COMPETENCIAS MATEMÁTICAS: DESEMPEÑO Y ERRORES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LÍMITES

Verónica Díaz Quezada
mvdiaz@ulagos.cl
Álvaro Poblete Letelier
apoblete@ulagos.cl
Universidad de Los Lagos, Chile.

Recibido: 17/12/2018 **Aceptado:** 17/04/2019

RESUMEN

La capacidad de aplicar las matemáticas en una situación del mundo real se considera un objetivo principal de las matemáticas y de la formación de ingenieros. El propósito de este estudio, es identificar y caracterizar las competencias matemáticas y los errores de los estudiantes de ingenierías en la resolución de problemas de límites de funciones reales, a través de la aplicación de instrumentos evaluativos con problemas de respuesta abierta. Se presenta la metodología cuantitativa del estudio descriptivo, con una muestra de cinco carreras de ingeniería de la Universidad de Los lagos en sus campus de Puerto Montt y Osorno. Considerando las etapas de resultado y completación, donde el problema está casi resuelto o se utilizó un método apropiado que permitió llegar a la solución correcta, los resultados indican que los estudiantes de las cinco ingenierías registraron desempeños similares, mostrando un mejor resultado en la competencia tipo 2 de problemas rutinarios de contexto realista y fantasista, pero mayoritariamente con errores de uso de teoremas y definiciones deformadas y errores técnicos.

Palabras clave: competencias matemáticas, resolución de problemas, límite, errores, ingenierías.

MATHEMATICAL COMPETENCES: PERFORMANCE AND ERRORS IN THE PROBLEMS SOLVING OF LIMIT

ABSTRACT

The ability to apply mathematics in a real-world situation is considered a primary goal of mathematics and the training of engineers. The purpose of this study is to identify and characterize the mathematical competences and the mistakes of engineering students in the problems solving of limits real functions, through the application of evaluative instruments with open response problems. The quantitative methodology of the descriptive study is presented, with a sample of five engineering careers from the University of Los Lagos on its campus in Puerto Montt and Osorno. Considering the stages of result and completion, where the problem is almost solved or an appropriate method was used that allowed to reach the correct solution, the results indicate that the students of the five engineering carrers registered similar performance, showing a better result in the type 2 competition of routine problems of realistic and fantasy context, but mostly with errors of use of theorems and deformed definitions and technical errors.

Keywords:mathematical competences, problem solving, limit, mistakes, engineering.

INTRODUCCIÓN

Las actuales preocupaciones tanto nacionales como internacionales, concentran interés sobre los resultados, entendidos bajo una óptica de calidad y dirigidos a la habilitación, e instalación de capacidades y competencias, como finalidad de los procesos de educación de pregrado. Sin embargo, en el aprendizaje de las matemáticas universitarias de nivel superior, el primer obstáculo importante para los estudiantes de ingeniería es el objeto matemático limite. Comprender el concepto de límites es fundamental en estas clases universitarias de matemáticas (Williams, 1991). Los investigadores Szydlik (2000), Bezuidenhout (2001), Oehrtman (2009), Przenioslo (2004), Cappetta (2007), Roh (2010), Cappetta y Zollman (2009, 2013), Cory y Garofalo (2011) describen una gran cantidad de ideas erróneas de los estudiantes de los límites. Estos investigadores han encontrado que los estudiantes tienen tres principales dificultades para comprender los límites: los procesos infinitos de los límites, la definición formal de límites; y el valor de los límites. Además, los estudiantes utilizan un razonamiento metafórico incorrecto para comprender los límites (Cappetta y Zollman, 2009; Dawkins, 2012; Oehrtman, 2009; Przenioslo, 2004; Roh, 2010), que finalmente decanta en errores en la resolución tanto de ejercicios como de problemas de su aplicación.

Los hallazgos de Beynon y Zollman (2016) sugieren que, al final de sus cursos de matemáticas, muchos estudiantes de ingeniería no consideran emplear una definición formal de límite para resolver problemas matemáticos basados en límites. Además, los hallazgos sugieren que la mayoría de las definiciones de concepto personal de límite de los participantes son inoperables para resolver problemas de límites e inconsistentes con la definición formal de límite. Con el fin de alcanzar la comprensión profunda de Cálculo, el plan de estudios y el diseño instrumental deben basarse teóricamente en las matemáticas reales y encontrar un enfoque efectivo dentro de la comunidad matemática. A pesar de su importancia, a los estudiantes les resulta difícil entender el concepto de límite (Liang, 2016).

En este contexto, realizamos una investigación en carreras de ingeniería cuyo currículo incluye la competencia de resolución de problemas. Las preguntas y objetivos de investigación, fueron las siguientes.

PREGUNTAS Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

¿Tienen los estudiantes de ingeniería las competencias matemáticas necesarias para resolver problemas de aplicaciones de límite de funciones?, ¿Cuáles son los mayores errores que cometen al resolver problemas de límite? A partir de esta problemática de investigación y para responder a estas interrogantes, diseñamos un estudio para cinco carreras de ingeniería.

Objetivos

El objetivo general fue identificar y caracterizar las competencias matemáticas y los errores de los estudiantes de ingeniería en la resolución de problemas de límites de funciones reales, y los objetivos específicos fueron: (1) elaborar, validar y aplicar instrumentos evaluativos de tipos de competencias matemáticas de aplicaciones de límite, (2) determinar y analizar el desempeño de los estudiantes en tipos de competencias matemáticas, (3) analizar los errores en relación a los tipos de competencias matemáticas.

MARCO TEÓRICO

Una situación se denomina problema cuando hay conciencia de la importancia de llevar a cabo una acción, pero no se puede cumplir de inmediato (Ernest, 1991; Szetela y Nicol, 1992). En el contexto de la educación formal, en las materias de matemáticas, los estudiantes también enfrentarán problemas. Estos problemas pueden provenir de las propias matemáticas y también pueden provenir de la vida real (Kirkley, 2003) que involucran hechos y contextos que se pueden modelar en las matemáticas. Si el estudiante está listo para dar una estrategia de solución a un problema matemático, entonces la pregunta ya no es un problema, sino un ejercicio (Schoenfeld, 1987, 2013).

Según Polya (1973), un profesor de matemáticas que solo entrenaba a sus estudiantes para resolver problemas u operaciones de rutina, era lo mismo que matar el interés de los estudiantes matemáticos, limitar su desarrollo intelectual y perder su tiempo de enseñanza. Pero si él o ella incrementó la curiosidad de sus estudiantes a través de la resolución de problemas de los estudiantes de la vida real para adquirir conocimientos y ayudarlos a resolver problemas con preguntas de estímulo, entonces el maestro les ha dado a los estudiantes un sentido de pertenencia a las matemáticas, la comprensión y el pensamiento independiente (Simamora,Saragih y Siregar, 2019).

Para este trabajo, tomamos los tipos de competencias matemáticas que hemos venido trabajando con resolución de problemas, en distintas áreas de la matemática (Díaz y Poblete, 2016, 2017, 2018). A continuación se presenta la clasificación de tipos de competencias matemáticas de Díaz y Poblete (2004) que forma parte del marco teórico. Se consideran tres tipos de competencias, como se describen en la figura 1.

