RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE EXPLORATÓRIA: enlaces y singularidades en una experiencia de enseñanza

Célia Barros Nunes
celiabns@gmail.com
Universidade do Estado da Bahia –UNEB, DEDC X, Brasil

Lurdes Serrazina
lurdess@eselx.ipl.pt
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa (ESELx/IPL), UIDEF
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
Lisboa, Portugal

Recibido: 13/06/2019 **Aceptado:** 13/09/2019

Resumen

Este artículo trata sobre dos enfoques metodológicos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática: la metodología de Enseñanza-aprendizaje-evaluación de Matemática a través de la Resolución de Problemas y la Enseñanza-aprendizaje exploratoria. Tiene por objetivo discutir y analizar tales enfoques en lo que se refiere a sus enlaces y singularidades en cuanto a la naturaleza de las tareas, a las acciones del profesor y del alumno. Para eso comenzó por hacerse un estudio teórico sobre la temática en cuestión, seguido por la realización de una experiencia de enseñanza en una clase de 7º año de la Enseñanza Fundamental II, trabajando con las nociones introductorias de ecuación del primer grado. Se analiza la experiencia de enseñanza utilizando una metodología cualitativa de carácter interpretativo. Se concluye que esos enfoques traen, en su esencia, convergencias, sobre todo en lo que se refiere al fomento de una enseñanza-aprendizaje con significado y comprensión, pues las tareas / problemas tienen el potencial de proporcionar desafíos intelectuales, favoreciendo el desarrollo de una comprensión significativa.

Palabras clave: Tareas, resolución de problemas, tareas de investigación matemática, enseñanza exploratoria.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E ENSINO-APRENDIZAGEM EXPLORATÓRIO: enlaces e singularidades em uma experiência de ensino

Resumo

Este artigo discorre sobre duas abordagens metodológicas de ensino-aprendizagem da Matemática: a metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e o Ensino-aprendizagem exploratório. Tem por objetivo discutir e analisar tais abordagens no que se refere a seus enlaces e singularidades relativamente à natureza das tarefas, às ações do professor e do aluno. Para isso começou por fazer-se um estudo teórico sobre a temática em questão, seguido pela realização de uma experiência de ensino numa turma de 7º ano do Ensino Fundamental II, trabalhando com as noções introdutórias de equação do 1.º grau. Analisa-se a experiência de ensino utilizando uma metodologia qualitativa de carácter interpretativo. Conclui-se que aquelas abordagens trazem, em sua essência, convergências, sobretudo no que se refere ao favorecimento de um ensino-aprendizagem com significado e compreensão, tendo as tarefas/problemas o potencial de proporcionar desafios intelectuais, favorecendo o desenvolvimento de uma compreensão significativa.

Palavras-chave: Tarefas, resolução de problemas, tarefas de investigação matemática, ensino-exploratório.

PROBLEM SOLVING AND EXPLORATORY TEACHING-LEARNING: links and singularities in a teaching experience

Abstract

This article discusses two methodological approaches of mathematics teaching and learning, the mathematics teaching-learning-assessment through problem-solving and the exploratory teaching and learning of mathematics. The main goal is to discuss and analyze those approaches with regard to their links and singularities on the nature of the tasks and the actions of the teacher and the student. To this end, a theoretical study was carried out on the subject, followed by the realization of an educational experiment in a 7th grade class, working with the introductory notions of the 1st grade equation. The teaching experience is analyzed using a qualitative interpretive methodology.

It is concluded that these approaches bring, in essence, convergences, especially with regard to favoring a teaching-learning with meaning and understanding, with the tasks presented to the students the potential *to* provide intellectual challenges favoring the development of a mathematical meaningful understanding.

Keywords: Tasks, problem solving, mathematical investigation tasks, exploratory-teaching

Introdução

A Resolução de Problemas e o ensino-aprendizagem exploratório, ambos, possibilitam ao aluno aprender matemática fazendo matemática, mostrando-se úteis no desenvolvimento e construção de conceitos específicos, colocando o aluno no centro do processo de aprendizagem matemática. Além disso, tais abordagens representam boas oportunidades para pôr os alunos a debater questões, a expor os seus raciocínios, a estabelecer conjeturas e a usar e aplicar a Matemática. Estas "proporcionam ao aluno momentos para experenciar processos característicos da Matemática como formular e procurar argumentos que demonstrem as conjeturas que resistiram a sucessivos testes, tendo importantes potencialidades educacionais" (Santos, Brocardo, Pires & Rosendo, 2002, p. 84).

Seja na abordagem exploratória seja na metodologia de resolução de problemas, os alunos são chamados a lidar com tarefas para os quais não têm um método de resolução imediato e têm de construir os seus próprios conceitos e métodos, usando conhecimentos prévios. Ao professor cabe selecionar as tarefas de acordo com os objetivos definidos para cada aula, tendo em atenção a sua adequação aos alunos a que se destinam.

Dessa forma, o presente texto pretende discutir e analisar duas abordagens metodológicas ao ensino da Matemática: a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de

Matemática através da Resolução de Problemas e o Ensino-aprendizagem exploratório no que se refere à natureza da tarefa, às ações do professor e do aluno. Inclui a descrição e análise de uma experiência de ensino que liga aquelas duas abordagens metodológicas. Para isso, o texto foi estruturado em duas partes: na primeira destinada ao aporte teórico são apresentadas algumas considerações sobre Tarefas Matemáticas; Resolução de Problemas e a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; o Ensino-aprendizagem Exploratório, bem como as inter-relações entre as duas abordagens metodológicas. Na segunda parte apresenta a descrição e análise da experiência de ensino realizada com alunos do 7.º ano e, por fim são tecidas algumas considerações finais.

Considerações preliminares sobre Tarefas Matemáticas

A natureza da atividade dos alunos na aula de Matemática é uma questão central no ensino desta disciplina e a aprendizagem é sempre o produto da atividade (APM, 2009). Neste sentido, a matemática escolar deve basear-se muito mais na atividade pessoal dos alunos, como por exemplo, atividades do tipo construir, explorar e resolver problemas de forma que eles possam desempenhar um papel ativo no processo de aprendizagem do que em atividades que se reduzem à resolução repetitiva de exercícios para aplicação de certas fórmulas.

Assim, uma tarefa pode ser definida como um segmento da atividade da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular (Stein & Smith, 2009) e, quando usada em sala de aula constitui a base para a aprendizagem matemática, pois exige que os alunos pensem conceitualmente, e estimula-os a fazer conexões. Para as autoras, tarefas que pedem aos alunos a execução de um procedimento memorizado ou as que exigem que eles pensem conceitualmente e que os estimulem a fazer conexões, representam tipos diferentes de oportunidades para os alunos pensarem.

Para Ponte (2005) as tarefas possuem duas dimensões fundamentais: o grau de desafio e o grau de estrutura. O grau de desafio matemático depende da perceção da dificuldade de uma questão e varia entre o r*eduzido* e o *elevado*. No que se refere à estrutura, esta varia entre os pólos *aberto* (tarefas de exploração e investigação) e *fechado* (exercícios e problemas). Uma tarefa é fechada quando é claramente explícito o que é dado e o que é pedido, tem sua importância no desenvolvimento da capacidade de relacionar de forma precisa a informação dada. Uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido ou em ambas as coisas. Este tipo de tarefa ajuda o aluno a desenvolver a capacidade de lidar com situações complexas, interpretando-as matematicamente (Ponte, Quaresma, Mata-Pereira & Baptista, 2015).

Cruzando os quatro tipos de tarefas com suas dimensões, Ponte (2014) classifica as tarefas como: (i) exercício – tarefa fechada e de grau de desafio reduzido; (ii) problema – tarefa também fechada, mas com grau de desafio elevado; (iii) investigação – tarefa aberta com grau de desafio elevado; (iv) exploração – tarefa aberta e acessível à maioria dos alunos.

Assim, os exercícios estão relacionados ao ato de praticar. Servem para o aluno pôr em prática os conhecimentos adquiridos anteriormente, com um propósito de consolidação do conhecimento. Os problemas visam a aplicação criativa dos conhecimentos que os alunos já possuem. Ser ou não ser um problema não depende apenas da tarefa que é proposta, mas também do indivíduo a quem se propõe. Um aluno está diante de um problema quando se sente motivado e, consequentemente se empenha a encontrar a solução, mesmo não sabendo como encontrá-la.

