lo pedido y se establece este tipo de labor para el resto de los encuentros; esto es, los alumnos se agrupan ante una cierta tarea. Esta cuestión, además de ser parte de la metodología, demuestra un aprendizaje de manera social, en sintonía con lo planteado por Barros (2003).

Otra situación que se presenta en las clases es la comprensión inicial por parte de los alumnos de los enunciados. Particularmente en la primera clase, un alumno realiza una pregunta a sus compañeros de grupo, dando indicios de querer adentrarse a la situación real junto a sus pares: "*No entiendo por qué quieren dividir el patio*".

Si bien no podemos afirmar que se haya producido un aprendizaje significativo en términos de Ausubel (1976), se evidencia que los alumnos tuvieron una actitud y disposición positiva para desarrollar el nuevo contenido y que el material trabajado durante las clases se relacionó con la estructura socio-cognitiva de los estudiantes. Se procuró pronunciar una construcción social del conocimiento matemático en cuestión (Cantoral et al, 2015).

La metodología AT/RP requiere de ciertos pasos que deben ser cumplidos por parte de la docente. Para De Guzmán (2007) la propuesta de enseñanza debe comenzar, entre otras opciones, con un problema que modelice una situación real. En esta investigación se brindan a los alumnos cinco problemas para que deduzcan el TP, a partir de comparar áreas y distinguir las figuras involucradas.

Se tiene, entonces, que para llevar a cabo la metodología AT/RP resulta propicio brindar a los alumnos el tiempo necesario para el cumplimiento del primer paso según Polya (1965). En cuanto a la concepción del plan y a la ejecución del mismo -pasos dos y tres - los alumnos deben resolver en grupos los problemas planteados mientras la docente pasa por los bancos aclarando sus dudas, para luego hacer una corrección en conjunto con el grupo-clase. Esto coincide con la elaboración de estrategias posibles y los ensayos diversos por los estudiantes, propuesto por De Guzmán (2007).

Se destaca que, cuando la docente pide a los alumnos que redacten una conclusión del recorrido durante los cinco problemas, se realiza un recorrido crítico (De Guzmán, 2007) coincidiendo con el último paso propuesto por Polya (1965) para resolver problemas (visión retrospectiva). En efecto, los alumnos deben rever el trabajo realizado para manifestar que la relación entre los lados del triángulo rectángulo no se percibe en otro tipo de triángulos. Luego de trabajar con los cinco problemas de la secuencia, la profesora formaliza la propiedad escribiéndola en el pizarrón y los alumnos la copian en sus carpetas.

Ha sido posible advertir múltiples cuestiones a seguir mejorando -como la inclusión de aspectos histórico-epistemológicos a la propuesta de enseñanza, el acento en la visualización geométrica cuando se trata de una demostración geométrica, la inclusión pertinente de unidades de medida en los datos con que se trabaja, la conjunción de precisión y claridad, la promoción de mayor protagonismo en los estudiantes- para no caer en un reduccionismo didáctico (Reyes, 2017).

La buena voluntad, el conocimiento de la disciplina y el conocimiento pedagógico son necesarios, pero no suficientes para llevar a cabo la metodología AT/RP. Se necesita formar desde la didáctica específica a los alumnos del Profesorado en Matemática, poniéndolos en situación de reflexión de la práctica desde distintos ejemplos.

Resulta importante que las clases de matemática surjan como una posibilidad para que los estudiantes se preparen para futuros estudios o para afrontar ciertas situaciones que la vida les va poniendo en su camino, y los diversos modos de hacer matemática en sus prácticas cotidianas. Desde la materia se debe dejar que se expresen de forma autónoma, con sus errores y dudas. Esto adquiere particular relevancia si son adultos, que por diferentes motivos no tuvieron la oportunidad de terminar el nivel secundario en la edad estipulada. Es necesario inculcarles, a este tipo de alumnos en particular, el deseo por aprender y la seguridad por expresar sus dudas o producciones sin temor al error, para así fomentar la inquietud de seguir cultivando su futuro y contribuir a una sociedad sin exclusiones (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2003).

Referencias

Alsina, C. (2010). *La secta de los números. El Teorema de Pitágoras*. Barcelona: RBA.

Ausubel, D.P. (1976). *Psicología Educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Barrantes, M., López, M. y Fernández, M.A. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA*, *9*(2), 107-127. Disponible en: http://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6105/5424.

Barros, C. (2013). A metodologia de ensino-aprendizagem de matemática a través da resolução de problemas: perspectivas à formação docente no contexto da sala de aula. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *26*, 675-683. Disponible en: http://clame.org.mx/uploads/actas/alme26v.2.pdf.

Barreto, J. (2012). Deducción Geométrica del Teorema de Pitágoras en Trigonometría como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. *Premisa*, *15*(59), 35-49. Disponible en: http://www.soarem.org.ar/Documentos/53%20Barreto.pdf.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de las teorías de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *18*(1), 5-17. Disponible en: http://clame.org.mx/relime/201500a.pdf.

Castanetto, A. (2016). *La enseñanza del Teorema de Pitágoras a través de la Resolución de Problemas en un cuarto año de una Escuela de Enseñanza Media para Adultos de Rosario*. Tesina de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática no publicada. San Nicolás: Universidad Tecnológica Nacional, Argentina

Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma*, *19*, 51-63. Disponible en: http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_19/7_Tendencias_Actuales.pdf.

Guzmán, M. De (2007). Enseñanza de las Ciencias y de la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, (43), 19-58. Disponible en: https://rieoei.org/historico/documentos/rie43a02.pdf.

Ministerio de Educación de Santa Fe. (2003). *Documento base para la consolidación de la Educación General Básica y la Educación Polimodal de Jóvenes y Adultos*. Santa Fe: Ministerio de Educación de Santa Fe.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Pozo, J., Del Puy, M. y Postigo, Y. (1994). *La solución de Problemas*. Madrid: Santillana.

Reyes, A.V. (2017). Reduccionismo didáctico y creencias de profesores acerca del Teorema de Pitágoras. *Bolema*, *31*(59), 968-983. Disponible en: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n59/0103-636X-bolema-31-59-0968.pdf.

Autoras:
Andrea Beatriz Castanetto
andreacastanetto@gmail.com
Profesora en Matemática (Instituto de Educación Superior N° 28 “Olga Cossettini”)
Licenciada en Enseñanza de la Matemática (Universidad Tecnológica Nacional).
Docente en: Escuela de Enseñanza Secundaria Orientada Particular Incorporada N° 3042 “Leonardo da Vinci”, Escuela de Educación Secundaria Orientada N° 342 “Bernardino Rivadavia” y Escuela de Enseñanza Media para Adultos N° 1223 “Prof. Iris Caserio”
Argentina

Natalia Fátima Sgreccia
nataliasgreccia@gmail.com
Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática (Universidad Nacional de Rosario)
Magíster en Didácticas Específicas (Mención: Matemática; Universidad Nacional del Litoral)
Doctora en Humanidades y Artes (Mención: Ciencias de la Educación; Universidad Nacional de Rosario)
Docente e Investigadora adscrita a la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario
Argentina