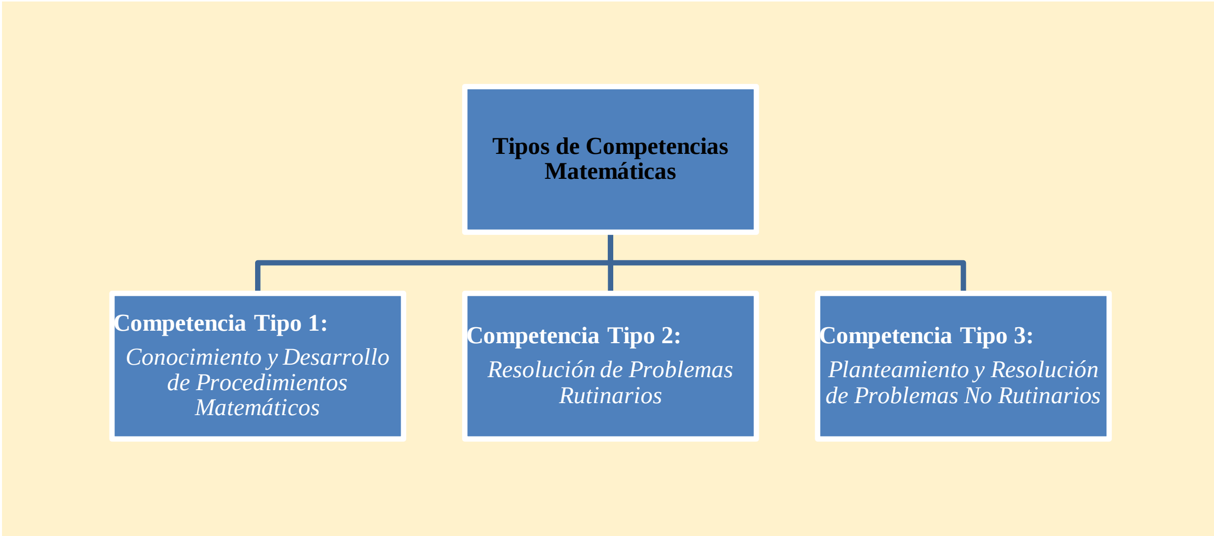


Figura 1. Tipos de Competencias Matemáticas (Díaz y Poblete, 2004)

- Competencia Tipo 1: *Conocimiento y Desarrollo de Procedimientos Matemáticos*, que incluyen comprender y manejar la extensión de los conceptos matemáticos y la argumentación matemática. Básicamente consiste en problemas con cálculo y definiciones del tipo más común que aparecen en las evaluaciones convencionales de las matemáticas. Ejemplo: Calcular el siguiente límite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^6+3x^3+2}{7x^6+x-1}$

- Competencia Tipo 2: *Resolución de Problemas Rutinarios*, incluye plantear, formular y resolver tipos de problemas rutinarios de contexto real, realista, fantasista y puramente matemáticos, que requieren el establecimiento de conexiones para su resolución. Los problemas Rutinarios son similares a los resueltos durante los cursos de instrucción; el estudiante sigue una secuencia que implica entender los conceptos y algoritmos para alcanzar soluciones válidas.

  (1) Problema de contexto real: Un contexto es real si se produce efectivamente en la realidad y compromete el accionar del alumno en la misma. Ejemplo: *"Construya una función, cuyo numerador sea un valor constante y su denominador una función cuadrática. Encuentre con detalle sus asíntotas; e indique la posición de la curva respecto a ellas."*

(2) *Problema de contexto realista:* Un contexto es realista si es susceptible de producirse realmente. Se trata de una simulación de la realidad o de una parte de la realidad.

Ejemplo de la prueba: "*Los ingenieros industriales han estudiado un trabajo particular en una línea de montaje. La función siguiente, es la función de la curva de aprendizaje que describe el número de unidades terminadas por hora para un empleado normal de acuerdo al número de horas de experiencia t que él tiene en su trabajo*

$$y = f(t) = 120 - 80e^{-0,3t}$$

a) *Determine el número de unidades que puede terminar un empleado en el momento que ingresa a esa empresa y luego de su primera hora de experiencia.*

b) *¿Cuántas unidades puede terminar un empleado cuando el número de horas de experiencia en la fábrica crece indefinidamente?*"

(3) *Problema de contexto fantasista*: Un contexto es fantasista si es fruto de la imaginación y está sin fundamento en la realidad.

Ejemplo de la prueba: "*La presión en el fondo marino del planeta Kepler 438b, más parecido a la tierra descubierto recientemente, está dada según la función:*

$$P = \frac{5h - h^2 + 3h^3}{2h + h^3 - h^4}$$

Donde h es la densidad. ¿A qué valor se aproxima la presión cuando la densidad se aproxima a 0?"

(4) *Problema de contexto puramente matemático:* Un contexto es puramente matemático si hace referencia exclusivamente a objetos matemáticos: números, relaciones y operaciones aritméticas, figuras geométricas, etc.

Ejemplo de la prueba: "*Una piscina se vacía según la función* $v = \dfrac{2 - \sqrt{t-3}}{t^2 - 49}$, *donde v es el volumen expresado en* m^3 *y t el tiempo en minutos. ¿A qué valor se aproxima el volumen cuando el tiempo se aproxima a 7 minutos?* ".

- Competencia Tipo 3: *Planteamiento y Resolución de Problemas No Rutinarios,* incluye la decodificación de las distintas formas de presentar las situaciones matemáticas, traduciendo el lenguaje natural al simbólico/formal, es decir, consiste en el pensamiento matemático que incluye la capacidad de generalización. Un problema será No Rutinario cuando un estudiante no conoce una respuesta ni un procedimiento previamente establecido o rutina, para encontrarla.

> Ejemplo de la prueba: "*Un cultivo de bacterias en el sistema solar a 2000 años luz de la tierra, crece siguiendo la ley:*
>
> $y = \dfrac{1{,}25}{1 + 0{,}25e^{-0{,}4t}}$, *donde el tiempo t ≥ 0 se mide en horas y el peso del cultivo en gramos*
>
> *a) Determine el peso del cultivo transcurridos 60 minutos*
>
> *b) ¿Cuál será el peso del mismo cuando el número de horas crece indefinidamente?"*

Cabe hacer notar que los problemas no rutinarios, también pueden ser clasificados según el contexto.

Una de las características más importantes que diferencian las matemáticas de otras asignaturas es la actualización de la comprensión intuitiva concreta al reconocimiento abstracto. El concepto de límite es un ejemplo de ello. Antes de que los alumnos aprendan el concepto de límite, ya tienen algunas experiencias de lo que es un límite (Merenluoto y Lehtinen, 2000). Su comprensión se basa principalmente en experiencias cotidianas en lugar de entendimientos matemáticos. Si los estudiantes no cambian su comprensión cotidiana del límite a la comprensión matemática del límite, no podrán pasar de la comprensión intuitiva concreta al reconocimiento abstracto.

Por otra parte, es una realidad reconocida por estudios en la educación matemática, que los estudiantes cometen errores en sus producciones cuando trabajan cualquier dominio matemático, especialmente cuando resuelven problemas de aplicaciones. Analizar esos errores es una fuente valiosa de información, como lo consideró Radatz (1979), quien inició la investigación didáctica orientada al estudio de errores. Varios investigadores han encontrado que los errores y las ideas erróneas que muestran los estudiantes en sus intentos de resolver problemas matemáticos contribuyen a perpetuar su bajo rendimiento en su aprendizaje de las matemáticas (Siyepu, 2015; Brodie, 2005, 2006, 2010; Davis, 1984; Drews, 2005; Foster, 2007; Hatano, 1996; Luneta y Makonye, 2010; Nesher, 1987; Olivier, 1989; Orton, 1983a; Orton, 1983b; Ryan y Williams, 2000; Smith, DiSessa y Rosehelle, 1993).

Generalmente los conceptos erróneos se manifiestan a través de errores. Un error puede ser un error, un error de cálculo o un juicio equivocado y dicha categoría cae bajo errores no sistemáticos (Muzangwa y Chifamba, 2012). El problema desafiante relacionado con los conceptos erróneos, es que muchas personas tienen dificultades para renunciar a los conceptos erróneos, porque los conceptos falsos pueden estar profundamente arraigados en el mapa mental de un individuo. Dada la importancia de los errores asociados al aprendizaje, se han propuesto diversas categorizaciones.

Movshovitz-Hadar, Zaslavski y Inbar (1987), consideran la investigación de errores necesaria, incluso para averiguar si un cierto estilo de enseñanza, está asociado a patrones particulares de errores. Estos autores, consideran que el análisis constructivo del error que cometen los estudiantes, sirve para la comprensión de la lógica usada para justificar lo realizado por éste, además de ayudar a los docentes a prever dificultades y proporcionar un inventario de distractores, útiles para las evaluaciones de los objetos matemáticos en estudio. Para efectos del marco teórico de esta investigación, se consideró la categoría propuesta por Movshovitz-Hadar, Zaslavski y Inbar (1987), que se expone a continuación.