Resolução de Problemas: diferentes abordagens para o ensino-aprendizagem e sua perspectiva curricular

Tem surgido e sido discutida, há algum tempo, a ideia de que na Educação Matemática, devemos ter a preocupação de que os alunos adquiram habilidades e técnicas que os levem a fazer matemática ou pensar matematicamente. Segundo Van de Walle (2001), os alunos *aprendem* matemática *fazendo* matemática. A resolução de problemas é um momento propício para desenvolver o fazer matemático, considerando-se essencial o trabalho com situações problema variados envolvendo processos e atividades, como experimentar, conjecturar, matematizar, generalizar, provar, discutir e comunicar.

Trabalhar com a Resolução de Problemas nas aulas de Matemática "não significa apenas resolver um problema específico que tem uma resposta ou aplicação específica ao mundo real, mas pode ter abordagens múltiplas na qual os estudantes podem fazer múltiplas observações" (English & Gainsburg, 2016, p. 314) e interessantes descobertas.

Para que o aluno aprenda Matemática pelo seu próprio esforço, segundo Polya (2014) ele deverá familiarizar-se antes com o concreto, em seguida com o abstrato, ou seja, primeiro com a variedade de experiência, depois com a unificação dos conceitos, dentre outros aspectos. E, isto conduz à resolução de problemas matemáticos que, na opinião dele, é uma "atividade matemática que mais se aproxima do fundamental do pensamento do quotidiano. Temos um problema cada vez que procuramos os meios para atingir um objetivo" (Polya, 2014, p.47).

Compreender os dados de um problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações, saber comunicar resultados e ser capaz de usar técnicas conhecidas são aspectos que devem ser estimulados num processo de aprendizagem através da resolução de problemas. Ademais, há de se considerar o tipo de problema, a complexidade, a novidade, o conhecimento matemático envolvido, para compreender perfeitamente a razão pela qual cada pessoa resolve um problema de uma forma particular (Vale & Pimentel, 2016).

Ao abordar a Resolução de Problemas com vista ao seu desenvolvimento em sala de aula, pode-se perspectivá-la como uma metodologia de ensino-aprendizagem, que servirá de orientação para professores e desenvolvedores de currículos. Relatam Allevato e Onuchic (2014, p. 27)

> Três diferentes formas de realizar um trabalho, em sala de aula de Matemática, todas fundamentadas na resolução de problemas, são apontadas por Hatfield (1978), e ainda se fazem perceber no final da década, quando Schroeder e Lester (1989) destacam sua coexistência: (1) o ensino sobre Resolução de Problemas, (2) o ensino para a resolução de problemas, e (3) o ensino através da resolução de problemas.

O ensino *sobre* resolução de problemas corresponde a considerá-lo como um novo conteúdo. São abordados temas relacionados à resolução de problemas e percebe-se uma forte ênfase nas heurísticas como forma de orientar os alunos em suas resoluções com regras e processos gerais, independentes do conteúdo específico abordado. Ainda nesta abordagem, segundo Schroeder e Lester (1989), trabalha-se com o método proposto por Polya (1945), ou seja, o conhecido "roteiro de quatro passos", que inicia o livro de Polya (How to solve it, 1945), para resolver qualquer problema.

No ensino de Matemática *para* resolver problemas, o maior propósito da aprendizagem matemática é ser capaz de utilizá-la em problemas rotineiros ou não rotineiros. Interessa a habilidade dos alunos de transferirem o que aprenderam num contexto (em geral, puramente matemático) para problemas em outros contextos, ou seja, se ensina Matemática para a resolução de problemas. Assim, nessa abordagem, apenas após ter desenvolvido a parte "teórica" referente a um determinado tópico matemático, é que o professor propõe problemas aos alunos, de fato, como aplicação dos conteúdos estudados. Embora as aplicações da Matemática tenham inquestionável relevância, ressaltam Allevato e Onuchic (2014) que um perigo dessa abordagem é que ela configure a resolução de problemas como uma atividade que os alunos só podem realizar após a introdução de um novo conceito, ou após o treino de alguma habilidade ou de algum algoritmo.

Na abordagem *ensinar matemática através de resolução de problemas* o que se pretende é "ensinar, aprender e avaliar a matemática construída pelos alunos com a guia e direção do professor *através* da resolução de problemas" (Nunes 2010, p. 44). A expressão "através de" – significando 'ao longo', 'no decurso' – enfatiza o fato de que ambas, Matemática e Resolução de Problemas, são consideradas simultaneamente e são construídas mútua e continuamente. É uma forma de ensinar e, consequentemente, aprender e, durante o processo, fazer matemática, pois "o aluno diante do problema deve-se mostrar como um co-construtor do seu próprio conhecimento" (Nunes, 2010, p. 45). Em sintonia com esta percepção, sobretudo da aprendizagem através da resolução de problemas, Vale, Pimentel e Barbosa (2015) argumentam que os alunos têm oportunidade nesta abordagem de utilizar conhecimentos prévios, apresentar as suas ideias ao grupo, justificá-las de forma convincente, haja em vista que, para obter uma solução, é necessário refinar, combinar e modificar conhecimento. Além disso, declaram as autoras: "(…) este é um modo de ultrapassar uma aprendizagem constituída por fatos isolados e aprender a fazer conexões" (Vale, Pimentel & Barbosa, 2015, p.43).

As investigações sistemáticas sobre resolução de problemas e suas implicações curriculares tiveram início na década de 70, do século XX, e, ganharam espaço no mundo inteiro já no final da referida década. Começando, então, o movimento a favor de um ensino baseado em resolução de problemas. Orientações curriculares para o trabalho com Matemática nas escolas (BRASIL, 1998, 1999; NCTM, 2000, ME, 2007) recomendam ênfase nesse aspecto e indicam que a resolução de problemas deve ser o ponto de partida das atividades matemáticas em sala de aula.

> Em termos curriculares, a pesquisa em resolução de problemas dos anos 1970s e 1980s deu origem à "reforma" ou movimento curricular "baseado em normas" (*standards-based*). Novos currículos incorporaram ideias da pesquisa que foi criada nos anos 1990s e começaram a entrar no mercado. Esses currículos foram controversos. A despeito da evidência de que eles tendem a produzir resultados positivos, sente-se que podem tornar-se vítimas das "guerras matemáticas" como aquela do "movimento *back to basics*", ocorrido nos Estados Unidos. (Schoenfeld, 2007, p. 537)

No documento *An Agenda for Action –Recommendations for School Mathematics of the 1980s* (NCTM, 1980), a resolução de problemas foi caracterizada como uma das 10 áreas de capacidades básicas para a aprendizagem matemática. Esse documento propunha a Resolução de Problemas como foco da matemática escolar.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) destacam que a Resolução de Problemas deve ser desenvolvida como uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto no qual conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas podem ser desenvolvidos, embora ainda, na maioria das vezes, os problemas sejam enfatizados como forma de aplicação de conhecimentos.

Também no Programa de Matemática de Portugal homologado em 2007 (ME, 2007), à semelhança do que era preconizado desde os anos 90 do século passado, a Resolução de problemas é vista, a par do raciocínio e da comunicação, como uma capacidade matemática fundamental, ao considerar que os alunos "devem adquirir desembaraço a lidar com problemas matemáticos e também com problemas relativos a contextos do seu dia-a-dia e de outros domínios do saber" (ME, 2007, p. 8). Trata-se de ser capaz de resolver e de formular problemas e de analisar diferentes estratégias e efeitos de alterações no enunciado de um problema. A resolução de problemas não só é um importante objetivo de aprendizagem em si mesmo, como constitui uma atividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos. No entanto, presentemente, nos novos programas portugueses (MEC, 2013), o foco vira-se novamente para as capacidades básicas, perdendo a resolução de problemas, a nível curricular, o protagonismo dos últimos 25 anos.

O que se pode perceber na descrição acima que, embora tais documentos curriculares enfatizem um foco na resolução de problemas para promover a aprendizagem do aluno, ainda não oferecem uma orientação clara para a prática educacional. As capacidades dos alunos em resolução de problemas ainda exigem uma melhoria substancial, especialmente para atender a natureza e a rápida evolução do mundo de hoje (English & Gainsburg, 2016).

A Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Uma forma de se trabalhar com resolução de problemas em sala de aula é com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas[1], que se constitui num caminho para se ensinar Matemática e não apenas para se

[1] A partir daqui a expressão Metodologia de Resolução de Problemas será usada em substituição ao nome da Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas.

ensinar a resolver problemas. O problema a ser trabalhado é um aspecto crucial nesta metodologia, desta forma, começamos por definir, na concepção de Onuchic (1999), o que é um problema matemático. Segundo ela, problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas se está interessado em resolver, é qualquer situação que estimule o aluno a pensar, que possa interessá-lo e que lhe seja desafiadora e não trivial. Nessa concepção não importa a natureza do problema, ele pode surgir de um contexto real, de uma aplicação ou até mesmo em termos puramente matemáticos, permitindo compreender não apenas a solução do problema, mas também os diferentes caminhos que podem ser trilhados durante a sua resolução. Assim, para Onuchic e Allevato (2011) e Onuchic (2013) ensinar através da Resolução de Problemas inicia-se com a exploração de um problema possibilitando ao aluno aprender e compreender aspectos importantes de conceitos ou ideias matemáticas.

> Essa forma de trabalho do aluno é consequência do seu *pensar matemático*, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário. Chamamos a esse processo de trabalho de uma forma Pós-Polya de ver a resolução de problemas (Onuchic e Allevato, 2011, p. 81, grifo das autoras).

Na Metodologia de Resolução de Problemas, considera-se um problema como ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos e, na sala de aula, através da sua resolução os alunos devem fazer conexões entre os diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos. Assim, os problemas são propostos aos alunos antes mesmo de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático a ensinar.

A Resolução de Problemas enquanto metodologia é uma abordagem que veio para aprimorar, na sala de aula, as formas de ensinar, aprender e avaliar o progresso dos alunos e o trabalho dos professores (Allevato; Onuchic, 2014; Vale, Pimentel e Barbosa, 2015; Allevato e Vieira, 2016), pois permite que o aluno explore diferentes tópicos matemáticos, seguindo várias dimensões, levando-o a realizar conexões entre as diferentes áreas da matemática. Neste sentido, defendemos que, os alunos, não devem ser ensinados a resolver problemas de um modo mecânico e, sim, orientados a descobrirem por si mesmo ideias matemática importantes. O problema pode ser o fio condutor para a aprendizagem de conceitos matemáticos, tornando-se assim a base para ensinar os conteúdos.

Nunes, Noguti e Allevato (2014) acreditam que trabalhar na perspectiva da Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, em qualquer nível de escolaridade, dá oportunidade ao aluno de explorar, investigar, manipular, conjecturar, falar, escrever, analisar, experimentar, refletir, abstrair, argumentar e generalizar, acarretando com isso a mobilização de um conjunto de conhecimentos que possibilitarão a produção de outros. Para uma melhor compreensão de como trabalhar esta metodologia nas aulas de Matemática, Onuchic (2013) apresenta um roteiro de atividades para sua implementação, de modo que o professor deixa de ser o transmissor do ensino em sala de aula de Matemática para ser o mediador, questionador e gerador de situações, passando o aluno a ser o protagonista e corresponsável pela sua aprendizagem.

Inicialmente, seleciona-se um problema (também denotado por problema gerador) visando a construção de um novo conceito, princípio ou procedimento para, então, propô-lo[2] à classe (etapa 1); entrega-se uma cópia do problema para cada aluno realizar sua leitura, buscando compreender o que é pedido e que estratégias utilizar para o resolver (etapa 2). Na etapa seguinte (3), no intuito de uma melhor compreensão do problema e discussões quanto à sua resolução, formam-se grupos e uma nova leitura é realizada. Nessa etapa a intervenção do professor pode-se fazer necessária, no sentido de esclarecer o sentido de alguma palavra desconhecida e/ou garantir o entendimento da tarefa pelos alunos. Entretanto, é importante que o professor tome cuidado para não interpretar a tarefa pelo aluno, pois uma das capacidades desejáveis de se desenvolver nos estudantes é, justamente, a interpretação de situações-problema. Ainda nesta fase, de posse do problema e sem dúvidas quanto ao seu enunciado, os alunos, em seus grupos, iniciam o trabalho, que se deve configurar como cooperativo e colaborativo, envolvendo a elaboração e execução de um plano com vista a se chegar à solução da situação-problema apresentada. Neste processo, o aluno tem a oportunidade de refletir, explorar, investigar, conjeturar e generalizar.

Enquanto os alunos buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o seu comportamento, acompanha suas explorações e incentiva o trabalho colaborativo (etapas 4 e 5).

[2] A proposição do problema pode ser pelo professor e também pelo aluno.

Pode ser necessário ajudar os alunos a resolver problemas secundários[3] que podem surgir no decurso da resolução. Na etapa 6, os alunos (ou o professor) registram as diferentes resoluções na lousa, independentemente dos processos de resolução usados e dos resultados obtidos pelos grupos e, a seguir, os alunos são convidados a discutir as diferentes resoluções registradas na lousa, defender seus pontos de vista e esclarecer suas dúvidas (etapa 7). Esta é uma fase rica de consolidação das aprendizagens. Após as dúvidas esclarecidas e as diferentes resoluções do problema analisadas, o professor tenta, com todos os alunos, chegar a um consenso sobre o resultado correto (etapa 8).

Por fim, os conceitos, princípios e procedimentos, emergentes do processo de resolução do problema, são apresentados pelo professor com a participação ativa dos alunos de maneira formal organizados e estruturados em linguagem matemática, (etapa 9). Com a finalidade de avaliar as compreensões construídas e consolidar a aprendizagem, são propostos novos problemas (etapa 10)[4]. A partir destes novos problemas, o ciclo pode ser reiniciado de modo que novos problemas possam desencadear novas aprendizagens tornando-se a sala de aula um ambiente em que as atividades são orientadas pela resolução de problemas.

Há de convir que esta metodologia demanda professores bem preparados para o seu uso, pois precisam selecionar cuidadosamente os problemas, observar os alunos na busca de soluções, incentivando-os e ouvindo-os, mantendo-os confiantes na própria capacidade para resolvê-los. É a maneira como se organizam as atividades na sala de aula, a escolha do material didático e da metodologia de ensino que permitirá o trabalho simultâneo na direção do conteúdo e das competências.

O ensino-aprendizagem exploratório nas aulas de Matemática

Este modelo de ensino-aprendizagem traz consigo perspectivas ideológicas sobre o ensino, a aprendizagem e o conhecimento. Segundo Canavarro (2011, 2014), ao invés de se valorizar uma lógica do professor que transmite os conhecimentos matemáticos aos alunos na expectativa de que estes os apreendam e revelem em exercícios de aplicação, valoriza-se uma perspetiva em que os alunos aprendem a partir do trabalho que realizam com tarefas matemáticas, que constituem a base para a aprendizagem matemática.

---

[3] São dúvidas que podem surgir durante a resolução do problema, como: notações, simbologias, conceitos ou conteúdos matemáticos.
[4] Para mais detalhes desse roteiro de atividades, consultar Allevato e Onuchic, 2014, p. 45 e 46.

O ensino-aprendizagem exploratório tem como característica principal a autonomia que o aluno tem ao realizar o seu trabalho de descoberta e construção do conhecimento diante de uma tarefa matemática. Neste cenário, o professor já não é mais o transmissor do conhecimento, pois boa parte desse trabalho é transferido para o aluno. "A aprendizagem decorre assim, sobretudo, não de ouvir diretamente o professor ou de fazer esta ou aquela atividade prática, mas sim *da reflexão realizada pelo aluno a propósito da atividade que realizou"* (Ponte, 2005, p.15, grifo do autor).

Outra característica relevante no ensino-aprendizagem exploratório é o momento da discussão matemática, por se constituir uma oportunidade para negociação de significados matemáticos e construção de novos conhecimentos. Os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgirem com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática (NCTM, 2000, ME, 2007).

Segundo Stein, Engle, Smith e Hugles (2008) a prática letiva numa abordagem exploratória desenvolve-se usualmente em três fases e que podem ocorrer sequencialmente ou articuladas: "lançamento" da tarefa, "exploração" pelos alunos, e "discussão e sintetização". Na primeira fase, o professor apresenta uma tarefa matemática à turma, que pode ser trabalhada individualmente, aos pares ou em pequenos grupos. A tarefa é frequentemente um problema ou uma investigação, exigindo interpretação. Na segunda fase, o professor apoia os alunos durante o trabalho autônomo sobre a tarefa, procurando garantir que todos participem e de forma produtiva. É importante que os comentários e as respostas do professor às eventuais dúvidas dos alunos não reduzam o nível de exigência cognitiva da tarefa. Enquanto isso, o professor tem de selecionar, a partir da sua rápida observação e apreciação das produções dos alunos em resposta à tarefa, as soluções que avalia como contribuições positivas para a discussão coletiva e estabelecer a sequência da sua apresentação pelos alunos. Para além de gerir o trabalho dos alunos, o professor precisa de interpretar e compreender como eles resolvem a tarefa e de explorar as suas respostas de modo a aproximar e articular as suas ideias com aquilo que é esperado que aprendam (Canavarro, 2014, p.4).

