

ELEMENTOS HISTÓRICOS, CONCEPTUALES Y DIDÁCTICOS EN LOS LIBROS DE TEXTO DE CÁLCULO: UN ESTUDIO SOBRE EL CONCEPTO DE LA DERIVADA.

Ramón Vielma

vielmatic@gmail.com

*Universidad Pedagógica Experimental Libertador - UPEL
Instituto Pedagógico "José Manuel Siso Martínez" (Venezuela)*

Recibido: 04/09/2018 **Aceptado:** 05/12/2018

RESUMEN

La investigación trata sobre los elementos históricos, conceptuales y didácticos de la derivada presente en cinco (5) Libros de Texto de Cálculo (LTC) que utilizan los profesores del área Matemática Aplicada (MA) en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL) Instituto Pedagógico de Miranda "José Manuel Siso Martínez" (IPMJMSM). Consiste en un estudio *teórico descriptivo*, empleando técnicas de Análisis de Contenido para dar respuesta a la siguiente interrogante: ¿Qué elementos históricos, conceptuales y didácticos están presentes en los LTC utilizados por los profesores de MA en el estudio del concepto de la derivada? Las conclusiones del trabajo muestra que en los LTC hay escasos elementos relacionados con la evolución histórica de los conceptos matemáticos, no se establecen conexiones entre las ideas geométricas y físicas con la definición formal del concepto. La resolución de ejercicios y problemas matemáticos constituyen los enfoques didácticos empleados por los autores de las obras en el estudio de la derivada.

Palabras Clave: Elementos históricos, conceptuales y didácticos, libros de texto de cálculo, derivada.

HISTORICAL, CONCEPTUAL AND DIDACTIC ELEMENTS IN THE CALCULATION TEXTBOOKS: A STUDY ON THE CONCEPT OF THE DERIVATIVE.

ABSTRACT

The research deals with the historical, conceptual and didactic elements of the derivative present in five (5) Calculus Textbooks those teachers of the Applied Mathematics (AM) area use in the Pedagogical Experimental University of Libertador (UPEL) Pedagogical Institute of Miranda "José Manuel Siso Martinez" (IPMJMSM). It consists of a descriptive theoretical study, using Content Analysis techniques to answer the following question: What historical, conceptual and didactic elements are present in the Calculus Textbooks used by AM teachers in the study of the concept of the derivative. The conclusions of the work show that in the Calculus Textbooks there are few elements related to the historical evolution of the mathematical concepts, no connections are established between the geometric and physical ideas with the formal definition of the concept. The resolution of exercises and mathematical problems constitute the didactic approaches used by the authors of the works in the study of the derivative.

Keywords: historical, conceptual and didactic elements, textbooks of calculation, derivative.

INTRODUCCIÓN

Los libros de texto de matemática representan un recurso didáctico indispensable para el profesor y estudiante de matemática, constituyen un medio fundamental para el estudio teórico de conceptos, teoremas, propiedades y el desarrollo práctico de ejercicios y problemas que se proponen

en el contexto del aula. Desde las primeras etapas de la educación básica hasta el nivel universitario, el texto de matemática es utilizado como un recurso que permite orientar los procesos educativos en el desarrollo de conocimientos disciplinares e interdisciplinares.

El autor de esta investigación considera de suma importancia estudiar desde un punto de vista conceptual y didáctico las actividades matemáticas que proponen los textos, como una mirada para el análisis de los conceptos matemáticos, su significado y aplicaciones (intra o extra matemáticas), sabiendo que el texto como recurso de enseñanza y aprendizaje, tiene sus influencias en la forma en cómo perciben, conciben, enseñan y aprenden los profesores y estudiantes de matemática los conceptos en el ámbito educativo o fuera de él.

Se realizó un estudio descriptivo siguiendo la técnica de análisis de contenidos (Martínez, 2004) a un conjunto de libros de texto de Cálculo a nivel universitario, atendiendo a una serie de categorías emergentes (ob. cit) obtenidas en una entrevista realizada a profesores de Matemática Aplicada del IPMJMSM.

En el IPMJMSM, Matemática Aplicada es un área de conocimiento, forma parte de los Concursos de Oposición que se desarrolla en el Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas para los profesores que deseen trabajar como personal fijo de la institución en los cursos: Introducción al Cálculo, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Cálculo de Varias Variables, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Tópicos en Cálculo Numérico, Tópicos en Cálculo I y Tópicos en Cálculo II.

Estas categorías emergentes constituyeron la base fundamental que guió la descripción y análisis de los textos consultados; posteriormente se describirán los criterios utilizados para la selección de los libros de texto de Cálculo y su análisis, dichas categorías tienen ver con algunos aspectos históricos, conceptuales y elementos didácticos que surgen de la entrevista a los profesores, provenientes de otra investigación realizada por el autor, titulada: *concepciones y creencias sobre la derivada y su enseñanza*, puesto que la pregunta en dicha investigación estuvo orientada a indagar sobre los sistemas de representación que tiene el concepto de la derivada desde un punto de vista matemático y extra matemático, presente en estos materiales educativos (Libros de texto).

El análisis de contenidos de los libros de texto tuvo como tema de estudio la derivada, tópico presente en los programas de los cursos: Cálculo Diferencial (especialidad de Matemática), Matemática General (especialidad de Electricidad, Electrónica y Mecánica Industrial) y Matemática Aplicada (Especialidad de Física) del IPMJMSM.

Las razones por las cuales se decide estudiar el tema de la derivada, en los libros de textos, se expondrá en el desarrollo de este apartado.

De seguidas, se describen los criterios utilizados para la selección de los textos de Cálculo, la delimitación, categorías y análisis de la documentación, finalmente, se presentan los resultados obtenidos y su discusión.

CRITERIOS PARA LA SELECCIÓN DE LOS LIBROS DE TEXTO.

Los criterios utilizados para la selección de los textos de Cálculo fueron los siguientes:

- Textos de Cálculo referenciados en el programa del curso *Cálculo Diferencial* en el IPMJMSM, los cuales para su selección se tomaron sólo aquellos que utilizan los profesores de Matemática Aplicada en dicho curso.
- Otros textos de Cálculo que utilizan los profesores de Matemática Aplicada en el curso Cálculo Diferencial, no referenciados en el programa del curso.

A continuación, se presentan los textos de Cálculo según la bibliografía del programa del curso *Cálculo Diferencial* del IPMJMSM.

- Bers, L. (1972). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Editorial Interamericana.
- Larson, H. (1989). *Cálculo con geometría analítica*. Madrid: Mc. Graw- Hill.
- Leithold, L. (1992). *El cálculo con geometría analítica*. México: Harla.
- Protter, M y Morrey, Ch. (1980). *El cálculo con geometría analítica*. México: Fondo Educativo Interamericano.
- Purcell, E. (1993). *Cálculo con geometría analítica*. Madrid: Prentice Hall.
- Swokowski, E. (1992). *Cálculo con geometría analítica*. México: Wadsworth Internacional Iberoamérica.
- Taylor, H. (1971). *Cálculo diferencial e integral*. México: Limusa.

Es importante señalar que los textos de Cálculo referenciados en el programa del curso *Cálculo Diferencial* en el IPMJMSM tienen fechas de edición y publicación no actualizadas que van desde los años (1970) hasta los años (1990), para ser más preciso hasta el año 1993, razón por el cual, algunos profesores de esta institución pedagógica prefieren utilizar textos que no están incluidos en dicho programa, tal como se muestra en el cuadro 1. Las razones por las cuales los profesores utilizan otros textos fuera del programa del curso, según la entrevista realizada a los mismos, se deben a ciertos criterios y/o características que los textos de Cálculo presentan, tales como: (1) Reseñas históricas del concepto, (2) Enfoque conceptual del autor en relación con las

definiciones, teoremas, propiedades, etc., (3) Ejercicios y problemas de aplicación que proponen y, (4) Propuestas didácticas para aplicar en el aula.