- *Errores debido a datos mal utilizados*: Incluye los errores que pueden ser relacionados con alguna discrepancia entre los datos dados en el problema y cómo el alumno los trató.
- *Errores debidos a una interpretación incorrecta del lenguaje:* Incluye los errores que surgen por una traducción incorrecta de hechos matemáticos a un lenguaje coloquial y viceversa.
- *Errores debidos a inferencias no validas lógicamente:* Incluye los errores cometidos por un razonamiento incorrecto. Esta nueva información, invalida, es luego utilizada para resolver el problema planteado ocasionando una respuesta errónea.
- *Errores debido al uso de teoremas o definiciones deformadas:* Incluye los errores que aparecen por una distorsión de un principio, una regla, teorema o definición. En esta categoría se encuentran los errores por aplicaciones de teoremas sin las condiciones necesarias, por aplicación de propiedades que no

corresponden, por la realización de una valoración inadecuada de una definición, teorema o formula.

- *Errores debidos a la falta de verificación de la solución:* Incluye los errores cometidos en el resultado final pero no en el proceso, es decir, cada paso dado por el examinado es correcto en sí mismo, pero el resultado final, tal como se presenta, no es una solución para el problema dado. En esta categoría se incluyen los errores que de haber existido una verificación por parte del alumno hubiesen sido eliminados.
- *Errores técnicos:*Incluye los errores del cálculo, los errores en la extracción de datos de las tablas, los errores en la manipulación de símbolos algebraicos elementales, etc.

METODOLOGÍA

La investigación corresponde a un estudio descriptivo con metodología mixta, en carreras de ingeniería de la Universidad de Los Lagos en sus Campus de Osorno y Puerto Montt. Este artículo, presenta la metodología cuantitativa. El estudio utilizó una muestra no probabilista intencional, formada por 51 estudiantes de los cuartos semestres de las ingenierías Ambiental (4), Civil en Informática (6), Civil Industrial (10) del Campus Puerto Montt, e ingenierías Civil en Informática (9), Comercial (22) pertenecientes al Campus de Osorno. La elección de estas ingenierías se fundamenta en que todas cursaban Cálculo I (Cálculo Diferencial e Integral en una variable) durante el segundo semestre del 2018, cuya propuesta curricular institucional es por competencias y contempla la resolución de problemas. Los estudiantes sujetos de estudio, corresponde a grupos ya constituidos y todos con diferentes profesores en la asignatura de Cálculo I, la cual estaba ad portas de su término del semestre, por lo tanto, habían sido evaluados en límite. La asignatura para todos los cursos de Cálculo I de ingeniería, contempla curricularmente números y la recta real, límite, continuidad, derivadas e integrales.

Instrumentos

Se utilizó un instrumento de carácter cuantitativo: una prueba de conocimiento matemático. Con el objetivo de evaluar el desempeño de los estudiantes en tipos de competencias matemáticas, se elaboró una prueba de resolución de problemas matemáticos de respuesta abierta y siguiendo dos formas paralelas (Forma A y Forma B). Fue validada previamente por contenido, mediante el juicio de diez expertos y piloteada de tal manera, que conformaron la prueba definitiva sólo aquellos ítems en que se logró un porcentaje mayor o igual a 75% de resultados positivos, con lo cual se conformaron las versiones finales con problemas de aplicaciones del límite de funciones reales.

Para la aplicación de la prueba en noviembre del 2018, en cada una de sus formas, los estudiantes dispusieron de 2 horas y 30 minutos. Las pruebas fueron aplicadas en las respectivas salas de los niveles, durante el horario normal de clases de Cálculo I y con una diferencia de una semana entre la aplicación de cada forma de prueba. La confiabilidad total de ambas formas, se midió con el coeficiente de equivalencia de Spearman-Brown y se obtuvo un valor de r=0,78. A continuación, en las Tablas 1 y 2 se presenta la distribución de los problemas de la prueba en sus formas A y B, según la clasificación de tipos de competencias matemáticas (Díaz y Poblete, 2004) con 7 problemas en cada forma.

Tabla 1. Distribución según Tipo de Competencia, Forma A

Problema	Tipo de Competencia
Problema 1	Competencia tipo 2 :Contexto Realista
Problema 2	Competencia tipo 2 :Contexto Fantasista
Problema 3	Competencia tipo 3
Problema 4	Competencia tipo 2: Contexto Realista
Problema 5	Competencia tipo 1
Problema 6	Competencia tipo 3
Problema 7	Competencia tipo 2 :Contexto Fantasista

Fuente: Datos de la Investigación

Tabla 2. Distribución según Tipo de Competencia, Forma B

Problema	Tipo de Competencia
Problema 1	Competencia tipo 2 :Contexto Realista
Problema 2	Competencia tipo 2 :Contexto Fantasista
Problema 3	Competencia tipo 3
Problema 4	Competencia tipo 2: Contexto Realista
Problema 5	Competencia tipo 1
Problema 6	Competencia tipo 3
Problema 7	Competencia tipo 2 :Contexto Fantasista

Fuente: Datos de la Investigación

La evaluación del desempeño de los estudiantes, se consideró en relación al grado de avance de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos, y se estimó de acuerdo al modelo de Rasch (1980, adaptado por Díaz y Poblete, 1998). A este modelo se le asocia una escala de cinco puntos, que indican los niveles de progreso de los estudiantes hacia la solución correcta del problema. Esta escala de puntajes registra cada detalle en el intento de los alumnos en encontrar la solución y se presenta a continuación en la Tabla 3.

Tabla 3. Escala de Puntajes

Puntaje	Etapas de la solución
0	*No comienzo* El estudiante es incapaz de comenzar el problema o entrega un trabajo que no tiene significado alguno.
1	*Enfoque* El estudiante enfoca el problema con un trabajo significativo, indicando una comprensión del problema, pero encuentra rápidamente una dificultad.
2	*Substancia* Suficientes detalles demuestra que el estudiante se ha orientado hacia una solución racional, pero errores importantes o interpretaciones erróneas impiden el proceso de resolución correcta.
3	*Resultado* El problema está casi resuelto, algunos pequeños errores conducen a una solución final errada.
4	*Completación* Un método apropiado ha sido utilizado y ha producido una solución correcta.

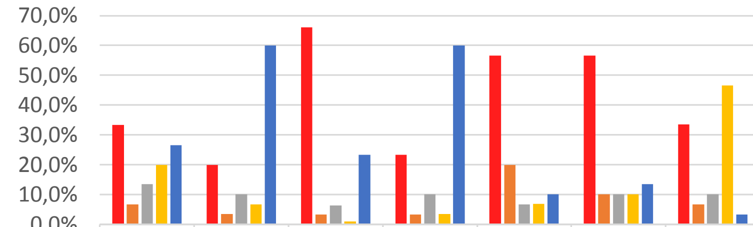
Fuente: RASH (1980)
(Adaptada por Díaz y Poblete, 1998)

RESULTADOS

Pruebas de resolución de problemas

En los gráficos siguientes, se presentan los resultados obtenidos por los estudiantes de ingeniería Ambiental, Civil en Informática y Civil Industrial del Campus Puerto Montt, e ingenierías Civil en Informática y Comercial del Campus Osorno, en la prueba de resolución de problemas en sus formas A y B y evaluada de acuerdo al modelo de Rasch, que contempla las etapas de No comienzo, Enfoque, Substancia, Resultado y Completación, para los tres tipos de competencias matemáticas.

El gráfico 1 representa el desempeño de los estudiantes de las cinco ingenierías en la Forma A de la prueba, de acuerdo al modelo de Rasch.