Na fase da discussão e sintetização da tarefa, uma variedade de abordagens à resolução da tarefa é exibida para toda a classe. O professor se concentra na exigente prática de orquestrar, de forma efetiva, a discussão entre os alunos (Stein et al., 2008). Reconhece-se que é uma prática difícil de concretizar, mas muito compensatória em termos da dinâmica coletiva que proporciona na turma e das aprendizagens matemáticas que permite aos alunos.

Para orquestrar produtivamente discussões matemáticas, Stein et al. (2008, p. 321) apresentam cinco práticas: (1) *Antecipar* as prováveis respostas dos alunos à tarefa matemática; (2) *Monitorizar* as respostas dos alunos à tarefa durante a fase de exploração; (3) *Selecionar* alunos para apresentarem suas respostas durante a fase de discussão e síntese; (4) *Sequenciar* propositadamente as respostas dos alunos que serão apresentadas e discutidas coletivamente e (5) *Ajudar* a classe a estabelecer conexões matemáticas entre as respostas dos alunos e as ideias-chave. As autoras alertam que o uso dessas práticas eficientemente depende “da implementação de uma tarefa exigente cognitivamente com múltiplas respostas possíveis e com metas de ensino bem definidas, ambas apoiadas pela compreensão dos professores do pensamento e de práticas reais dos alunos” (Stein et al., 2008, p. 322).

Canavarro (2011), ao discutir práticas de professores que contribuem para o desenvolvimento do ensino exploratório da matemática, com base em Stein et al. (2008), esclarece o que vem a ser cada uma dessas práticas. A prática de *Antecipar* se constitui como uma das componentes mais importantes. Refere-se a uma antecipação por parte do professor de como os seus alunos irão abordar as tarefas que lhes coloca, com vista a relacionar aquilo que eles poderão fazer com o propósito matemático da aula. Ao antecipar, o professor dedica-se a: prever a interpretação e o envolvimento dos alunos na tarefa; elencar uma diversidade de estratégias, corretas e incorretas, que os alunos poderão usar, com diferentes graus de sofisticação; relacionar essas estratégias com os conceitos, representações, ou procedimentos que quer que os alunos aprendam e/ou com as capacidades que quer que eles desenvolvam. Tudo isto é realizado ao nível do planejamento da tarefa.

A prática de *Monitorizar*, que é realizada em sala de aula apoiada no trabalho realizado pelo professor na antecipação, corresponde à apropriação por parte do professor das estratégias e resoluções que os alunos realizam durante o trabalho autónomo com o objetivo de avaliar o seu potencial para a aprendizagem matemática a promover na turma. Para além de verificar se os alunos estão a trabalhar na tarefa, o professor dedica-se a: observar e ouvir os alunos ou grupos; avaliar a validade matemática das suas ideias e resoluções; interpretar e dar sentido ao seu pensamento matemático, mesmo que lhe pareça estranho e/ou não o tenha antecipado; ajudar os alunos em dificuldade a concretizar resoluções que tenham potencial matemático relevante para o propósito matemático da aula.

A fase de *Selecionar* também feita em sala de aula, após o trabalho de monitorização, corresponde a identificar os alunos ou grupos cujas resoluções são importantes para partilhar com toda a turma na fase de discussão de modo a proporcionar uma diversidade de ideias matemáticas adequadas ao propósito matemático da aula — e estas não são necessariamente dos alunos que se oferecem para ir ao quadro. A seleção criteriosa pelo professor proporciona que sejam as ideias matemáticas importantes as discutidas pela turma, evitando que o desenvolvimento da discussão fique à mercê das estratégias que apresentam os voluntários.

A prática de *Ajudar* a e*stabelecer conexões* dá-se imediatamente a seguir à discussão das diferentes resoluções e, muitas vezes, pode ainda começar durante a mesma. É importante sublinhar que o propósito das discussões não é realizar um desfile de apresentações separadas de diferentes respostas ou estratégias de resolver uma dada tarefa; o propósito das discussões é relacionar as apresentações com vista ao desenvolvimento coletivo de ideias matemáticas poderosas que sintetizam as aprendizagens matemáticas dos alunos. Para tal, o professor convida os alunos a analisar, comparar e confrontar as diferentes resoluções apresentadas, identificar o que têm de semelhante ou de distinto, quais são as potencialidades e mais valias de cada uma delas, esperando que desta meta análise retirem heurísticas para abordar tarefas futuras. Ademais, em um trabalho exploratório na aula de Matemática,

> o professor propõe aos alunos um trabalho de descoberta, ao mesmo tempo que promove momentos de negociação de significados, argumentação e discussão coletiva. A discussão que pode se dar entre alunos e professor constitui oportunidades para negociação de significados matemáticos e construção de novos conhecimentos. O momento de discussão coletiva da tarefa em sala de aula é também importante para o desenvolvimento da comunicação matemática e para implementá-la nas aulas de Matemática (Ponte, Quaresma, Pereira e Baptista, 2015, p. 114).

O ambiente para o envolvimento dos alunos na tarefa tem de ser aquele em que eles se sintam à vontade para apresentarem as suas conjecturas, argumentarem contra ou a favor das ideias dos outros, sabendo que seu raciocínio será valorizado.

As inter-relações entre a Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de Problemas e o ensino-aprendizagem exploratório da Matemática

Diante dos estudos realizados no que se refere às duas abordagens discutidas, a metodologia de resolução de problemas e o ensino-aprendizagem exploratório, é possível estabelecer inter-relações entre ambas abordagens, relativamente à natureza das tarefas, às ações do professor e do aluno durante a resolução da tarefa (Quadro 4).

Quadro 4: Inter-relações entre a Metodologia de Resolução de Problemas e o Ensino-aprendizagem exploratório da Matemática no que se refere à natureza das tarefas, às ações do professor e às ações dos alunos na realização da tarefa

Natureza da Tarefa/Problema	
Metodologia Resolução de Problemas	*Esnsino-aprendizagem exploratório*
O problema, aberto ou fechado, visa a construção de um novo conteúdo, conceito ou procedimento matemático que não tenha sido trabalhado em sala de aula.	A tarefa, normalmente aberta, é aquela que valoriza a construção de conceitos, o uso de representações e também o uso de definições e propriedades dos objetos matemáticos.
Ações do Professor durante a aula	
O professor age como questionador, interventor, mediador, observador das situações, gerenciador das discussões. Cabe a ele formalizar o conteúdo e propor novos problemas para consolidação da aprendizagem.	O professor acompanha, incentiva, observa e apoia os alunos no trabalho autônomo, procurando que todos se envolvam ativamente. Na discussão e sintetização, o professor tem de gerir as interações dos alunos e dessa forma, orquestrar as discussões.
Ações do Aluno durante a aula	
O aluno age como um investigador, um co-construtor do conhecimento e, durante a resolução do problema, em um trabalho colaborativo, reflete, discute, interage, argumenta, justifica.	O aluno também é um investigador. Ele age como um investigador, explora, investiga, reflete, cria, argumenta, faz matemática, formula, justifica e generaliza conjeturas.

Fonte: as autoras

Fazendo uma análise comparativa sobre as inter-relações e singularidades entre as duas abordagens metodológicas percebe-se que ambas têm um objetivo primordial, o de proporcionar aos alunos uma aprendizagem significativa dos conceitos ou conteúdos matemáticos envolvidos, promovendo a descoberta, a exploração e a produção do conhecimento.

No que se refere à natureza da tarefa, esta deve potencializar o desenvolvimento de capacidades de raciocínio de forma a alcançar a compreensão matemática de modo significativo. É fundamental apresentar tarefas de natureza aberta, permitindo aos alunos enfrentarem situações para as quais não têm de imediato um método de resolução, construindo ou aprofundando a compreensão de conceitos, representações, procedimentos e outras ideias matemáticas. Os alunos, nestas duas abordagens, tendem a assumir um papel ativo e mais autônomo nas aulas de Matemática. Uma singularidade perceptível na Metodologia de Resolução de Problemas, defendida por Onuchic (1999, 2013) está na proposição do problema pelo professor, o qual é chamado de problema gerador, por ser ele o ponto de partida numa atividade matemática e gerar um novo conceito ou conteúdo matemático construído pelo próprio aluno com a medição do professor.