Basado en los criterios anteriores, realizamos el análisis de los textos de Cálculo que utilizan los profesores de Matemática Aplicada para el estudio del concepto de la derivada, con la finalidad de estudiar algunos elementos presente en el contenido de las obras consultadas, en relación a los conceptos, actividades matemáticas y propuestas didácticas y/o metodológicas que serían fundamentales aplicarlas dentro del contexto del aula.

En este sentido, los libros de texto seleccionados son (5) cinco: (2) dos de las obras están referenciadas en el programa del curso y los (3) tres restantes son textos adicionales utilizados por los profesores de Matemática Aplicada del IPMJMSM en el contexto del aula para el estudio del tema de la derivada de una función, tal como se presenta en el siguiente cuadro.

Cuadro 1. Descripción general de los textos.

Autor(es)	Título de la obra	1 ^{era} edición	Edición consultada	País	Editorial
Larson, R., Edwards, B., y Hostetler, R.	<i>Cálculo diferencial e integral</i>	s.f.	7 ^{ma}	México	Mc Graw Hill
Leithold, L.	<i>El cálculo</i>	s.f.	7 ^{ma}	México	Oxford
Sáenz, J	<i>Cálculo diferencial con funciones trascendentes tempranas para ciencias e ingeniería.</i>	s.f.	2 ^{da}	Venezuela	Hipotenusa
Swokowski, E.	<i>Cálculo con geometría analítica</i>	1975	2 ^{da}	EE.UU	Wadsworth Internacional Iberoamérica
Stewart, J.	<i>Cálculo: conceptos y contextos.</i>	s.f.	3 ^{era}	México	Thomson

Las obras de Swokowski (1992) y Leithold (1992), así como sus nuevas ediciones, ha sido considerado por los profesores de Matemática Aplicada como clásicos en la enseñanza/aprendizaje del cálculo en el IPMJMSM, por tal motivo, estas obras fueron seleccionadas para el análisis de su contenido.

Los autores de las obras de Cálculo en la tabla anterior son de nacionalidad extranjera; aunque el texto de Sáenz es editado en Venezuela a través de la editorial Hipotenusa.

Lo anterior refleja la influencia que han tenido las obras de nacionalidad extranjera en la enseñanza/aprendizaje del Cálculo a nivel universitario, tal como se puede evidenciar en el programa del curso Cálculo Diferencial del IPMJMSM, esto puede ser debido a razones como: (1) El tradicionalismo que representa la obra en la enseñanza/aprendizaje para los estudiantes y profesores que se forman en las instituciones educativas, (2) La influencia que ejerce el mercado en la venta de los textos, y (3) La existencia de pocos autores venezolanos que se han aventurado a publicar textos educativos universitarios relacionados con el Cálculo.

En relación con lo anterior, podemos citar algunos libros de texto de Cálculo de autores venezolanos como *Introducción al Cálculo* de Antonio Dávila, Pedro Navarro, y José Carvajal (2006) de la editorial Mc Graw-Hill obra destinada al estudio de los conocimientos matemáticos previos al Cálculo, además estos autores presentan una introducción a conceptos y propiedades de límites y derivadas. Por otra parte, obras publicadas en Universidades e Institutos Universitarios venezolanos, como *Límites de funciones de una variable real* y, *Derivadas de funciones reales de variable real* de los profesores Gustavo Pereira y Humberto Valera (2006; 2012); la primera publicación en Retos y Logros del IPMJMSM y la segunda publicación en la Subdirección de Investigación y Postgrado de la UPEL-Instituto Pedagógico de Barquisimeto; *Ecuaciones diferenciales ordinarias* de Mario Cavani (2003) e *Integrales Múltiples* de Arístides Rojas (2006) en los IV y VIII Talleres de Formación Matemática (TForMa) en la Universidad de Oriente (UDO), así como los libros de Pedro Alson (1999; 2001) *Métodos de graficación* y *Cálculo Básico* de la Universidad Central de Venezuela (UCV).

DELIMITACIÓN Y ANÁLISIS DE LA DOCUMENTACIÓN

Se delimitó el estudio al análisis de los elementos históricos, conceptuales y didácticos que emplean los autores de las obras de Cálculo con respecto al contenido de la derivada, por otra parte, se pretende describir diversas características y elementos esenciales del concepto, desde lo intra y extra matemático que pudieran ser útiles para su comprensión.

Se considera el estudio del concepto de la derivada por varias razones: (a) La derivada es uno de los conceptos fundamentales del Cálculo, (b) Reportes de investigación señalan que los estudiantes no tienen conocimiento sobre la esencia y/o significado del concepto, desde un punto de vista intra y extra matemático, (c) Su conocimiento es importante para el estudio del Cálculo Integral, Cálculo de Varias Variables y las Ecuaciones Diferenciales, y (d) El concepto de derivada es fundamental para el estudio de fenómenos naturales, sociales, económicos entre otros

relacionados con el cambio y la variación, en este sentido, la derivada es considerada por muchos investigadores Wenzelburger (1993), Dolores Flores, Alarcón y Albarrán (2002), Fey (2004), Dolores Flores (2005), Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008), Pino-Fan, Díaz Godino y; Font Moll (2011), Sánchez-Matamoros, Fernández, Valls, García y Llinares (2012), Vrancken y Engler (2014), García González y Dolores Flores (2016) como *la matemática de los cambios*, a través de sus resultados se pueden tomar decisiones y hacer predicciones sobre el comportamiento de algunos fenómenos como la velocidad de un móvil, la temperatura de un cuerpo, el crecimiento de una población, entre otros.

Por otra parte, se realizó el análisis de los contenidos en cada uno de los textos. Este análisis permitió acercarnos al libro de texto como un escenario de criterios y categorías ya definidas.

La actividad realizada para el análisis de los textos de Cálculo se expone a continuación:

Descripción de los contenidos y actividades matemáticas de los libros de texto de Cálculo de acuerdo a los criterios y/o características que los profesores del IPMJMSM consideran que tienen estas obras desde un punto de vista conceptual y didáctico en el estudio del concepto de la derivada. Previo al análisis, se formularon interrogantes para cada criterio o características, tal como se muestra en el Cuadro 2.

Cuadro 2. Categorías e interrogantes para el análisis de los textos.

Características de los textos de Cálculo según los Profesores de Matemática Aplicada del IPMJMSM.	Interrogantes para cada característica
Desarrollo histórico del concepto de la derivada	¿Qué contenido histórico sobre la derivada presentan los textos de Cálculo? ¿El contenido histórico proporciona información necesaria para comprender la evolución histórica del concepto?
Sobre el concepto de la derivada	¿Cómo definen los textos de Cálculo la derivada?
Sobre las aplicaciones de la derivada	¿Qué tipo de actividades (ejercicios y/o problemas) proponen los textos de Cálculo sobre las aplicaciones de la derivada?
Propuestas didácticas en el estudio de la derivada	¿Qué propuestas didácticas proponen los textos de Cálculo a los profesores de matemática para el estudio de la derivada?

Las interrogantes anteriores, son desarrolladas por el autor de la investigación, en base a los comentarios realizados por los profesores de Matemática Aplicada sobre (1) Actividades matemáticas relacionadas con la historia del Cálculo, (2) El enfoque conceptual que utiliza el autor para explicar la derivada de la función de una variable real, (3) La importancia de los problemas matemáticos basados en las aplicaciones del concepto y, (4) Algunos métodos y estrategias que proponen las obras consultadas para el aprendizaje/enseñanza de los conceptos matemáticos como, por ejemplo, la derivada.

Estas interrogantes (cuadro 2) corresponden a elementos que sirvieron de guía para la descripción y el análisis de las obras consultadas, esto con la finalidad de determinar qué aspectos conceptuales, históricos y metodológicos toma en cuenta los autores de los libros de textos para el estudio de los conceptos matemáticos, tales como la derivada de la función de una variable real, considerando también la importancia que representan las actividades y las estrategias metodológicas, que proponen estas obras, en el contexto del aula.