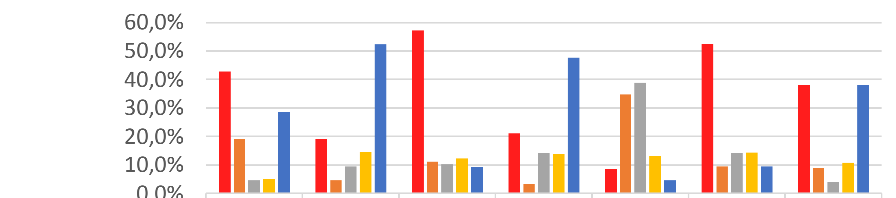


	Problema N° 1	Problema N° 2	Problema N° 3	Problema N° 4	Problema N° 5	Problema N° 6	Problema N° 7
No comienzo	33,3%	20,0%	66,0%	23,3%	56,6%	56,6%	33,5%
Enfoque	6,6%	3,4%	3,3%	3,3%	20,0%	10,0%	6,6%
Substancia	13,5%	10,0%	6,4%	10,0%	6,6%	10,0%	10,0%
Resultado	20,0%	6,6%	1,0%	3,4%	6,8%	10,0%	46,6%
Completación	26,6%	60,0%	23,3%	60,0%	10,0%	13,4%	3,3%

Gráfico 10. Porcentaje de Desempeño en la Prueba Forma A

En relación a la Prueba Forma A, considerando simultáneamente las etapas de Resultado y Completación, se puede apreciar que los estudiantes de las cinco ingenierías, mostraron un mejor desempeño en los problemas 2, 4 y 7 con 66,6%, 63,4% y 49,9% de logro respectivamente. Todos corresponden a la Competencia Tipo 2 de problemas rutinarios de contexto: realista (problema 4) y fantasista (problemas 2 y 7). Con el mismo análisis de ambas etapas, mostraron menor desempeño en la competencia Tipo 1 problema 5 (16,8%) y en la Competencia Tipo 3 de problemas no rutinarios: problemas 3 y 6, con 24,3% y 23,4% de logro respectivamente. Cabe hacer notar que en estos problemas no rutinarios, más del 50% se quedó en la etapa de No comienzo, siendo incapaces de comenzar el problema o entregando un trabajo carente de significado alguno.

El gráfico 2 representa el desempeño de los estudiantes de las cinco ingenierías en la Prueba Forma B, de acuerdo al modelo de Rasch.



	Problema N° 1	Problema N° 2	Problema N° 3	Problema N° 4	Problema N° 5	Problema N° 6	Problema N° 7
No comienzo	42,8%	19,0%	57,1%	21,1%	8,5%	52,5%	38,1%
Enfoque	19,0%	4,7%	11,2%	3,3%	34,7%	9,5%	9,0%
Substancia	4,7%	9,5%	10,2%	14,2%	38,8%	14,2%	4,1%
Resultado	5,0%	14,5%	12,2%	13,8%	13,3%	14,3%	10,7%
Completación	28,5%	52,3%	9,3%	47,6%	4,7%	9,5%	38,1%

Gráfico 2. Porcentaje de Desempeño en la Prueba Forma B

De acuerdo al gráfico 2, el mayor desempeño de los estudiantes de las cinco ingenierías considerando las dos etapas Resultado y Completación, donde el problema está casi resuelto o se utilizó un método apropiado que permitió llegar a la solución correcta, se obtuvo en la Competencia Tipo 2, de problemas rutinarios de contexto, tanto realista problema 4 (61,4%) como fantasistas: problemas 2 y 7, con 66,8% y 48,8% de logro respectivamente. Al igual que en la prueba Forma A, sobre el 50% de los estudiantes se quedó en la etapa de No comienzo, siendo incapaces de comenzar el problema.

Con respecto a los menores desempeños, estos se registraron en la competencia Tipo 1 problema 5 (18%) y en la Competencia Tipo 3 de problemas no rutinarios: problemas 3 y 6 con 21,5% y 23,8% de logro respectivamente.

Tipos de Competencias Matemáticas

Competencia Tipo 1

En la Competencia Tipo 1 Conocimiento y Desarrollo de Procedimientos Matemáticos, se incluyó un problema en cada forma de la prueba.

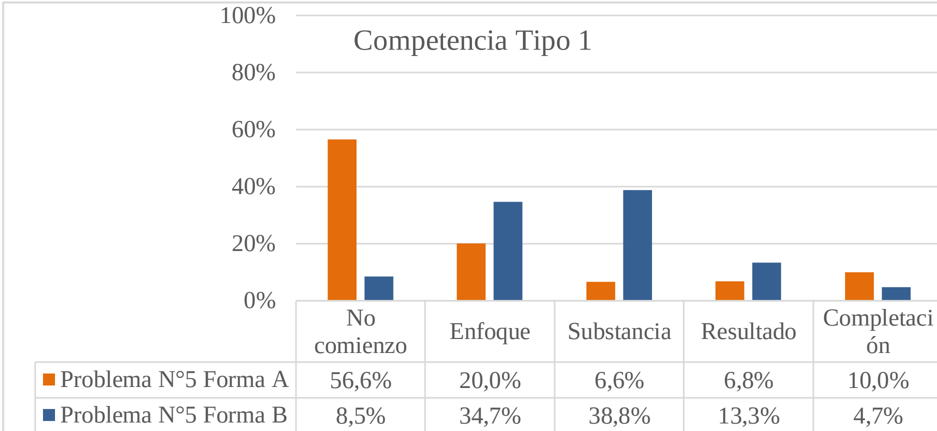


Gráfico 3. Porcentaje de Desempeño en Competencia Tipo 1

El gráfico 3 muestra el desempeño de los estudiantes de las cinco ingenierías en el problema N°5 en ambas formas de prueba. La mayoría de los estudiantes muestra un bajo desempeño, con un 65,1% que se queda en la etapa de No Comienzo del problema. El 45,4% de los estudiantes logra orientarse hacia una solución racional y aborda el problema con un procedimiento adecuado, sin embargo, en ambos casos solo un 14,7% de ellos logra una solución correcta completamente. A continuación se muestra el problemas 5 de la Forma A y un ejemplo de respuesta de un estudiante en la Figura 2.

"La Federación de caza de cierto estado introduce 50 ciervos en una determinada región. Se cree que el número de ciervos crecerá siguiendo el modelo:

$$N(t) = \frac{10(5+3t)}{1+0{,}04t}$$

Donde t es el tiempo en años. a) Calcule el número de animales que habrá luego de 5 y 10 años, b)¿A qué valor tenderá la población cuando t tiende a infinito?"

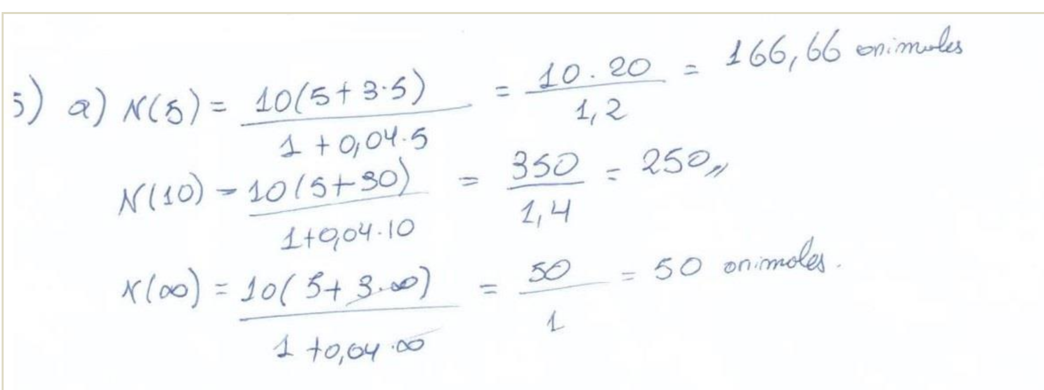


Figura 2. Respuesta de un Estudiante al Problema 5.

En la resolución del quinto problema, se puede observar que el estudiante comprende el problema, pero realiza una incorrecta aplicación de límite cuando tiende al infinito.

Competencia Tipo 2

En la Competencia Tipo 2 Resolución de Problemas Rutinarios, se incluyeron cuatro problemas rutinarios de contexto en cada forma de la prueba: problemas 1 y 4 rutinario de contexto realista, y problemas 2 y 7 rutinarios de contexto fantasista.