No que concerne às ações do professor, estas são fundamentais, pois têm também uma influência determinante na aprendizagem dos alunos. Um dos aspectos mais importantes está na seleção da tarefa e no planejamento da aula quando se prevê a interpretação, as estratégias de resolução tendo em conta o conteúdo a ser trabalhado. “É a partir do planejamento que o professor será capaz de responder de modo eficiente à grande maioria das questões dos alunos e enfrentar os desafios que se colocam” (Serrazina, 2017, p. 23).

Durante a execução da tarefa, que culmina com a formalização/sistematização das resoluções, as ações dos professores nas duas abordagens são muito semelhantes, há de se evidenciar um papel de relevo nas discussões coletivas que se sucedem no trabalho de investigação/exploração. Não é uma prática simples de concretizar, mas compensatória em termos da dinâmica coletiva que proporciona na turma e das próprias aprendizagens matemáticas que permite aos alunos. No ensino-aprendizagem exploratório as ações do professor podem ser dinamicamente concretizadas seguindo as cinco práticas que visam proporcionar ao professor melhores condições para orquestrar produtivamente as discussões matemáticas, sugeridas por Stein et al (2008).

Por fim, é pertinente explicar que na fase da formalização ou sistematização das ideias matemáticas construídas pelos alunos, o professor é quem conduz este momento com a colaboração dos alunos. Com isso, certamente, o papel do professor e dos alunos na sala de aula é um aspecto marcante da experiência matemática dos alunos (NCTM, 2000; Ponte, 2005).

Quanto às ações do aluno, o que fica evidente nestas abordagens é a inversão positiva de papéis entre professor e alunos, estes passam a ser o centro da atividade em busca de novos conhecimentos com compreensão e significado. O seu protagonismo se revela neste momento quando o professor lhes dá a oportunidade de se mostrar como um investigador que explora, reflete, discute e argumenta suas ideias matemáticas.

O Percurso Metodológico

O presente trabalho segue uma metodologia de natureza qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994) enfatizando descritivamente o fenômeno observado. O estudo tem por base a concretização de uma experiência de ensino em sala de aula apoiada na realização de tarefas/problemas de cunho exploratório, visando a promoção do pensamento algébrico dos alunos na abordagem à equação do primeiro grau. Participaram no estudo 13 alunos do 7.º ano do Ensino Fundamental I, com faixa etária média de doze (12) anos, a professora da turma e a primeira autora que desempenhou o papel de observadora participante ativa. A experiência de ensino ocorreu no primeiro semestre do ano 2018, em três encontros de 4h cada. Os alunos organizaram-se em grupos de dois, denominados de grupos A, B, C, … ., tendo recebido nomes fictícios a fim de preservar as suas identidades.

Para recolher os dados, as aulas foram gravadas em formato de vídeo e áudio para serem analisados os momentos de discussão coletiva e foram, ainda, recolhidas para posterior análise as produções escritas dos alunos. Durante a aplicação dos problemas, foram seguidos os passos estabelecidos por Onuchic (2013), conforme a abordagem didática da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, buscando sempre observar o desempenho dos alunos durante a realização das tarefas e o contributo para o desenvolvimento do seu pensamento algébrico, promovendo a construção de conhecimento e gosto pelo fazer matemático. Deste modo estava a desenvolver-se uma abordagem exploratória na sala de aula.

As tarefas/problemas[5] propostos: coletando dados

Foram planificados e implementados três problemas pela professora da turma sob a orientação da primeira autora deste trabalho, que foram retirados dos trabalhos de Mestre e Oliveira (2012) e Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), cujo foco foi o ensino-aprendizagem de equação do primeiro grau. Cada problema foi trabalhado em momentos de aula diferentes, com um nível crescente de dificuldade no intuito de propiciar aos alunos momentos de co-construção das ideias de resolução de equação do primeiro grau, numa abordagem exploratória, tendo em atenção os conhecimentos prévios dos alunos.

Teve-se o cuidado na planificação dos problemas, levando em consideração o que Serrazina (2017) orienta sobre o planejamento de uma aula numa abordagem exploratória, sobretudo quando se prevê o conteúdo a ser trabalhado, os objetivos, a antecipação das estratégias de resolução dos problemas, a utilização de recursos necessários, dentre outras orientações, cuja ação é exclusivamente do professor.

Os problemas apresentados aos alunos objetivaram fazer com que construíssem a ideia de variável, a identificação de padrões e regularidades, a expressão da generalização, a iniciação de um percurso em direção à simbolização através da passagem da linguagem natural para a linguagem matemática e, por fim, pretendia-se discutir os vários tópicos e noções acerca das equações do 1º grau.

Para este artigo, centramos a análise na resolução dos problemas 2 e 3 por se aproximarem mais das noções preliminares de equação do primeiro grau (Figuras 1 e 2).

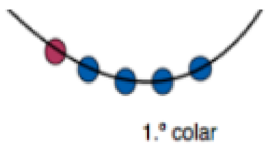
[5] Estamos considerando aqui neste artigo os termos tarefa e problema sinônimos.

Figura 1 – Enunciado do problema: Os colares

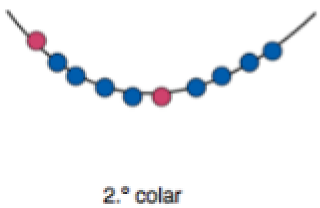
Problema Proposto: Os colares

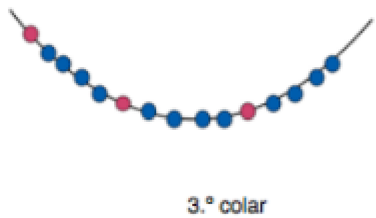
A Maria está fazendo colares para oferecer à suas amigas. Só tem pérolas de duas cores azuis e vermelhas. Começou a construir os colares:

1. Construiu o primeiro colar:



2. Depois fez o segundo e o terceiro colares:





3. Agora é sua vez, desenhe o quarto colar construído pela Maria.

4. Após desenhar o quarto colar construído por Maria, preencha a tabela:

Número de pérolas azuis	Número de pérolas vermelhas

5. Como podes escrever a relação matemática entre o número de pérolas azuis e o número de pérolas vermelhas? Mostre como pensastes.

Fonte: Mestre e Oliveira (2012)

Figura 2 – Enunciado do problema: Eleição para líder de turma.

Problema Proposto: Eleição para o líder de turma

A diretora de turma que coordenou o processo de eleição do líder de turma, informou no final que:

1. Os 30 alunos da turma votaram e não houve votos brancos ou nulos;
2. Apenas três alunos receberam votos: a Francisca, o Lucas e a Sandra;
3. O Lucas recebeu menos dois votos que a Francisca;
4. A Sandra recebeu o dobro dos votos que recebeu o Lucas.

Quem ganhou as eleições? Com quantos votos?

Não te esqueças de apresentar e explicar o teu processo de resolução.

Fonte: Oliveira, Menezes e Canavarro (2013)

A experiência em sala de aula: análise e interpretação

Os problemas escolhidos para a experiência de ensino foram selecionados no intuito de entrelaçar as abordagens metodológicas: resolução de problemas e ensino-aprendizagem exploratório em seus aspectos singulares, uma vez que, ambas trazem em sua essência convergências, sobretudo no que se refere ao favorecimento de um ensino-aprendizagem com significado e compreensão.

Os tópicos matemáticos envolvidos no primeiro problema, intitulado "Os colares", são: sequência, múltiplos e divisores, variável, termo geral e expressões algébricas e tinha como objetivo identificar as regularidades e fazer a generalização usando a linguagem natural, e iniciar um percurso em direção à simbolização através da passagem da linguagem natural para a linguagem matemática.

Seguindo os passos da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (Onuchic, 2013) foi entregue o problema e pedido aos alunos que fizessem a leitura individual. Após essa ação foi solicitado que eles formassem grupos e discutissem o problema junto com os colegas para pensarem em uma estratégia para resolvê-lo. Paralelo a esses momentos de concentração para a resolução, observámos o modo como eles se inteiravam e entendiam o problema, quais as impressões que tinham e também o modo como lidavam com a ideia do outro. Percebemos que muitos demonstravam insegurança pedindo sempre que confirmassem se estava correto ou se era daquela forma que se fazia. Nesse momento houve incentivo e estímulo por parte da professora, sem interferência na resolução do problema, apenas buscava transmitir segurança, dando autonomia aos alunos e pedindo-lhes que continuassem e discutissem com o grupo para chegarem a um consenso quanto à resolução.

Como o problema tratava de uma sequência pictórica, assim que os alunos viram os colares anteriores desenhados, já começaram a esboçar o desenho do quarto colar e logo depois foram preenchendo a tabela. Na fase de preenchimento da tabela, a partir da quarta linha, onde não havia mais representação pictórica, eles começaram a discutir em seus grupos sobre o problema e foram percebendo como obter a expressão em linguagem natural.