Para efectos del presente trabajo, se discutirán los siguientes aspectos: A-Enfoque histórico y conceptual en los libros de texto y, B-Enfoque didáctico en los libros de texto.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

A-Enfoque Histórico y Conceptual en los Libros de Texto

A1: Desarrollo histórico del concepto de la derivada.

No se puede decir mucho del desarrollo histórico que presentan los textos consultados Swokowski (1979), Leithold (1998), Sáenz (2005) y Larson, Hostetler y Edwards (2005), Stewart (2006), sobre los tres conceptos fundamentales del Cálculo infinitesimal, si bien es cierto pudieran haber muchas causas o motivos en relación a esta problemática, entre ellas se podrían considerar dos principales: (1) El autor no considera importante presentar aspectos históricos que dieron origen a los conceptos matemáticos y prefieren dedicar más espacio al desarrollo teórico-práctico de conceptos, propiedades, teoremas, ejemplos, ejercicios y/o problemas y, (2) Las editoriales limitan a los autores a escribir en un número determinado de páginas, razón por la cual prefieren abordar el contenido matemático básico, común en el estudio del Cálculo Diferencial.

En las obras de Swokowski (1979) y Leithold (1998) considerados por algunos profesores de matemáticas del IPMJMSM como clásicos para la enseñanza/aprendizaje del Cálculo, en cada uno de sus capítulos enfatizan en el desarrollo teórico-práctico, es decir, en el contenido intra matemático de los temas, el aspecto histórico escasamente se ve reflejado en el preámbulo, antes del

comienzo del primer capítulo, en el cual se mencionan a los padres y creadores del Cálculo Infinitesimal y algunos precursores y sucesores de los mismos.

En la obra de Sáenz (2005) se puede evidenciar, aunque de forma breve, contenidos históricos relacionados al Cálculo, en primera instancia, al comienzo de cada capítulo presenta la biografía de grandes matemáticos del siglo XVI y XVII, tal como se muestra en el siguiente cuadro:

Cuadro 3. Ilustres matemáticos del siglo XVI y XVII en la obra de Sáenz (2005).

Capítulo	Tema	Matemáticos del siglo XVI y XVII que contribuyeron al origen del Cálculo Diferencial
I	Funciones Reales	René Descartes (1596-1650)
II	Límites y continuidad	Leonardo Euler (1707-1783)
III	Diferenciación	Isaac Newton (1642-1727)
IV	Otras técnicas de derivación	Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)
V	Aplicaciones de la derivada	Guillaume F.A. Marqués de L'Hôpital (1661-1704)

La escogencia de estos grandes matemáticos, en cada uno de los capítulos en la obra de Sáenz, pareciera tener sus razones en los contenidos de los temas presentados en la tabla, el autor no hace referencia a ello, ni explica los motivos por el cual presenta la biografía de estos ilustres matemáticos.

La presencia en el capítulo I de la biografía de René Descartes pareciera estar relacionado con la importancia que tiene el sistema de coordenadas cartesiana en la representación gráfica de funciones. En el capítulo II hace referencia a Leonard Euler, al parecer su presencia tiene que ver con el contenido que presenta el texto relacionado con el número e en el estudio de los límites. En los capítulos III y IV la relación es obvia, los dos matemáticos que se muestran en la tabla anterior, son llamados los padres del Cálculo Infinitesimal y, por lo tanto, del Cálculo Diferencial, por último, en el capítulo V se encuentra Guillaume F.A. Marqués de L'Hôpital, en los contenidos para este capítulo se presenta la famosa regla de L'Hôpital para calcular límites de ciertas formas indeterminadas.

Llama la atención que luego de exponer las biografías de estos ilustres matemáticos, Sáenz presenta, a manera informativa, algunos acontecimientos ocurridos en América y en el mundo hispano durante las épocas de vida de los grandes matemáticos referidos anteriormente. Tales acontecimientos, forman parte de la cultura general, donde el autor pareciera tener intenciones de motivar al lector al estudio de otros campos del saber, principalmente en lo relacionado con la historia universal.

Por otra parte, Larson y otros (2005) también presentan breves reseñas históricas sobre ilustres matemáticos e incluye la participación de la mujer en el estudio del Cálculo, tales como: Grace Chisholm Young (1868-1944), María Agnesi (1718-1799) y Emilie de Breteuil (1706-1749), aunque las reseñas históricas que presentan los autores son muy breves, desplegadas por lo general al lado izquierdo de las páginas, las mismas se enfocan en las contribuciones que dieron los insignes matemáticos y matemáticas con relación a los conceptos, definiciones, teoremas y propiedades, más que describir sus biografías.

No es muy común ver en los textos de cálculo y otras obras relacionadas a las ciencias, la participación de la mujer en el desarrollo del conocimiento científico, algunas investigaciones señalan que en nuestro tiempo todavía se evidencia la discriminación de la mujer en los libros de texto, por ejemplo, Serrano (2007) realizó un estudio donde se discute sobre la discriminación de la mujer en los libros de texto de la Educación Básica (E.B.) venezolana, en especial en las obras de 7° grado de E.B.

En relación a los conceptos fundamentales del Cálculo como es el límite y la derivada, sólo se mencionan en breves párrafos indicios sobre el origen de los conceptos y poco sobre la evolución histórica que llevo a su formalización. La mayoría de los textos señalan que el origen del concepto de la derivada se debe a dos problemas fundamentales del siglo XVII: (1) Encontrar rectas tangentes a una curva, y (2) Hallar la velocidad instantánea de un objeto en movimiento. Larson y otros (2005) incluyen de una forma explícita, al inicio del contenido de la derivada, otros problemas que dieron origen al estudio del Cálculo, tales como: el Cálculo de máximos y mínimos para representar gráficamente el comportamiento de las funciones y el Cálculo de áreas de regiones bajo una curva.

En este sentido, se puede decir que la mayoría de las obras consultadas poco enfatizan desde un punto de vista histórico las razones que llevaron a los ilustres matemáticos a relacionar, desde un punto de vista conceptual, los problemas que dieron origen al Cálculo, esta relación sólo se puede observar en las obras de una forma implícita cuando se estudia intuitivamente el concepto de la

derivada de una función, principalmente en los problemas para encontrar rectas tangentes a una curva y hallar la velocidad instantánea de un objeto en movimiento.

En relación con lo anterior, es importante para el conocimiento matemático la comprensión del origen histórico de los conceptos matemáticos por varias razones fundamentales, una de ellas es ver que las mismas no están desligadas de un contexto histórico y no surgen de la nada, al contrario conceptos como límite y derivada son producto del conocimiento científico desarrollado a través la historia, que emergen de la búsqueda de soluciones a problemas de suma trascendencia en diversos contextos y épocas de la vida del hombre, tales como el problema de la recta tangente a una curva y el movimiento de los objetos.

Los textos de matemática como recursos didácticos pueden servir de herramienta que permite promover en los docentes y estudiantes el estudio de la historia de la matemática, principalmente en aquellos aspectos relacionados con el desarrollo histórico de conceptos matemáticos. Mucho se sabe que en las instituciones educativas la mayoría de los docentes de matemática prefieren enfocar las clases desde un punto de vista conceptual, con el aprendizaje de técnicas memorísticas y algorítmicas en el desarrollo de problemas y ejercicios, y poco espacio dejan para el desarrollo cultural e histórico de los conocimientos matemáticos y sus vinculaciones con la realidad.

A2: Sobre el concepto de la derivada.

Todos los textos de Cálculo enfocan el concepto de la derivada tomando en cuenta el problema histórico que dio su origen: (1) Desde un punto de vista geométrico con el estudio de la recta tangente a una curva, y (2) Desde un punto de vista físico, hallando la velocidad instantánea de un objeto en movimiento.