	No comienzo	Enfoque	Substancia	Resultado	Completación
Problema 1	33,3%	6,6%	13,5%	20,0%	26,6%
Problema 2	20,0%	3,4%	10,0%	6,6%	60,0%
Problema 4	23,3%	3,3%	10,0%	3,4%	60,0%
Problema 7	33,5%	6,6%	10,0%	46,6%	3,3%

Gráfico 4. Porcentaje de Desempeño en Competencia Tipo 2 Forma A

En relación a la Competencia Tipo 2, de la forma A, de acuerdo al gráfico 4, el desempeño de los estudiantes fue alto en los problemas N°2 y N°7, ambos rutinarios de contexto fantasista, logrando un 66,6% y 49,3% de logro respectivamente. En general en estos problemas los estudiantes se orientan hacia una solución racional, y muestran el problema casi resuelto, o utilizan un método apropiado de trabajo, logrando una solución correcta.

	No comienzo	Enfoque	Substancia	Resultado	Completación
Problema 1	42,8%	19,0%	4,7%	5,0%	28,5%
Problema 2	19,0%	4,7%	9,5%	14,5%	52,3%
Problema 4	21,1%	3,3%	14,2%	13,8%	47,6%
Problema 7	38,1%	9,0%	4,1%	10,7%	38,1%

Gráfico 5. Porcentaje de Desempeño en Competencia Tipo 2 Forma B

En lo concerniente a la Competencia Tipo 2, de la forma B, de acuerdo al gráfico 5, el desempeño de los estudiantes fue nuevamente alto en los problemas N°2 y N°7, ambos rutinarios de contexto fantasista, logrando un 66,8% y 48,8% de logro respectivamente, cuando se consideran las etapas de Resultado y Completación, dado que en estos problemas sólo tuvieron pequeños errores de solución o la solución correcta. A continuación se presentan uno de los problemas fantasista de la forma A y un ejemplo de respuesta de un estudiante.

“El banco ofrece la tarjeta de crédito “Máster Plop”. Por datos obtenidos a lo largo del tiempo, han determinado que el porcentaje de cobranza de las que se otorgan en un mes cualquiera es función del tiempo transcurrido después de concederlas. Esta función es:

$$P = f(t) = 0{,}9\left(1 - 3^{-0{,}08t}\right)$$

Donde P es el porcentaje de cuentas por cobrar t meses después de otorgar la tarjeta

a) ¿Qué porcentaje se espera cobrar luego de 2 y 5 meses?

b) Si el número de meses transcurridos desde el otorgamiento de la tarjeta “Máster Plop” crece indefinidamente, determine el porcentaje de las mismas que se espera cobrar”.

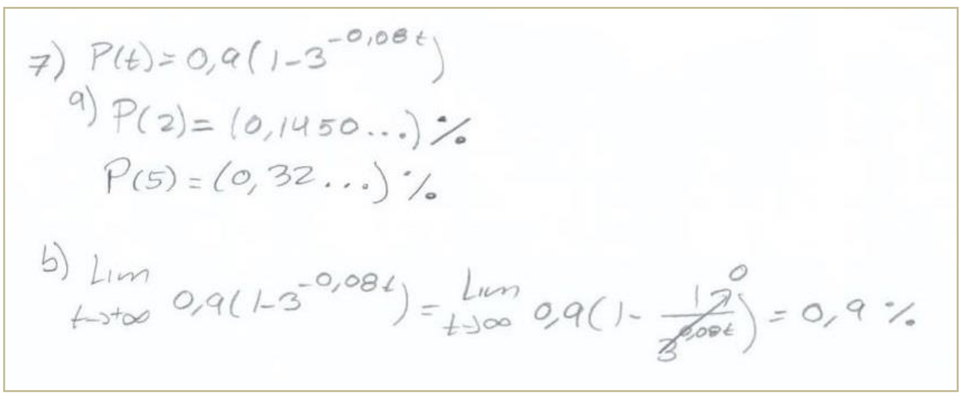


Figura 3. Respuesta de un Estudiante al Problema 2.

En lo que respecta a la respuesta del estudiante, si bien comprende el problema, deja expresado los decimales como porcentaje, pero no presenta el desarrollo completo. Cabe hacer notar que los problemas rutinarios de contexto fantasista, son fruto de la imaginación y están sin fundamentos en la realidad, sin embargo resultaron más abordados y mejor respondidos por los estudiantes.

Competencia Tipo 3

En la Competencia Tipo 3 Planteamiento y Resolución de Problemas No Rutinarios, se incluyeron dos problemas en cada forma de la prueba: problemas 3 y 6. A continuación en el Gráfico 6 se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes de las cinco ingenierías sujetos a estudio.

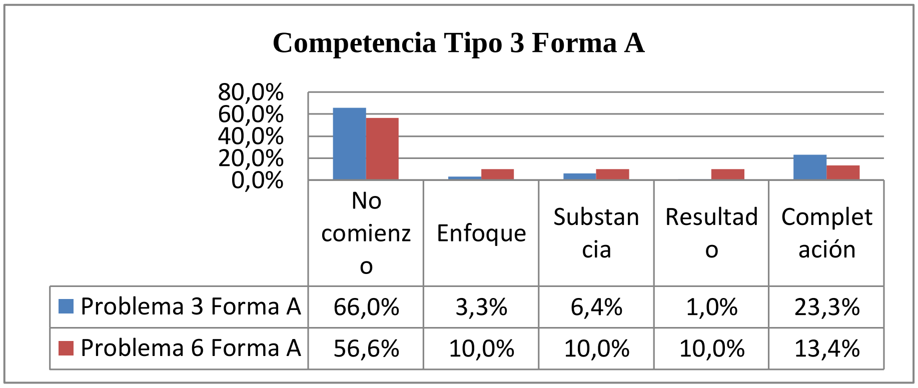


Gráfico 6. Porcentaje de Desempeño en Competencia Tipo 3 Forma A

En forma general, los estudiantes de ingeniería en la forma A de la prueba de resolución de problemas de límites de funciones reales, mostraron un nivel de desempeño muy bajo. En el problema 3 y en el problema 6, el 66% y el 56,6% respectivamente, no generaron ningún tipo de resolución o entregaron un trabajo que no tiene significado alguno quedando en la etapa de No comienzo. Entre ambos problemas, el 13,3% lograron enfocarlo con un trabajo significativo indicando una comprensión del problema, pero sólo el 36,7 % de ellos lo resolvió correctamente logrando la etapa de Completación.