A professora atuou de forma a incentivar e estimular os registros de todas as ideias dos grupos, a fim de chegaram a um consenso sobre os caminhos que percorreram e posteriormente compartilharem com a turma essas ideias.

O grupo A optou por uma resolução baseada no número total de pérolas. Ao observarem que a sequência é sempre composta por cinco pérolas, uma vermelha e quatro azuis, o grupo multiplicava o número do colar por cinco e encontrava a quantidade total de pérolas que precisava usar, logo em seguida dividia esse número por cinco e encontrava a quantidade de pérolas vermelhas. Foi um raciocínio diferente dos outros grupos e foram os únicos que pensaram nas pérolas vermelhas e azuis juntas para estabelecerem uma regra geral que ajudasse a preencher a tabela. Nesse momento, a professora começou a conversar com o grupo para entender melhor o que pensavam:

PROFESSORA: *Meninos, a ideia de vocês foi muito legal, como chegaram a essa conclusão?*

ALUNO ELIAS: *Primeiro nós começamos a contar o total de pérolas dos colares que estavam desenhados e percebemos que aumentava sempre de cinco em cinco.*

ALUNO MÁRIO: *Aí quando a gente dividiu esse número por cinco nós encontramos um valor que era igual a quantidade de pérolas vermelhas.*

PROFESSORA: *Vocês testaram se isso continuava dando certo para os próximos colares?*

ALUNO ELIAS: *Sim, até fizemos o desenho pra contarmos as pérolas e deu certinho.*

ALUNA MANOELA: *Foi até mais fácil pra completar a tabela depois que descobrimos isso.*

PROFESSORA: *Alguém teve alguma outra ideia diferente dessa pra conseguir saber quantas pérolas de cada cor iam precisar para construir os próximos colares?*

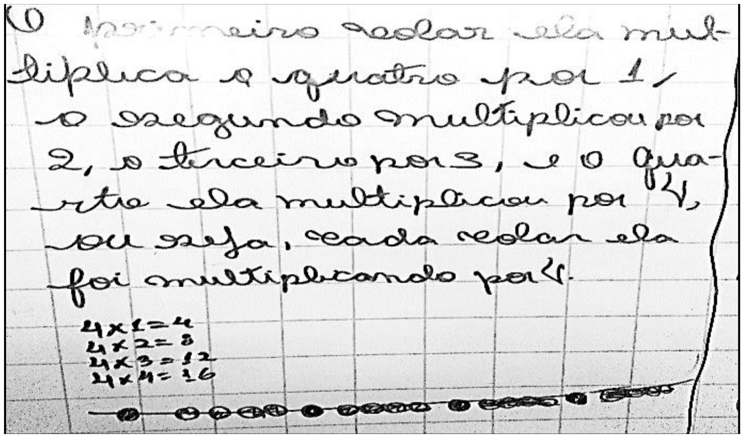
GRUPO A: *Não.*

ALUNO MÁRIO: *Professora, nós já pensamos logo nisso e deu certo aí fomos responder a tabela, mas eu acho que deve ter outro jeito...*

Enquanto isso, uma aluna do grupo B interfere, dizendo:

ALUNA ANA: *Nosso grupo não pensou assim, nós pensamos no número quatro.*

Figura 4 – Registro da resolução do grupo B



Fonte: Produção dos alunos

PROFESSORA: *Que legal! Vocês fizeram bastante coisa para explicar como pensaram. Querem falar para os colegas como pensaram?*

ALUNA ANA: *Não foi difícil, nós fizemos o desenho e depois entendemos como era.*

ALUNA CLARICE: *Nós percebemos que o número do colar vezes 4 era sempre a quantidade de bolinhas azuis.*

PROFESSORA: *Certo, mas e o número de bolinhas vermelhas?*

GRUPO - ANA: *É a mesma quantidade do número do colar que estamos fazendo. (Todos tentavam explicar ao mesmo tempo).*

PROFESSORA: *E como vocês perceberam isso?*

ALUNA CLARICE: *Na hora de preencher a tabela. Dava pra perceber. Todo mundo concordou, mas ANA fez o desenho pra ter certeza e deu certo.*

PROFESSORA: *Tudo bem, mas vocês acham que é possível criar um modelo que sirva para qualquer colar que Maria queira fazer, assim como fizemos no outro problema?*

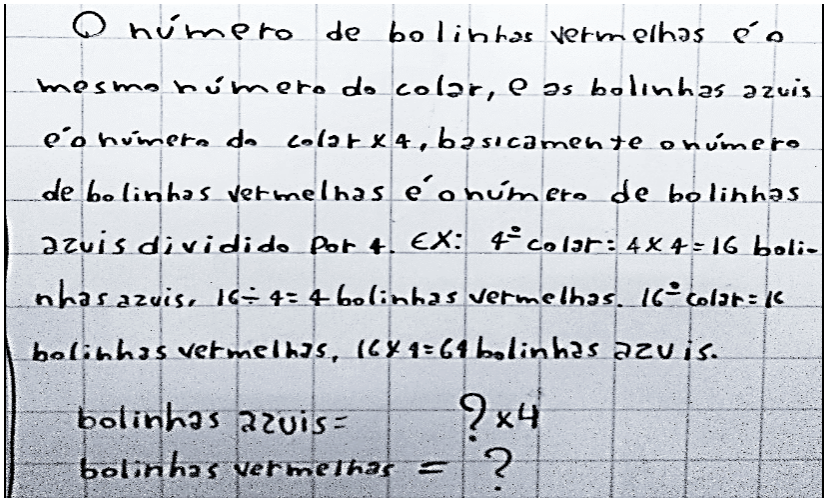
ALUNA ANA: *Nós não pensamos nisso, mas acho que dá.*

Um aluno do grupo C interfere na discussão e diz:

ALUNO JOÃO: *Professora, meu grupo pensou de um jeito bem fácil.*

PROFESSORA: *Então venham mostrar para os colegas como fizeram.*

Figura 5 – Registro da resolução do grupo C


O número de bolinhas vermelhas é o mesmo número do colar, e as bolinhas azuis é o número do colar x 4, basicamente o número de bolinhas vermelhas é o número de bolinhas azuis dividido por 4. EX: 4º colar: 4 x 4 = 16 bolinhas azuis, 16 ÷ 4 = 4 bolinhas vermelhas. 16º colar: 16 bolinhas vermelhas, 16 x 4 = 64 bolinhas azuis.

bolinhas azuis = ? x 4
bolinhas vermelhas = ?

Fonte: Produção dos alunos

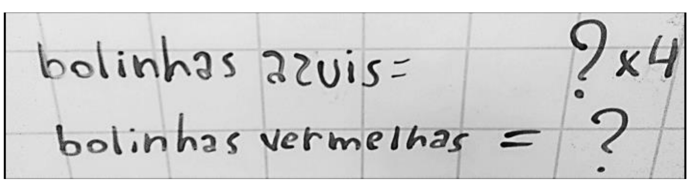
ALUNO PEDRO: *Era sempre a mesma regra, o número de bolinhas vermelha é a mesma quantidade do colar que a gente estava fazendo e o número de bolinhas vermelhas era só multiplicar o número do colar por quarto.*

ALUNO JOÃO: *Olhando a gente já vê que é uma vermelha e quatro azuis, uma vermelha e mais quatro azuis... e vai continuando assim por diante.*

PROFESSORA: *Muito bem, consigo entender perfeitamente. Vocês podem-me explicar o que fizeram no final da explicação?*

ALUNO JOÃO: *Eu disse para PEDRO* que *dava para fazer igual fizemos no outro e ele disse que dava mesmo. Chamamos o número de bolinhas vermelhas que a gente não sabe qual vai ser, porque vai depender do colar que a gente for fazer, e chamamos de "***?***" e depois pegamos esse símbolo* ***"?"*** *e multiplicamos por quatro pra achar o número de bolinhas azuis. Aí ficou desse jeito (apontando para o que haviam escrito).*

Figura 6 – Generalização da explicação do grupo C


bolinhas azuis = ? x 4
bolinhas vermelhas = ?