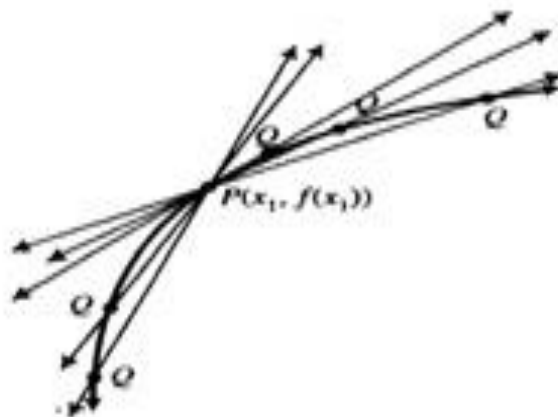
Para el estudio de la recta tangente a una curva es muy común observar en los textos la representación gráfica de una curva y una recta secante, tal como se puede ver en Sáenz (2005, p. 163); Swokowski (1979, p. 87); Leithold (1998, p. 101) y Larson y otros (2005) o un conjunto de rectas secantes (Leithold 1998, p. 101) con un punto en común, mayormente el punto es denotado por P . En Sáenz (2005), el punto es denotado por A y Larson y otros (2005) utilizan sólo las coordenadas $(c, f(c))$ para denotar al punto. Para la interpretación geométrica de la recta tangente a una curva se requiere que el lector desarrolle sus cualidades imaginativas sobre la ilustración gráfica de la recta secante, con el fin de comprender su carácter dinámico dentro del concepto, relacionado con el movimiento o desplazamiento de dicha recta, teniendo en cuenta que en la representación

gráfica, el punto P es fijo en la recta secante y su otro punto, llamado Q se va acercando al punto P, en este sentido, mientras más se aproxime al punto P, la recta secante se va aproximando cada vez más a una recta tangente en P.

La mayoría de los autores de las obras consultadas asume el carácter dinámico del movimiento del punto Q sobre la gráfica de la curva, que *se acerca, se aproxima o tiende* al punto P, como una forma de imaginar el movimiento de la recta secante, aunque es un error pensar que un punto tiene movimiento o se mueve en el plano, tales como los autores mencionados lo exponen en su obra, es preferible relacionar al punto Q con una partícula que se mueve a lo largo de una curva dada, para no caer en polémicas.

Se puede ver que en ese carácter dinámico que representa la interpretación geométrica del concepto de la derivada, se encuentra en forma implícita conceptos fundamentales para comprender la esencia de su definición, a saber el *cambio*, cuando observamos las distintas posiciones que va tomando el punto Q y la *variación*, cuando se estudia las formas de acercamiento, aproximaciones y tendencias del punto Q al punto P.

Figura 1. Interpretación geométrica de la derivada [de: Leithold 1998, p. 101].

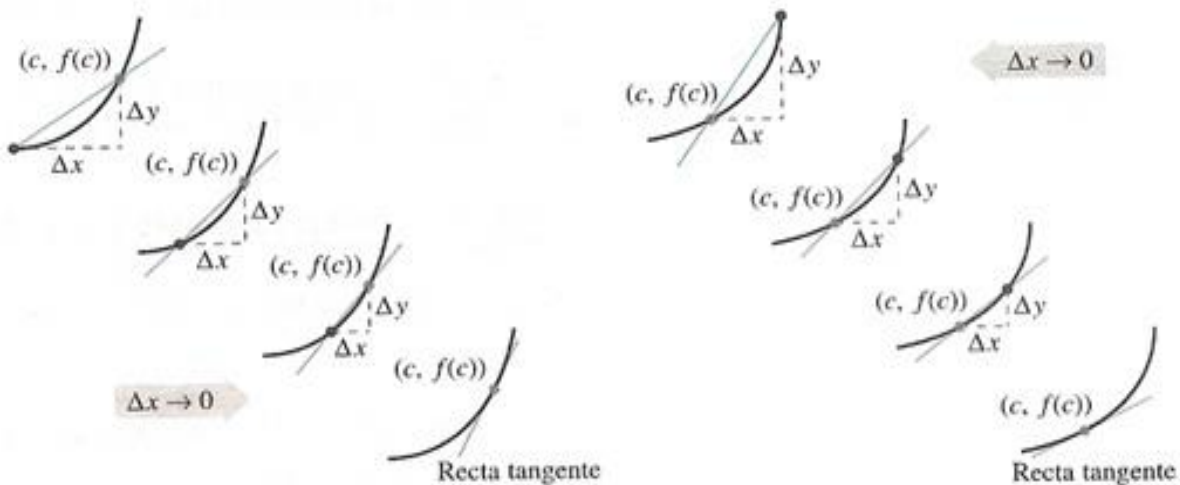


El lector debe imaginar el “movimiento” del punto Q [El punto Q está a la derecha o izquierda del punto P]. Autores como Wenzelburger (1993), Dolores Flores (2005), Sánchez-Matamoros y otros (2008), Pino-Fan y otros (2011), Sánchez-Matamoros y otros (2012), Vrancken y Engler (2014), García González y Dolores Flores (2016) coinciden en lo difícil que es para el estudiante visualizar, como en el ejemplo de la ilustración, el significado de la recta tangente y su pendiente. [En la gráfica parece no estar presente la recta tangente].

Por otra parte, existen en el mercado *software* matemáticos y páginas en Internet, que presentan de una forma dinámica la interpretación geométrica de la derivada, sin embargo, autores como (Dolores Flores, 2005; De los Ríos y Márquez, 2013) consideran que a pesar del dinamismo que presentan estos recursos tecnológicos, los estudiantes no logran interpretar los procesos de aproximación presente en estudio de la rectas secantes y la recta tangente y el significado de sus pendientes.

Larson y otros (2005) presentan la interpretación geométrica de la derivada sin asumir el carácter dinámico del punto y de la recta secante sobre la gráfica, simplemente señalan la importancia de “elegir puntos cada vez más cercanos al punto de tangencia” visualizando a través de varias secuencias de representación gráfica, las diferentes rectas secantes y su aproximación a la recta tangente. Tal como se muestra en la Figura 2.

Figura 2. Interpretación geométrica de la derivada (en secuencias). Las ilustraciones muestran a las rectas secantes y sus aproximaciones con la recta tangente, eligiendo puntos cada vez más cercanos al punto de tangencia $(c, f(c))$.



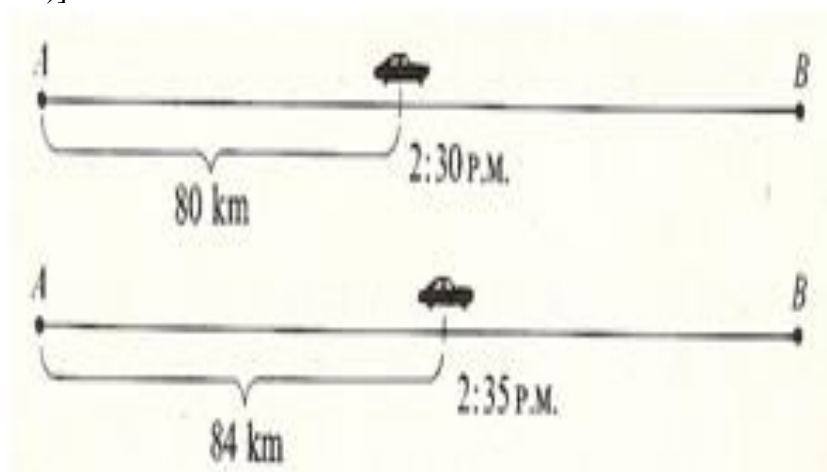
Un término importante que presentan los textos de Cálculo es el de *tendencia o aproximación*, un concepto fundamental en el estudio de los límites, ninguno de ellos (textos) muestra la relación de tal concepto con el estudio de los infinitesimales, es decir, de los valores infinitamente pequeños que son elementos fundamentales para comprender la esencia del Cálculo Infinitesimal.