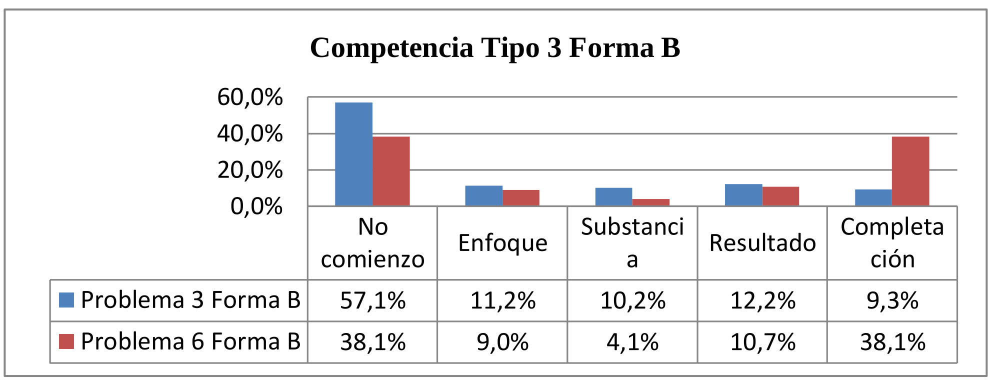


Gráfico 7. Porcentaje de Desempeño en Competencia Tipo 3 Forma B

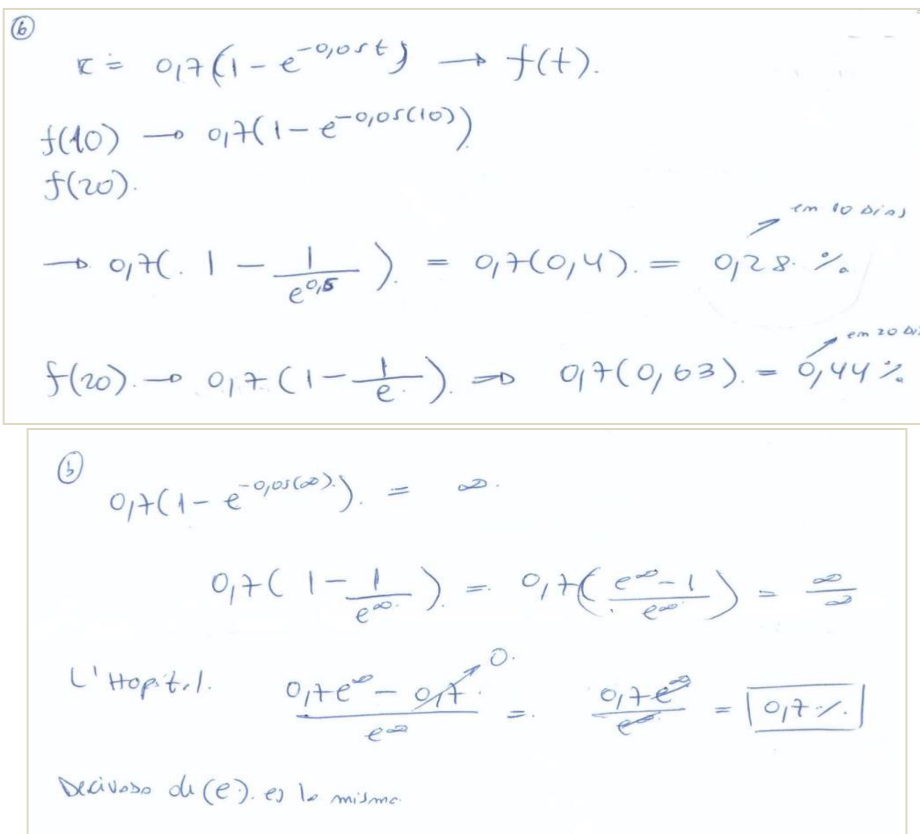
De acuerdo al gráfico 7, en la forma B de la prueba de resolución de problemas de límites de funciones reales, los estudiantes de las cinco ingenierías, mostraron un nivel de desempeño bajo, pero con pequeñas diferencias a favor en relación a los porcentajes de desempeño de la forma A. En el problema 3 y en el problema 6, el 57,1% y el 38,1% respectivamente, no generaron ningún tipo de resolución quedando en la etapa de No comienzo. Entre ambos problemas, el 14,3% se orientó hacia una solución racional, pero errores importantes impidieron el proceso de resolución correcta, y finalmente el 47,4 % de ellos lo resolvió correctamente logrando la etapa de Completación. A continuación se muestra el problema 6 no rutinario de la forma B de la prueba y un ejemplo de respuesta de un estudiante al problema en su totalidad.

"Una institución está planeando una campaña para recaudar fondos. Por experiencia se sabe que los aportes totales son función de la duración de la campaña. En una ciudad se ha determinado esta función respuesta que expresa el porcentaje de la población R (expresado en fracción decimal) que hará un donativo en función del número de días t de la campaña. La expresión de la misma es:

$$R = 0{,}7\left(1 - e^{-0{,}05t}\right)$$

a) ¿Qué porcentaje de la población hará un donativo a los 10 días de haberse iniciado la campaña y luego de 20 días?

b) Calcule el porcentaje de la población que habrá contribuido con la institución si la campaña publicitaria continúa por tiempo indefinido".


6

$R = 0{,}7(1 - e^{-0{,}05t}) \to f(t).$

$f(10) \to 0{,}7(1 - e^{-0{,}05(10)})$

$f(20).$

$\to 0{,}7(1 - \frac{1}{e^{0{,}5}}) = 0{,}7(0{,}4) = 0{,}28\ \%$ en 10 días

$f(20) \to 0{,}7(1 - \frac{1}{e}) \Rightarrow 0{,}7(0{,}63) = 0{,}44\ \%$ en 20 días

b

$0{,}7(1 - e^{-0{,}05(\infty)}) = \infty$

$0{,}7(1 - \frac{1}{e^{\infty}}) = 0{,}7\left(\frac{e^{\infty} - 1}{e^{\infty}}\right) = \frac{\infty}{\infty}$

L'Hopital. $\frac{0{,}7e^{\infty} - \cancel{0{,}7}^{\,0}}{e^{\infty}} = \frac{\cancel{0{,}7e^{\infty}}}{\cancel{e^{\infty}}} = \boxed{0{,}7\ \%}$

Derivada de (e) es lo mismo

Figura 4. Respuestas de un Estudiante al Problema 6.

De acuerdo a las respuestas, el estudiante comprende el problema, con un desarrollo correcto, a excepción sólo de su respuesta final, dado que deja expresado los decimales como porcentaje.

Errores y Competencias Matemáticas

Para establecer la relación entre los errores en la resolución de problemas basados en tipos de competencias matemáticas, se procedió a realizar el análisis de los instrumentos evaluativos en su forma A y B. En primera instancia se identificaron los errores de los estudiantes, luego, los datos analizados se agruparon de acuerdo a la clasificación de errores de Movshovitz-Hadar, Zaslavski y Inbar(1987), y a los problemas de acuerdo al tipo de competencia matemática de Díaz y Poblete (2004). Se obtuvieron los siguientes resultados.

Tabla 4. Relación entre Errores y Competencia Tipo 1

				Datos mal utilizados	**Interpretación incorrecta del lenguaje**	**Inferencias no válidas lógicamente**	**Uso de teoremas y definiciones deformadas**	**Falta de verificación de la solución**	**Errores técnicos**
Competencia Tipo 1	**Ing. Ambiental Pto..Montt**	**Problema**	**N°5**				**25%**		
	Ing. Civil Industrial Pto..Montt	**Problema**	**N°5**				**36,4%**		**9,1%**
	Ing. Civil Informática Osorno	**Problema**	**N°5**			**22,2%**	**44,4%**	**22,2%**	**22,2%**
	Ing. Civil Informática Pto.. Montt	**Problema**	**N°5**				**60%**		**40%**
	Ing. Comercial Osorno	**Problema**	**N°5**				**22,7%**		

A partir de los resultados de la Tabla 4, la Competencia Tipo 1 de Conocimiento y Desarrollo de Procedimientos Matemáticos, presenta la mayor relación con los errores debido al uso de teoremas y definiciones deformadas. En esta competencia los estudiantes de las cinco ingenierías, se ven enfrentados a problemas que no necesariamente están relacionados a contextos de la vida diaria, por lo que, para resolverlos, debían manejar los conceptos y teoremas sobre límites de funciones reales. La carrera que mayor porcentaje de error presentó fue Ingeniería Civil en Informática del Campus Osorno.

Cabe destacar que, en este tipo de competencias, el 100% de los estudiantes de las cinco ingenierías no presentan errores debido a datos a mal utilizado ni errores por una interpretación incorrecta del lenguaje.