Fonte: Produção dos alunos

PROFESSORA: *É isso mesmo! Vocês lembraram de usar um símbolo para representar uma quantidade qualquer de colares. Em que momento conseguiram pensar nisso?*

ALUNO PEDRO: *A gente tinha escrito só a explicação e quando a senhora perguntou para o outro grupo se era possível fazer o modelo aí nós acrescentamos. No início só pensamos em fazer o desenho e explicar mesmo.*

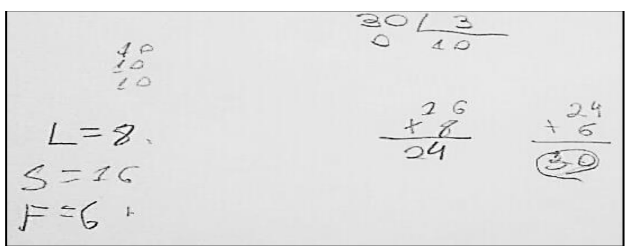
PROFESSORA: *Vocês foram bastante espertos (risos).*

O objetivo central do problema, que era a identificação da regularidade na criação dos colares e a generalização da linguagem natural para a linguagem matemática (simbólica), foi alcançado. Percebemos que os alunos, quando estimulados, já começam a utilizar os símbolos para representar um valor que ainda não foi determinado.

O terceiro problema apresentava um formato diferente do problema anterior, não se constituía de um modelo ou padrão de regularidade a ser seguido. Ele pode ser resolvido por tentativa e erro, pela construção de uma tabela e também pelo método algébrico para promover o desenvolvimento da equação do 1º grau na transposição da linguagem natural para a linguagem simbólica. A professora utilizou a mesma dinâmica com os alunos na resolução do terceiro problema ao fazer uso na sala de aula da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, seguindo o roteiro já apresentado anteriormente.

Seguindo as estratégias de resolução do problema pelos grupos na lousa, a maioria dos grupos utilizou a estratégia tentativa e erro. O grupo A não se atentou para o que dizia o enunciado em relação a quantidade de votos de Lucas e Francisco. Então foi necessário a intervenção da professora.

Figura 7 – Resolução apresentada pelo grupo A



Fonte: Produção dos alunos

PROFESSORA: *Meninos lá no enunciado diz que Lucas recebeu quantos votos?*

GRUPO A: *Diz que Lucas recebeu menos dois votos que a Francisca (leram o enunciado).*

PROFESSORA: *Na solução de vocês, Lucas recebeu oito votos e Francisca seis. Então essa solução obedece as informações do enunciado?*

GRUPO A: *Não, Lucas recebe dois votos a mais que Francisca.*

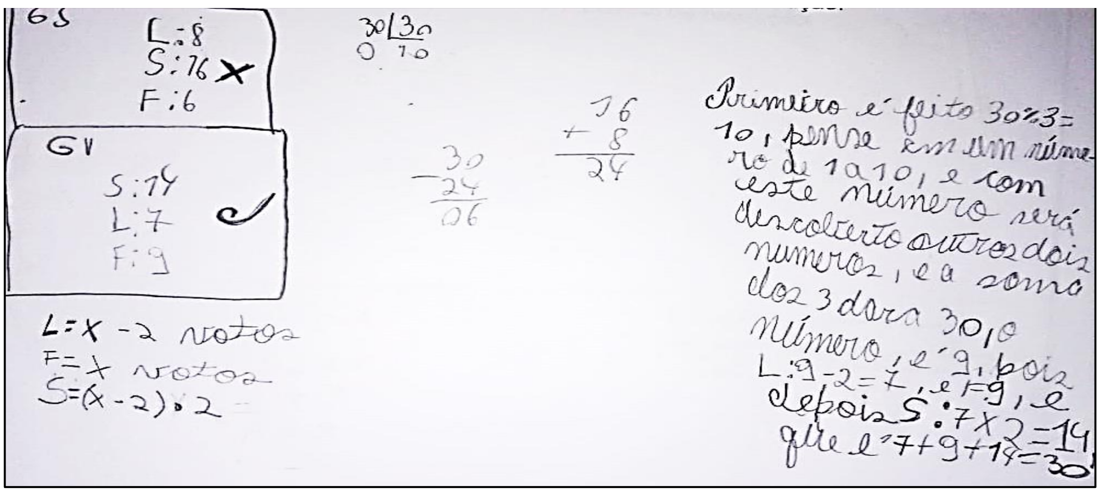
PROFESSORA: *Desse modo o valor que vocês pensaram não satisfaz as informações dadas, é preciso pensar em uma outra que atenda todas as informações e não apenas uma só delas.*

GRUPO A: *Vamos pensar novamente.*

O grupo repensou a quantidade de votos que cada um dos candidatos havia recebido e dessa vez tiveram mais atenção para atender todas as informações que o enunciado trazia. Eles continuaram trabalhando com tentativa e erro e não pensaram em usar uma variável para apresentar a quantidade desconhecida de votos.

Observando o grupo B, já podemos notar que eles também usaram a tentativa e erro e fizeram o registro na linguagem natural e na linguagem simbólica para representar a quantidade de votos de cada candidato mas não chegaram a um modelo genérico que relacionasse as quantidades de votos dos três candidatos juntos.

Figura 8 – Resolução apresentada pelo grupo B



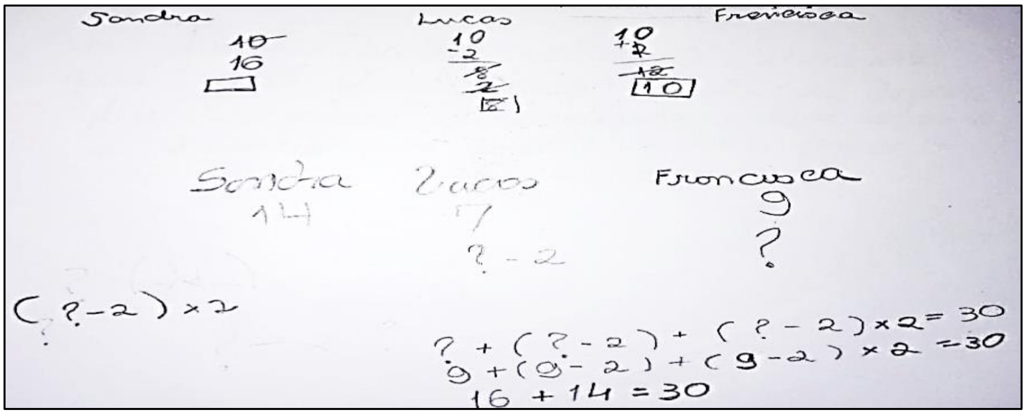
Fonte: Produção dos alunos

PROFESSORA: *Vocês fizeram três registros diferentes para representar a solução do problema, mas fiquei curiosa com a parte em que usaram a variável para representar os votos. Vocês conseguem explicar no que pensaram?*

ALUNO MÁRIO: *Nós primeiro fizemos por tentativa mesmo, mas a primeira vez não deu certo porque Lucas ficava com dois a mais que Francisca e isso não podia. Então fizemos novamente e deu certo, aí decidimos escrever a explicação para mostrar como pensámos. A parte do símbolo foi feita seguindo o que estava escrito no problema, mas não usamos, só foi feito mesmo para registrar o número desconhecido. Foi bom que deu para entender que primeiro precisamos pensar no número de votos de Francisca para depois descobrir o dos outros candidatos por que senão, não daria certo.*

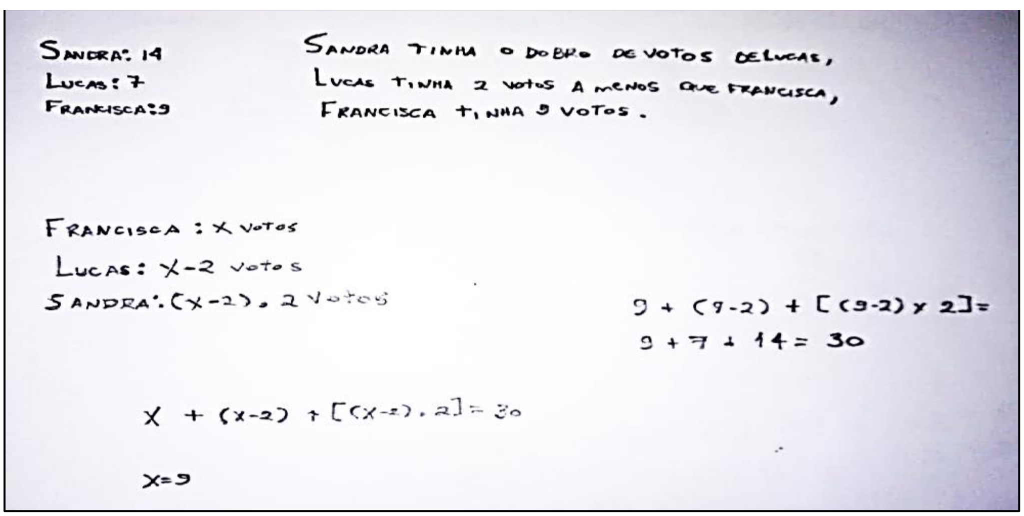
É possível notar que nos dois primeiros casos, os grupos A e B usaram a divisão por três por se tratar de três candidatos, a partir daí iam pensando em números próximos ao dez (que é o resultado da divisão de trinta votos por três candidatos) que satisfizessem as condições do enunciado. Os grupos C e D também pensaram na mesma forma de resolução, mas estes foram além e conseguiram generalizar e estabelecer uma relação matemática fazendo uso de um símbolo (variável) para relacionar os votos de cada candidato e o total de votos.