Ejemplo muy común que presentan los textos de Cálculo es el problema de hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en un punto dado, como se puede ver, este tipo de ejemplo permite evidenciar el contexto histórico que dio origen al concepto de derivada, en relación con la

problemática de encontrar la pendiente de la recta tangente a una curva y su ecuación. Muy poco textos de Cálculo hacen ver al lector sobre los aportes del estudio de la derivada en el estudio de la ecuación de la recta tangente a una curva dada.

En relación con el problema de la velocidad de objetos en movimiento, es muy común ver en los textos de Cálculo un ejemplo sobre el desplazamiento de un automóvil con movimiento rectilíneo uniforme acelerado, para introducir los conceptos de velocidad promedio y luego finalizar con la definición de velocidad en un instante de tiempo t (velocidad instantánea), utilizando implícitamente el concepto de razón de cambio como velocidad, para luego formalizar el concepto de velocidad instantánea con el uso de límites. Todos los autores consultados concluyen que los dos ejemplos (geométrico y físico) tienen que ver con el estudio de la derivada.

Figura 3. Distancia recorrida por un vehículo con movimiento rectilíneo. [Para introducir al lector los conceptos de velocidad promedio e instantánea en la interpretación física de la derivada. Tomado de Swokowski (1979)].



Un concepto fundamental en el problema físico de la derivada, es relacionar la velocidad como una razón de cambio, muy pocos textos hacen esa conexión entre estos dos conceptos, específicamente en el estudio de las sucesiones de razones de cambio obtenidas a medida que la variable independiente t (tiempo) se va aproximando a un valor específico de t , obteniendo así una aproximación de la razón de cambio instantánea o velocidad instantánea.

B-Enfoque Didáctico en los Libros de Texto

Actualmente, existe en el mercado una diversidad de textos de Cálculo que proponen a los lectores, especialmente a los profesores y estudiantes, el desarrollo de propuestas didácticas aplicables al conjunto de actividades que presentan, con el fin de utilizar otras herramientas, técnicas

y métodos que no sean asociadas única y exclusivamente al desarrollo de procesos de pensamientos mecanicistas o algorítmicos como estamos acostumbrados a ver en el estudio del Cálculo en la Educación Superior y, en particular, en el IPMJMSM.

Es importante acotar, que todas las obras de Cálculo presentan en su mayoría técnicas y procedimientos algorítmicos para el estudio de límites, derivadas e integrales, es fundamental que los estudiantes las conozcan y sepan manejarlas en el desarrollo de ejercicios y problemas, incluso los autores de las obras consultadas, utilizan una serie de pasos sistemáticos, relacionado con técnicas o reglas en el desarrollo de ejercicios y problemas basado en los conceptos antes mencionados, para que el lector se pueda orientar de forma exitosa en su resolución.

El objetivo del Cálculo no está limitado al estudio exclusivo de técnicas y procedimientos algorítmicos para resolver ejercicios relacionados con el límite, derivada e integral, los tres conceptos fundamentales del Cálculo. Reportes de investigaciones relacionadas con la problemática de la enseñanza del Cálculo Vinner (1992), Wenzelburger (1993), Dolores Flores (2004, 2005, 2006), Rojas Olaya (2006), Sánchez-Matamoros y otros (2008), Sanchez-Matamoros y otros (2012), Vrancken y Engler (2014), García González y Dolores Flores (2016) entre otros; señalan que el aprendizaje que adquieren los estudiantes está basado en un enfoque conductista, donde lo principal es desarrollar gran cantidad de ejercicios y problemas sin tener nociones básicas acerca del significado de estos conceptos y sus aplicaciones.

B1: El Estudio de la Derivada a través de la Tecnología.

Textos como Leithold (1998) y, Larson y otros (2005) se apoyan de la tecnología (uso de calculadoras y programas matemáticos) para desarrollar en los estudiantes, en algunos casos, el pensamiento matemático a través del uso de preguntas cerradas y abiertas, relacionadas entre otros, con el análisis de gráficas, la resolución y comprobación de ejercicios y problemas matemáticos. También, debido al auge que ha proporcionado la tecnología como herramienta poderosa en las áreas científicas y educativas, los autores de algunos textos de Cálculo han promovido y motivado a los lectores, principalmente a los docentes, al uso de estos recursos en el ámbito educativo.

Leithold (1998) utiliza la calculadora graficadora, para ilustrar en su obra, las gráficas de algunas funciones y apoyar así sus explicaciones en relación a los ejemplos de ejercicios y/o problemas resueltos y ejercicios propuestos en forma analítica y numérica.

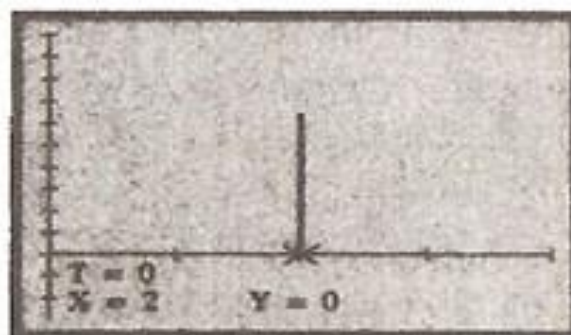
Un estilo de presentación que mantuvo Leithold (1998) a lo largo de todo el contenido de la obra fue utilizar el lado izquierdo de las páginas para las representaciones gráfica y, el lado derecho

para el desarrollo teórico de cada contenido, quizás, pensando en la comodidad del lector para visualizar e interpretar la información y para facilitar la transferencia entre el lenguaje analítico, simbólico y numérico con el lenguaje gráfico y viceversa.

En el contenido *Movimiento Rectilíneo* Leithold (1998) utiliza la calculadora graficadora para:

- (a) Simular el movimiento de una pelota que se lanza verticalmente hacia arriba desde el piso con una velocidad inicial de 64 pies/s (Muchos textos de habla inglesa y traducida al español utilizan el sistema de medidas en pies. Un metro equivale a 3,28 pies).

Figura 4. Gráfica del movimiento de una pelota lanzada verticalmente hacia arriba. (Leithold 1998, p. 138).



$[0, 4]$ por $[-25, 100]$

$$x_1(t) = 2, \quad y_1(t) = -16t^2 + 64t$$

Esta actividad de simulación con el uso de la tecnología, específicamente con el uso de la calculadora, permite que el estudiante desarrolle capacidades para visualizar e interpretar ciertas características presentes en el estudio de la trayectoria del movimiento de los objetos, principalmente, cuando el docente propone a sus estudiantes que estimen la altura máxima y el tiempo de vuelo del objeto, entre otros.

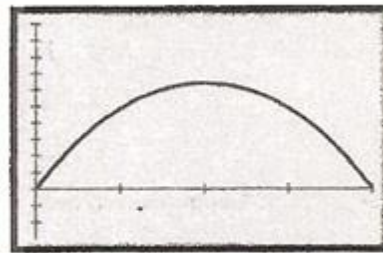
Leithold (1998) explica en su obra cómo representar gráficamente la simulación de la pelota lanzada verticalmente, supone que la misma se mueve sobre la recta vertical $x = 2$, por ello utiliza para la representación gráfica, las ecuaciones paramétricas $x_1(t) = 2$ y $y_1(t) = -16t^2 + 64t$.

Una limitante que se observa con la representación gráfica de la simulación del movimiento de la pelota y otras gráficas, que se presentaran a continuación, es con relación a los sistemas de coordenadas cartesianas, estos carecen de enumeración, razón por la cual, el lector debe hacer un

esfuerzo para estimar las cantidades en los ejes coordenados, el rectángulo de inspección utilizado en la calculadora es de $[0,4]$ por $[-25, 100]$, las escalas del eje “y” es más pequeña que “x”, la razón de ello es debido a la altura máxima que alcanza la pelota la cual es de 64 pies.

- (b) Trazar la gráfica posición-tiempo de la pelota, sabiendo que la ecuaciones en forma paramétrica del movimiento son: $x_2(t) = t$ y $y_2(t) = -16t^2 + 64t$.

Figura 5. Gráfica posición-tiempo de la trayectoria de la pelota. (Leithold 1998, p. 139).