Tabla 5. Relación entre Errores y Competencia Tipo *2*

				Datos mal utilizados	Interpretación incorrecta del lenguaje	Inferencias no válidas lógicamente	Uso de teoremas y definiciones deformadas	Falta de verificación de la solución	Errores técnicos
Competencia Tipo 3	Ing. Ambiental Pto..Montt	Problema	N°1			25%	25%		50%
			N°2	25%	25%			50%	25%
			N°4						25%
			N°7						25%
	Ing. Civil Industrial Pto..Montt	Problema	N°1			18,2%	18,2%	18,2%	27,3%
			N°2	9,1%	9,1%			18,2%	9,1%
			N°4				9,1%	9,1%	27,3%
			N°7	9,1%			9,1%		
	Ing. Civil Informática Osorno	Problema	N°1	11,1%	11,1%	44,4%	33,3%	33,3%	44,4%
			N°2		11,1%		11,1%		11,1%
			N°4		11,1%		11,1%	11,1%	11,1%
			N°7	11,1%			77,8%		11,1%
	Ing. Civil Informática Pto.. Montt	Problema	N°1				20%	60%	60%
			N°2						
			N°4				20%		
			N°7		20%		20%		
	Ing. Comercial Osorno	Problema	N°1			13,6%	40,9%	4,5%	18,2%
			N°2	4,5%	4,5%	4,5%	4,5%		13,6%
			N°4			4,5%		9,1%	13,6%
			N°7	13,6%	13,6%		18,2%		4,5%

De acuerdo a la Tabla 5, la Competencia Tipo 2 de Resolución de Problemas Rutinarios presenta una relación en mayor frecuencia y porcentaje sólo con los errores técnicos. Lo cual también concuerda con el desempeño de los estudiantes en la prueba, ya que en esta competencia los estudiantes se ven enfrentados a problemas de contexto realista y fantasista, que al estar relacionados a contextos de la vida diaria, permiten una mayor comprensión y favorece la resolución de éstos, a excepción de pequeños errores que llevan a una respuesta incorrecta. De igual forma, se detectan errores debidos a la falta de verificación de la solución.

La carrera que tuvo más errores fue Ingeniería Comercial del Campus Osorno, y la carrera que presentó menos errores fue Ingeniería Civil en Informática del Campus Puerto Montt.

Tabla 6. Relación entre Errores y Competencia Tipo *3*

				Datos mal utilizados	Interpretación incorrecta del lenguaje	Inferencias no válidas lógicamente	Uso de teoremas y definiciones deformadas	Falta de verificación de la solución	Errores técnicos
Competencia Tipo 3	Ing. Ambiental Pto..Montt	Problema	N°3				11,1%		
			N°6						25%
	Ing. Civil Industrial Pto..Montt	Problema	N°3				27,3%		
			N°6	18,2%	18,2%	27,3%	27,3%		36,4%
	Ing. Civil Informática Osorno	Problema	N°3			11,1%	55,6%	11,1%	11,1%
			N°6				44,4%		
	Ing. Civil Informática Pto.. Montt	Problema	N°3				40%		40%
			N°6				20%		20%
	Ing. Comercial Osorno	Problema	N°3				18,2%		4,5%
			N°6	4,5%	9,1%	4,5%	18,2%		9,1%

En lo que respecta a la Competencia Tipo 3 de Planteamiento y Resolución de Problemas No Rutinarios, de acuerdo a la Tabla 6, en mayor grado se visualizan los errores debido a uso de teoremas o definiciones deformadas y a errores técnicos. Esto concuerda con el desempeño de los estudiantes en las dos formas de la prueba, dado que un problema no rutinario es un problema en que no se determinan directamente los métodos para resolverlo. Requiere un proceso de pensamiento razonablemente maduro, para que los estudiantes comprendan el propósito del problema dado. Cabe señalar que las carreras que más errores mostraron en este tipo de competencia fueron Ingeniería Civil Industrial, Campus Puerto Montt e Ingeniería Comercial Campus Osorno. En un porcentaje muy reducido, los estudiantes cometieron errores debido a la falta de verificación de la solución.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El conocimiento de los resultados obtenidos en este estudio es pertinente en el diseño curricular por competencias y es importante que se consideren antecedentes para los profesores de esta institución. Sobre la base de la prueba de matemática en sus formas A y B, con resolución de problemas sobre aplicaciones de límite, aplicada a los estudiantes que cursaron Cálculo I en sus estudios de ingeniería Ambiental, Civil en Informática, Civil Industrial del Campus Puerto Montt, e ingenierías Civil en Informática y Comercial del Campus Osorno, en 2018, podemos extraer las siguientes conclusiones.

En relación a la Prueba tanto en su Forma A como Forma B, considerando las etapas de Resultado y Completación donde el problema está casi resuelto o se utilizó un método apropiado que permitió llegar a la solución correcta, los estudiantes de las cinco ingenierías, registraron resultados similares. Mostraron un mejor desempeño en la Competencia Tipo 2 de *Problemas Rutinarios* de contexto: realista y fantasista. Los problemas rutinarios de contexto fantasista, son fruto de la imaginación y están sin fundamentos en la realidad, sin embargo resultaron ser los problemas más abordados y mejor respondidos por los estudiantes de las cinco ingenierías. En una relación errores y tipo de competencia, los estudiantes en general presentan una relación en mayor frecuencia y porcentaje en uso de teoremas y definiciones deformadas y errores técnicos.

Con el mismo análisis de ambas etapas, es decir, Resultado y Completación, mostraron menor desempeño en la competencia Tipo 1 *Conocimiento y Desarrollo de Procedimientos Matemáticos* y en la Competencia Tipo 3 de *Resolución de Problemas No Rutinarios*.

Con respecto al problema asociado a la competencia Tipo 1, llama la atención que la mayoría de los estudiantes muestra un bajo desempeño, con un 65,1% que se queda en la etapa de No Comienzo del problema y sólo el 34,8% se acerca al resultado correcto. Básicamente consiste en problemas con cálculo y definiciones del tipo más común que aparecen en las evaluaciones convencionales en donde debían manejar los conceptos y teoremas sobre límites. A su vez, la totalidad de los estudiantes de las cinco ingenierías no presentan errores debido a datos a mal utilizado ni errores por una interpretación incorrecta del lenguaje.

Una situación similar ocurre con la competencia Tipo 3, donde más del 50% se quedó en la etapa de No comienzo, siendo incapaces de comenzar el problema. Nuestros resultados coinciden con Murdiyani (2018), cuando indica que los estudiantes no tienen habilidades para resolver problemas no rutinarios o con altos niveles de dificultad porque la mayoría de las preguntas de las lecciones solo se enfocan en problemas con niveles de dificultad bajo. A diferencia de los problemas de rutina que requieren aplicaciones de cálculos rutinarios o regulares, los problemas no rutinarios no tienen una forma directa de abordar la pregunta, pero requieren un pensamiento creativo y la aplicación de algunas estrategias para comprender el problema y encontrar la mejor manera de resolverlo (Pantziara, Gagatsis y Elia, 2009). Por lo tanto, los problemas no rutinarios tienden a ser más complejos y más difíciles que los problemas rutinarios. Sweller, Clark y Kirschner (2010) declararon que la resolución de problemas se enseña independientemente de las herramientas básicas y el pensamiento básico. Con el tiempo, los estudiantes construyen un repertorio de técnicas de resolución de problemas. En última instancia, la diferencia entre alguien que es bueno y alguien que es malo para resolver problemas no rutinarios no es que el buen solucionador de problemas haya aprendido a resolver problemas novedosos que no se habían visto antes. Es más el caso que, a medida que los estudiantes aumentan su experiencia, los problemas no rutinarios les parecen rutinarios. En este tipos de competencia, en mayor grado se visualizan los errores debido a uso de teoremas o definiciones deformadas y a errores técnicos.

Los problemas aplicados en este trabajo han puesto de manifiesto que los estudiantes de ingeniería analizados, no cuentan con las competencias matemáticas necesarias para resolver problemas de aplicaciones de límite de funciones y en su resolución cometen variados errores. La mayor frecuencia de errores la resolución de los problemas de aplicaciones de límite, corresponde a errores debido al uso de teoremas o definiciones deformadas. En esta categoría se encuentran los errores por aplicaciones de teoremas sin las condiciones necesarias, por aplicación de propiedades que no corresponden, por la realización de una valoración inadecuada de una definición, teorema o fórmula. También se registró una importante frecuencia de errores técnicos, que incluye los errores del cálculo, en la extracción de datos de las tablas, los errores en la manipulación de símbolos algebraicos elementales, etc.

Somos conscientes de que los resultados obtenidos vienen limitados por el tamaño de la muestra y los problemas específicos utilizados, pero coinciden con las investigaciones que señalan que cuando las matemáticas se aíslan de su uso en Ingeniería, se pierde una oportunidad para promover una percepción del verdadero valor de su utilidad en el sentido más amplio. Incluso las percepciones de los estudiantes mejorarían significativamente si los programas de Ingeniería en Educación Superior incluyeran ejemplos adecuados de aplicaciones del uso de las matemáticas en Ingeniería (Harris et al., 2014).

REFERENCIAS

Beynon, K. y Zollman, A. (2016). Lacking a rigorous concept of limit: Advanced nonmathematics students' personal concept definitions. *Journal Investigation in Mathematics Learning*, 8(1), 47-62.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(4), 487-500.

Brodie, K. (2005). Using cognitive and situative-perspectives to understand teacher interaction with learner errors. In H.L. Chick & J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177–184). Melbourne: PME.

Brodie, K. (2006). Teaching mathematics for equity: learner contributions and lesson structure. *African Journal for Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 10(1), 13–24.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. London: Springer.

Cappetta, R. (2007). *Reflective abstraction and the concept of limit: A quasi-experimental study to improve student performance in college calculus by promoting reflective abstraction through individual, peer, instructor and curriculum initiates*. Unpublished doctoral dissertation, Northern Illinois University, DeKalb, IL.

Cappetta, R.W., y Zollman, A. (2009). Creating a discourse-rich classroom on the concept of limits in calculus: Initiating shifts in discourse to promote reflective abstraction. In L. Knott (Eds.) *The Role of Mathematics Discourse in Producing Leaders of Discourse* (pp. 17-39). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Cappetta, R. W., y Zollman, A. (2013). Agents of change in promoting reflective abstraction: A quasi-experimental, study on limits in college calculus. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(3), 343-357.

Cory, B. L., y Gaofalo, J. (2011). Using dynamic sketches to enhance preservice secondary mathematics teachers understanding of limits of sequences. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42, 65-97.

Davis, R.B. (1984). *Learning mathematics: the cognitive science approach to mathematics education*. London: Groom Helm.

Dawkins, P. (2012). Metaphor as a possible pathway to more formal understanding of the definition of sequence convergence. *Journal of Mathematical Behavior*, 31(3), 331-343.

Díaz V. y Poblete Á. (1998). Resolver tipos de problemas matemáticos: ¿una habilidad inhabilitante? *Revista Epsilon*, 14(42), 409-423.

Díaz V. y Poblete Á. (2004). *Evaluación longitudinal de aprendizajes matemáticos, objetivos transversales e indicadores de contexto*. Santiago, Chile: Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, 2004. (Proyecto Fondecyt N°1040035).

Díaz V. y Poblete Á. (2016). Modelo de competencias profesionales de matemáticas y su implementación en profesores de la enseñanza primaria. *Bolema*, Rio Claro (SP), (30)55, 786-807. doi.10.1590/1980-4415v30n55a23.

Díaz V. y Poblete Á. (2017). A model of professional competences in mathematics and didactic knowledge of teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48 (5), 702-714. doi: 10.1080/0020739X.2016.1267808.

Díaz V. (2018). The competence of solving mathematical problems in the formation of ethical values. *International Journal of Educational and Pedagogical Sciences*, 20 (8).World Academy of Science, Engineering and Technology.

Drews, D. (2005). Children's mathematical errors and misconceptions: perspectives on the teacher's role. In A. Hansen (Eds.), *Children errors in mathematics: Understanding common misconceptions in primary schools* (pp.14–21). Britain: Paperback.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: Routledge Falmer.

Kirkley, J. (2003). *Principles for teaching problem solving*. Bloomington:PLATO Learning.

Foster, D. (2007). Making meaning in algebra examining students'understandings and misconceptions. *Assessing Mathematical Proficiency*, 53,163–176.

Harris, D., Black, L., Hernandez-Martinez,P., Pepin B., y Williams, J. (2014). Mathematics and its value for engineering students: what are the implications for teaching? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(3), 321-336. doi:10.1080/0020739X.2014.979893.

Hatano, G. (1996). A conception of knowledge acquisition and its implications for mathematics education. In P Steffe, P Nesher, P Cobb, G Goldin, & B Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 197–217). New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Liang, S. (2016). Teaching the concept of limit by using conceptual conflict strategy and Desmos graphing calculator. *International Journal of Research in Education and Science*, 2(1), 35-48.

Luneta, K, y Makonye, P.J. (2010). Learner errors and misconceptions in elementary analysis: A case study of a grade 12 class in South Africa. *Acta Didactica Napocensia*, 3(3), 35–46.

Merenluoto, K. y Lehtinen, E. (2000). The "conflicting" concepts of continuity and limit: A conceptual change perspective. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Hiroshima: PME.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavski, O. y Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18 (1), 3-14.

Murdiyani, N.M. (2018). Developing non-routine problems for assessing students' mathematical literacy. *Journal of Physics: Conference Series 983*. doi :10.1088/1742-6596/983/1/012115.

Muzangwa, J., y Chifamba, P. (2012). Analysis of Errors and Misconceptions in the Learning of Calculus by Undergraduate Students. *Acta Didactica Napocensia*, 5(2), 1-10.

Nesher, P. (1987). Towards an instructional theory: the role of student's misconceptions. *For Learning of Mathematics*, 7(3), 33–40.

Oehrtman, M. (2009). Collapsing dimensions, physical limitation, and other student metaphors for limits concepts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40 (4), 396-426.

Olivier, A. (1989). *Handling pupils' misconceptions*. Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

Orton, A. (1983a). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 235–250.

Orton, A. (1983b). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1–18.

Pantziara M., Gagatsis A y Elia I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, 72(1), 39-60.

Polya, G. (1973). *How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton, New Jersey:Princeton University Press.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 103-132.

Radatz, H. (1979) Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10 (3), 163-172.

Rasch, G. *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. (Copenhagen, Danish Institute for Educational Research), expanded edition (1980) with foreword and afterword by B. Wright. Chicago: The University of Chicago Press, 1960/1980.

Ryan, J, y Williams, J. (2000). *Mathematical discussions with children: exploring methods and misconceptions as a teaching strategy*. Manchester: Centre for mathematics education. University of Manchester.

Roh, K. H. (2010). An empirical study of students understanding of a logical structure in the definition of limit via the-strip activity. *Educational Studies in Mathematics*, 73, 263-279.

Schoenfeld, A. H. (1987). Polya, Problem Solving, and Education. *Mathematics Magazine*, 60(5), 283–291.

Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on Problem Solving Theory and Practice. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1,2), 9–32.

Simamora, R., Saragih, S., y Siregar, H. (2019). Improving students' mathematical problem solving ability and self-efficacy through guided discovery learning in local culture context. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(1), 61-72. doi:10.12973/iejme/3966.

Siyepu, S.W. (2015). Analysis of errors in derivatives of trigonometric functions.*International Journal of STEM Education*, 2(16).doi:10.1186/s40594-015-0029-5.

Smith, J.P., DiSessa, A.A, y Rosehelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: a constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Science*, 3(2), 115–163.

Sweller J., Clark R. y Kirschner P. (2010). Teaching general problem-solving skills is not a substitute for, or a viable addition to, teaching mathematics. *Notices of the American Mathematical Society*, 57, 1303-1304.

Szetela, W., y Nicol, C. (1992). Evaluating Problem Solving in Mathematics. *Educational Leadership*, 5, 42–45.

Szydlik, J. E. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(3), 258-276.

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 219-236.

Verónica Díaz.
Doctora en Educación con especialización en Matemáticas. Académica Titular e Investigadora del Departamento de Ciencias Exactas en las líneas de resolución de problemas, competencias matemáticas y profesionales, evaluación en Matemática. Creadora del Doctorado en Educación Matemática y del Magister en Educación Matemática en la Universidad de Los Lagos, en sus Campus de Santiago y de Osorno, CHILE.
mvdiaz@ulagos.cl
http://orcid.org/0000-0001-6428-2711

Álvaro Poblete Letelier.
Ph.D. Didactique des Mathèmatiques.
Académico Titular e Investigador del Departamento de Ciencias Exactas en las líneas de resolución de problemas, competencias matemáticas y profesionales, formación de profesores. Creador del Doctorado en Educación Matemática y del Magister en Educación Matemática en la Universidad de Los Lagos, en sus Campus de Santiago y de Osorno, CHILE.
apoblete@ulagos.cl