$[0, 4]$ por $[-25, 100]$

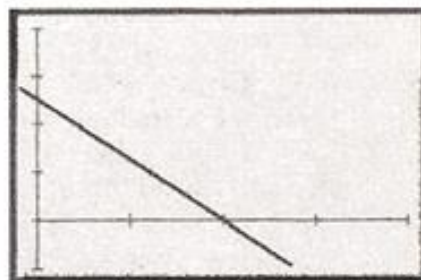
$$x_2(t) = t, \quad y_2(t) = -16t^2 + 64t$$

Leithold (1998) presenta sólo la relación entre la ecuación de la trayectoria de la pelota (representación algebraica y/o analítica) y su representación gráfica; no relaciona desde el punto de vista numérico, la posición de la pelota en ciertos instantes de tiempo con la representación gráfica que proporciona la calculadora.

Se puede hacer uso de las potencialidades que tiene la calculadora para representar numéricamente la posición de la pelota a través de la ecuación que describe su movimiento.

- (c) Trazar la gráfica velocidad-tiempo sabiendo que sus ecuaciones paramétricas son: $x_3(t) = t$ y $y_3(t) = -32t + 64$.

Figura 6. Gráfica velocidad-tiempo de la trayectoria de la pelota. (Leithold 1998, p. 139).



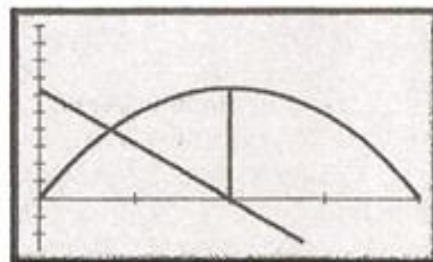
$[0, 4]$ por $[-25, 100]$

$$x_3(t) = t, \quad y_3(t) = -32t + 64$$

Al igual que en la gráfica posición-tiempo, establece sólo la relación entre las representaciones analítica y/o algebraica con la gráfica. De seguidas muestra en un mismo sistema

de coordenadas rectangulares las tres gráficas anteriores para establecer una relación entre las mismas.

Figura 7. Gráficas: movimiento, posición-tiempo y velocidad-tiempo de la pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde el piso.



[0, 4] por [-25, 100]

$$\begin{aligned}x_1(t) &= 2, & y_1(t) &= -16t^2 + 64t \\x_2(t) &= t, & y_2(t) &= -16t^2 + 64t \\x_3(t) &= t, & y_3(t) &= -32t + 64\end{aligned}$$

Las relaciones que establece el autor de la obra con las gráficas son aquellas referidas con la velocidad nula y la altura máxima alcanzada por la pelota, la velocidad positiva y la velocidad negativa con el ascenso y descenso de la pelota, además, el aumento y disminución de la velocidad con la pendiente de la gráfica que la representa. Lo anterior, se vincula con las investigaciones de Dolores Flores y otros (2002), Dolores Flores (2004, 2006), Sanchez-Matamoras y otros (2012), Vrancken y Engler (2014), García González y Dolores Flores (2016) cuyo objetivo fue estudiar las concepciones de los estudiantes sobre el análisis de gráficas cartesianas del movimiento.

Leithold (1998) no establece relaciones con respecto al estudio de las gráficas de la función posición y función velocidad de un objeto en ciertos instantes de tiempo. Por ejemplo, ¿qué relación tiene el punto donde se intersecan las dos gráficas?

Con respecto a las gráficas movimiento de la pelota (simulación) y posición-tiempo, la única relación que se puede establecer es la altura o posición que va alcanzando la pelota.

Con relación a las dos gráficas anteriores, es muy importante que el profesor proponga actividades donde se establezcan sus relaciones y diferencias. Investigadores como Dolores Flores y otros (2002) señalan que los estudiantes tienden a confundir o a creer que la trayectoria de un objeto en movimiento es la gráfica posición-tiempo, como ocurre con el lanzamiento vertical de objetos.

La representación gráfica donde se relaciona el movimiento de la pelota (simulación), junto con las gráficas posición-tiempo y velocidad-tiempo, podrían confundir al lector (estudiante, profesor, otros) puesto que el eje “x” del sistema de coordenadas, corresponde a la variable

independiente “t” (tiempo) mientras que el eje “y” representa tanto la posición como la velocidad del objeto.

En este sentido, los malentendidos podrían originarse en la gráfica sobre la simulación del movimiento de la pelota, el tiempo está indicado de una forma implícita, sin embargo, en la figura 4, la recta vertical que representa el movimiento corta al eje “x” en $t = 2$, lo que podría dar a entender que el tiempo está estático, mientras que la pelota se mueve, lo cual es imposible. Aunque sabemos que la intención del autor fue representar la recta $x = 2$ para relacionarla con la gráfica posición-tiempo.

Se puede observar a través de actividades como éstas, donde se establecen relaciones entre las funciones primitivas, sus derivadas y gráficas en el estudio de la posición, velocidad y aceleración de un objeto en movimiento, la importancia que tiene el recurso tecnológico como, por ejemplo, el uso de las calculadoras graficadoras, las mismas permiten realizar en mucho menos tiempo tanto los cálculos como la representación gráfica de las funciones, visualizar las imágenes de acuerdo a un tamaño adecuado y otras aplicaciones, como ver gráficas de funciones simultaneas en un mismo sistema de coordenadas, entre otros.

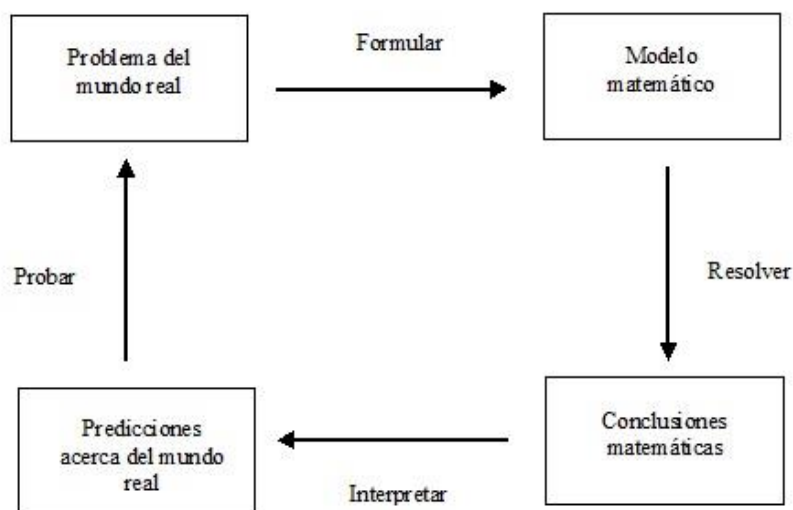
Todas estas actividades con apoyo de la tecnología tendrán un buen provecho si el profesor sabe utilizarlo conforme al cumplimiento de los objetivos de aprendizaje, donde promueva la reflexión y actitud crítica de los estudiantes, al analizar los elementos y/o características de las gráficas en torno a los conceptos, definiciones y problemas a desarrollar en el ambiente educativo como, por ejemplo: determinar dominio, rango, comportamiento creciente y decreciente, máximos y mínimos de funciones, entre otros.

B2: Estudio de la Derivada a través de la Modelación Matemática

En relación con la aplicación de procesos de modelación o modelización matemática que presentan los libros de texto en sus contenidos y/o actividades; sólo Larson y otros y Stewart hacen uso del estudio de modelos matemáticos en la resolución de problemas.

De los dos autores anteriores, solo Stewart (2006) explica en su obra, en qué consiste el proceso de modelado matemático, término que utiliza para referirse a la modelación matemática, apoyándose de un esquema similar al presentado por Blum en 1985 (Mora, 2009).

Figura 8. Proceso del modelado matemático, según Stewart (2006) (p. 25).



Este autor (Stewart) explica cada una de las etapas del proceso de modelación matemática, tomando en consideración el hecho de partir de una situación problemática extraída del mundo real; aunque es evidente que en los libros de textos presentan en sus actividades ejercicios y/o problemas de aplicaciones de la vida diaria, los cuales son situaciones hipotéticas de una realidad ficticia, donde el objetivo principal es promover en los estudiantes y/o lectores habilidades, destrezas y conocimientos para que ellos formulen modelos matemáticos a partir de las actividades propuestas y, en algunos casos al desarrollo de interpretaciones o predicciones de la situación problemática estudiada a partir de los resultados matemáticos obtenidos.

En ningún momento se presentan en estos libros de texto consultados, experiencias de situaciones problemáticas de la vida diaria en donde los autores de estas obras junto con otros participantes hayan utilizado, para su resolución, el proceso de modelación matemática como estrategia didáctica.

En este sentido, los procesos de modelación matemática tal como lo plantea Blum, es muy difícil verlos plasmado en las actividades didácticas que proponen los libros de texto, puesto que la naturaleza de las mismas se encuentran en la práctica educativa. Hay hechos y situaciones propios de la dinámica educativa que no se podrán describir en hojas (en el texto) con lujo de detalles, como las vivencias de los participantes, la planificación, ejecución, evaluación y procesos tan complejos, como la diversidad de pensamientos que surgen en el desarrollo de actividades bajo esta metodología.

Lo que sí se puede extraer de estas obras son ideas, sugerencias, experiencias, en fin, conocimientos, como complemento para la aplicación de estas metodologías de enseñanza (modelación matemática y trabajo por proyecto) en las prácticas educativas.

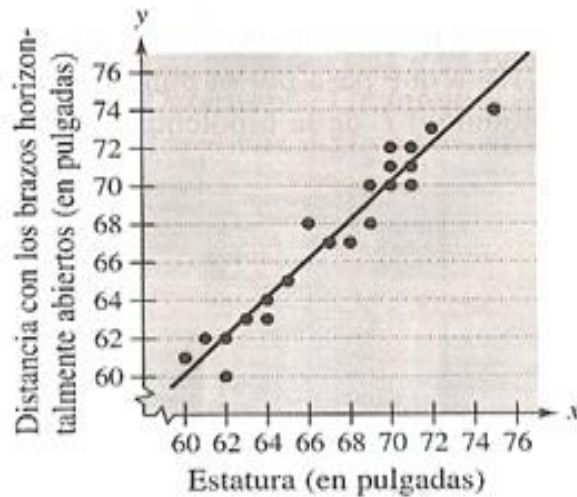
Presentaremos, como ejemplo, una actividad donde el estudiante debe formular un modelo matemático (*modelo lineal*) a partir de un conjunto de datos suministrados en el siguiente ejercicio. [Tomado de la obra Larson y otros (p. 30)].

De un grupo de 28 personas se reunieron los datos siguientes, que representan sus estaturas, x , y las distancias que abarcan sus brazos abiertos horizontalmente, y (redondeadas hasta la pulgada más cercana).

(60, 61), (65, 65), (68, 67), (72, 73), (61, 62), (63, 63), (70, 71), (75, 74), (71, 72), (62, 60), (65,65), (66, 68), (62, 62), (72, 73), (70,70), (69, 68), Encuentre un modelo lineal para representar estos datos.

Larson y otros utilizan la representación gráfica, que se presenta a continuación, para responder a la pregunta anterior.

Figura 9. Gráfica sobre la relación entre la estatura y la distancia que abarcan los brazos abiertos horizontalmente de 28 personas. Larson y otros (2005) muestran a los lectores que el mejor modelo que describe el comportamiento del conjunto de datos en la gráfica es el *modelo lineal* (p. 30).



En la gráfica podemos observar la ubicación de los puntos en un sistema de coordenadas y una recta que pasa por algunos de esos puntos, la gráfica que mejor describe o se ajusta al comportamiento de los datos se obtiene a través de un proceso estadístico llamado: *regresión lineal*. La representación de todos los puntos relacionados con los datos del problema en el sistema de coordenadas, corresponde a una *gráfica de dispersión*. La recta que se ajusta a los datos de una

forma aproximada es llamada *recta de regresión de los mínimos cuadrados*, de la cual se puede obtener su ecuación matemática; para efectos del ejemplo anterior, la ecuación es: $y = 1.006x - 0.225$.

Según Stewart (2006) la recta de regresión de los mínimos cuadrados se obtiene a través de un método que lleva el mismo nombre, el mismo “consiste en reducir al mínimo la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre los puntos correspondientes a los datos y la recta” (p. 28).

El proceso estadístico llamado regresión lineal es una manera de aproximarse a un modelo matemático, por ejemplo, una ecuación o una función, que describa de una forma aproximada, el comportamiento de un conjunto de datos que pueden ser tomados o extraídos del contexto real o un contexto ficticio e hipotético, tal como nos los presentan los libros de texto.

Se puede observar tanto en Stewart y Larson y otros, el desarrollo de actividades (ejercicios y/o problemas) donde el lector o los estudiantes tienen que representar gráficamente unos datos presentes en una situación problemática, estos datos generalmente los da el libro de texto, a menos que la descripción del problema conduzca o lleve a ellos (lectores y/o estudiantes) a buscar los datos en la vida real, a formular el modelo matemático y luego representarlo gráficamente.

El uso de varios sistemas de representación gráfica, numérica, algebraica, en las obras consultadas, tanto en las actividades resueltas como en los ejercicios y problemas propuestos, es un elemento en la didáctica de la matemática de suma importancia, puesto que permite al lector o estudiante manejar los diferentes tipos de lenguaje que utiliza la disciplina y coordinar la información que presenta estos sistemas para poder interpretar y darle significados a los conceptos matemáticos.

El uso de la calculadora graficadora y software o paquetes matemáticos, como el Maple y el Derive, son herramientas importantes para representar, desde un punto de vista numérico, gráfico y algebraico, la obtención de modelos matemáticos sobre diversas situaciones problemáticas. Tales propuestas de actividades con el uso de la tecnología se presentan en las obras consultadas (Larson y otros, 2005 y Stewart, 2006).

En los ambientes escolares es importante que los profesores de matemática utilicen estas herramientas tecnológicas, como medio para el desarrollo de discusiones grupales sobre una situación problemática en particular, para ello es necesario enfrentar a los estudiantes a situaciones conflictivas tal como lo señalan autores como Dolores Flores (2004, 2006), Sanchez-Matamoros y

otros (2012), Vrancken y Engler (2014), García González y Dolores Flores (2016) lo cual permitiría, a través de los procesos de modelación matemática, el desarrollo de competencias para indagar, estimar, conjeturar, predecir y probar las conclusiones matemáticas obtenidas y sus interpretaciones en relación con el mundo real.

CONCLUSIONES

El análisis sobre los elementos históricos, conceptuales y didácticos en el estudio del concepto de la derivada permitió al investigador tener un acercamiento en relación con las ideas que estos autores tienen sobre el conocimiento matemático y su enseñanza, el discurso teórico presente en sus contenidos y actividades matemáticas propuestas. En vista de lo anterior, se establecieron las siguientes conclusiones:

En relación con los Elementos Históricos- Conceptuales.

La importancia del estudio de la historia de los conceptos matemáticos y los métodos matemáticos que constituyeron pieza fundamental en su evolución, en los libros de texto de Cálculo, permitirían a los estudiantes, según la opinión del investigador, tener una noción general sobre las causas y los motivos que llevaron a estos grandes matemáticos a consolidar los conocimientos en relación a los conceptos matemáticos, así como conocer su naturaleza matemática y extra matemática. Razón por la cual el investigador considera que es fundamental un enfoque histórico de los conceptos matemáticos en los libros de texto de matemática.

Sobre *el concepto de la derivada* en los libros de texto de cálculo, los autores de las obras consultadas presentan dos enfoques que permiten tener ideas acerca de su significado, el primero está enfocado al aspecto intuitivo, asumiendo que el estudiante tiene ciertos conocimientos que le ayudarán a comprender conceptos relacionados con el estudio del cálculo (función, gráfica de una función, ecuación de la recta, pendiente) o en el área de la física (velocidad, aceleración, movimiento, variación,), desde estas dos disciplinas científicas se presentan en las obras de cálculo, una aproximación al concepto de la derivada el cual recibe el nombre de *definición intuitiva*, para luego culminar las ideas del concepto con lo que estos autores llaman la *definición formal o rigurosa de la derivada*.

En cuanto a los Elementos Didácticos.

Las obras de Larson y otros, Leithold y Stewart promueven el *uso de la tecnología* a los lectores y/o estudiantes, principalmente las *calculadoras graficadoras*, como recurso didáctico de apoyo para la comprensión de algunos conceptos e ideas matemáticas. Algunos libros de texto como

Larson y otros y Stewart van más allá, tomando en cuenta los procesos y pensamientos matemáticos como el algebraico, gráfico y numérico entre otros, para comprender los conceptos e ideas matemáticas con el uso de la tecnología o a través de otros medios y recursos.

Los autores Stewart, Larson y otros proponen a los lectores y/o estudiantes desarrollar modelos matemáticos a través de un conjunto de datos, representando a través de sistemas gráficos y analíticos las aproximaciones que mejor se adecuen a dicho modelo. Este tipo de actividad contribuye a fomentar en los estudiantes los procesos de transferencia de conocimientos entre diversos sistemas de representación, con la finalidad de aproximarnos al significado de los conceptos matemáticos.

Por otra parte, el tema de la modelación matemática en los libros de texto consultados puede ser un factor fundamental para que el docente, lectores y/o estudiantes investiguen acerca de esta estrategia didáctica.

REFERENCIAS

- Alson, P. (1999). *Cálculo básico*. Caracas (Venezuela): Erro.
- Alson, P. (2001). *Métodos de graficación*. Caracas (Venezuela): Erro.
- Cavani, M. (2003). *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. IV Talleres de Formación Matemática (TForMa). Sucre (Venezuela): Universidad de Oriente.
- Dávila, A.; Navarro, P y Carvajal, J. (2006). *Introducción al Cálculo*. México: McGraw-Hill.
- De los Ríos, C y Márquez, V. (2013). Una propuesta para la enseñanza de la derivada con Geogebra. *Actas delVII CIBEM*. [Documento en línea]. Disponible: <http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/605.pdf>. [Consulta: 2017, Mayo 12].
- Dolores Flores, C., Alarcón, G. y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. (Relime)* [Revista en línea], 3. Disponible: <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2147132>[Consulta: 2007, Noviembre 4].
- Dolores Flores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. (Relime)* [Revista en línea], 3. Disponible: <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2095497&info=resumen&modo=popup>. [Consulta: 2007, Diciembre 27].
- Dolores Flores, C. (2005). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México: UAG- Díaz de Santos.
- Dolores Flores, C. (2006). *Argumentaciones de los estudiantes en el análisis de funciones*. Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Comité Latinoamericano de Matemáticas. A.C. CLAME.
- Fey, J. (2004). Cantidad. En: L. Steen (Eds.), *La enseñanza agradable de las matemáticas*. (pp. 67-101). México: Limusa.

- García González, M y Dolores Flores, C. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada. *Unión*. [Revista en línea], 46. Disponible: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2016/46/02_15-321-1-ED.pdf. [Consulta: 2017, Mayo 12].
- Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (2005). *Cálculo diferencial e integral*. México: McGraw-Hill.
- Leithold, L. (1998). *El cálculo*. México: Oxford.
- Martínez, M. (2004). *Ciencia y arte en la metodología cualitativa*. México: Trillas.
- Mora, D. (2009). *Didáctica de las matemáticas. Desde una perspectiva crítica, investigativa, colaborativa y transformadora*. La paz-Caracas: Fondo Editorial: IPASME.
- Pereira, G y Valera, H. (2006). Límites de funciones de una variable real. *Retos y logros*. N° 7. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Miranda “José Manuel Siso Martínez”, Subdirección de Investigación y Postgrado, Caracas.
- Pereira, G y Valera, H. (2012). *Derivadas de funciones reales de variable real*. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Barquisimeto. Venezuela: Subdirección de Investigación y Postgrado.
- Pino-Fan, L.; Díaz Godino, J. y; Font Moll, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educ. Matem. Pesq.* [Revista en línea], 13(1). Disponible: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4423>. [Consulta: 2017, Mayo 12].
- Rojas, A. (2006). *Taller de integrales múltiples*. VIII Talleres de Formación Matemática (TForMa). Sucre (Venezuela): Universidad de Oriente.
- Rojas Olaya, A. (2006). La semiótica de la derivada en la didáctica crítica. En: D. Mora y W. Serrano (Eds.). A. Rojas Olaya, A. Míguez, M. Martín y W. Beyer, *Lenguaje, comunicación y significado en educación matemática: Algunos aspectos sobre la relación entre matemática, lenguaje, pensamiento y realidad desde una perspectiva crítica* (pp. 187-207). Bolivia-Venezuela: GIDEM-Campo Iris.
- Sáenz, J. (2005). *Cálculo diferencial con funciones trascendentes tempranas para ciencias e ingeniería*. Barquisimeto (Venezuela): Hipotenusa.
- Sánchez-Matamoros, G; García, M y; Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. (Relime)* [Revista en línea], 11(2). Disponible: <https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/7577/1/Sanchez-garcia-llinares-RELIME2008.pdf>. [Consulta: 2010, Enero 20].
- Sánchez-Matamoros, G.; Fernández, C.; Valls, J.; García, M y; Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 497-508).[Documento en línea], Disponible: <https://core.ac.uk/download/pdf/16374667.pdf>. [Consulta: 2017, Mayo 12].
- Serrano, W. (2007). *Las actividades matemáticas, el saber y los libros de texto*. Trabajo de ascenso, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Miranda “José Manuel Siso Martínez”, Caracas.
- Stewart, J. (2006). *Cálculo: conceptos y contextos*. México: Thomson.

- Swokowski, E. (1979). *Cálculo con geometría analítica*. EE.UU: Wadsworth Internacional Iberoamérica.
- Vielma, R. (2010) Concepciones y creencias sobre la derivada y su enseñanza. Trabajo de grado de Maestría no publicado, Caracas: Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Instituto Pedagógico de Caracas.
- Vinner, S. (1992). *¿Evitar consideraciones visuales para los estudiantes de cálculo? Antología en Educación Matemática*. Compilador: Cambray, Rodrigo. [Documento en línea]. Disponible: <http://cecte.ilce.edu.mx/docs/mate/Lectura1m7.pdf>[Consulta: 2007, Septiembre 21].
- Vrancken, S y Engler, A. (2014). Una Introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema* [Revista en línea], 28(48). Disponible: <http://repositorio.minedu.gob.pe/bitstream/handle/123456789/3016/Una%20Introducci%C3%B3n%20a%20la%20Derivada%20desde%20la%20Variaci%C3%B3n%20y%20el%20Cambio%20resultados%20de%20una%20investigaci%C3%B3n%20con%20estudiantes%20de%20primer%20a%C3%B1o%20de%20la%20universidad.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. [Consulta: 2017, Mayo 12].
- Wenzelburger, E. (1993). Introducción de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial e integral-Una propuesta didáctica. *Revista: Educación Matemática*. 5 (3): 93-123.

Autor:

Ramón Vielma

Magíster en Educación, Mención Enseñanza de la Matemática del Instituto Pedagógico de Caracas (IPC). Profesor en el IPMJMSM, adscrito al Departamento de Ciencias Naturales y Matemática. Candidato a doctor en Educación del IPC. Coordinador del Centro de Investigación Juan Manuel Cagigal (CIJuMaC-IPMJMSM). Participa en las Líneas de Investigación: Geometría y Matemática Aplicada (IPMJMSM) y Formación Docente (IPC)
vielmatic@gmail.com