Figura 9 – Resolução apresentada pelo grupo C



Fonte: Produção dos alunos

Figura 10 – Resolução apresentada pelo grupo D



Fonte: Produção dos alunos

Nesses dois casos (Figuras 9 e 10) observamos que os alunos foram capazes de compreender o sentido da variável e conseguiram desenvolver expressões algébricas, apesar de ainda recorrerem a tentativa e erro, pois não tinham conhecimento de equações do 1º grau, conforme discussão abaixo entre professora e o grupo.

PROFESSORA: *Meninos vocês gostariam de explicar o que fizeram (grupo C)?*

ALUNO LEONARDO: *Nós primeiro dividimos por três que é o número de candidatos e depois resolvemos tentar quais números chegavam mais perto.*

PROFESSORA: *Mas tinha alguma regra para escolher esses números.*

ALUNA MILENA: *Tinha tia, tinha que lembrar o que o problema falava, porque lá não dizia quantos votos cada um tinha mas falava umas regras.*

PROFESSORA: *Sim, é muito importante lembrar das informações do enunciado. Além disso percebi que vocês fizeram uma expressão para representar a quantidade de votos.*

ALUNO LEONARDO: *Como das outras vezes nós usamos um símbolo para representar o número que a gente precisava descobrir então fizemos a mesma coisa.*

PROFESSORA: *E porque vocês igualaram a expressão ao número trinta.*

ALUNO LEONARDO: *O total de votos era trinta, quando somar os votos de Lucas, Francisca e Sandra então tem que ser trinta.*

PROFESSORA: *E o grupo D pode nos dizer de que maneira pensastes?*

ALUNO JOÃO: *Nós pensamos bem parecido ao grupo C, fizemos a tentativa e depois usamos a letra x para representar o que era desconhecido. Como achamos que Francisca tinha nove votos ai nós trocamos a letra x por nove e verificamos se no final o resultado era trinta e deu certo.*

Como estabelecido previamente, o objetivo central do problema, era levar os alunos a formularem expressões algébricas que atendessem todas as condições do problema e posteriormente relacionar essas expressões para obter uma equação do 1.º grau. Assim, no momento da formalização, a professora trabalhou a resolução da equação encontrada pelos alunos dos grupos C e D mostrando que o processo usado pelos dois grupos é mais rápido e eficiente. Por fim, para validar as vantagens do uso da equação do 1º grau foram apresentadas outras equações com valores maiores e, assim os alunos puderam perceber que a resolução por tentativa e erro nem sempre é eficiente podendo ser um processo longo e complexo.

Nessas circunstâncias, comprovou-se as vantagens do trabalho com a resolução da equação do 1º grau e, como forma de estudo e fixação das ideias sobre equação do 1º grau, a professora apresentou outros problemas para que os alunos resolvessem e se apropriassem com segurança dos conhecimentos adquiridos.

É importante ressaltar o papel da professora neste momento, ela precisou estabelecer conexões com as aprendizagens que foram adquiridas anteriormente, valorizar todas as estratégias usadas pelos alunos, organizar e estruturar os conceitos construídos através da resolução do problema e, por fim, ensinar os alunos a resolverem a equação do 1º grau.

No que se refere à experiência de ensino é perceptível o entrelaçamento destas duas abordagens metodológicas. De fato, pelos excertos apresentados pode constatar-se as discussões coletivas entre os alunos e a professora que, a todo o momento, perpassava pelos grupos, incentivando, encorajando o questionamento e a justificação das ideias apresentadas pelos alunos, priorizando o protagonismo do seu aprendizado.

Desta forma, ela se torna a promotora do ambiente da sala de aula que permite uma cultura dialógica da construção do conhecimento. Outro aspecto relevante a se considerar nesta experiência de ensino refere-se ao envolvimento dos alunos na tarefa, agindo em seus grupos como verdadeiros investigadores, interagindo com os colegas nas discussões coletivas, assumindo um papel ativo tanto na explicação das suas formas de pensamento como na compreensão das resoluções apresentadas de modo a dar-lhes sentido.

Considerações finais

À medida que se vai trabalhando com Resolução de Problemas e Ensino-aprendizagem exploratório, há mudanças significativas nas atitudes do professor e dos alunos. O professor passa a pensar mais em sua prática letiva, sobretudo em seu planejamento, nos modos de agir com os alunos, motivando-os, orientando-os e despertando-os para se envolverem na tarefa e nas discussões que a tarefa pode proporcionar e, os alunos, por sua vez, vão adquirindo independência, confiança, criatividade, mais entusiastas diante da tarefa e vão desenvolvendo sua capacidade de observar, estabelecer relações, conjecturar, testar, justificar e argumentar.

Uma das principais características dessas abordagens Resolução de Problemas e Ensino-aprendizagem exploratório, que promovem tanto o processo como o conteúdo, "é a oportunidade de geração de ideias matemática dos alunos, mesmo antes do conteúdo ser formalmente introduzido" (English & Gainsburg, 2016, p.326). Elas trazem, em sua essência, convergências, sobretudo no que se refere ao favorecimento de um ensino-aprendizagem com significado e compreensão, pois as tarefas apresentadas aos alunos têm o potencial de proporcionar desafios intelectuais que podem aumentar o desenvolvimento de uma compreensão matemática significativa.

Ademais, iniciar com a exploração de um problema possibilita ao aluno aprender e compreender aspectos importantes de conceitos ou ideias matemáticas desde que o problema seja usado para o objetivo a que se propõe, convidando os alunos à especulação e ao trabalho, analisando seus próprios métodos e soluções obtidas, visando sempre a construção do conhecimento. Os problemas também podem servir como contexto de aplicação de conhecimentos e técnicas já aprendidas anteriormente e, consequentemente, servir para o desenvolvimento de novas aprendizagens.

É o que pode ser constatado nos problemas apresentados na experiência de ensino (geradores da noção introdutória de equação do primeiro grau). Serviram também para mostrar o entrelaçamento das duas abordagens metodológicas aqui tratadas: ambas favoreceram a investigação, a exploração, a demonstração, a validação e a comunicação de resultados aos pares. Possibilitaram ao aluno fazer matemática, colocando-o no centro do processo de aprendizagem matemática.

Enfim, ambas abordagens constituem-se como poderosas ferramentas capazes de levar os alunos à compreensão da matemática escolar e, por isso, recomendamos que sejam usadas nas aulas de Matemática.

Referências

Allevato N. S., & Onuchic, L. R. (2014). Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? In L. R. Onuchic N. S. Allevato, F. C. Nogutti, & A. M. Justulin (Org.), *Resolução de Problemas: teoria e prática* (pp. 35–52). Jundiaí: Paco Editorial.

Allevato, N. S. & Vieira, G. (2016). Do ensino de resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para aprendizagem. *Quadrante*, 25(1), 113-131.

APM (2009). *Renovação do currículo de Matemática*. Trabalho original publicado em 1988. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Bogdan, R. C. & Biklen, S.K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.

Brasil MEC. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: *Matemática — 3.º e 4.º ciclos*. Brasília, DF: Secretaria de Educação Fundamental.

Brasil MEC (1999). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: *Matemática — Ensino Médio*. Brasília, DF: Secretaria de Educação Média e Tecnológica.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115,* 11-17.

Canavarro, A.P. (2014). Casos multimédia na formação contínua sobre ensino exploratório da Matemática: uma experiência com um grupo de professores. In: *Seminário Práticas Profissionais*: *Desafios para a formação de Professores de Matemática*, organizado pelo Projeto P3M, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

English, L. D., Gainsburg, J. (2016). Problem solving in a 21st Century Mathematics Curriculum. In L. D. English & D. Kirshner(Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 313-335) Third Edition. New York: Routledge.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2012). A co-construção da generalização nas discussões coletivas: Um estudo com uma turma do 4.º ano. *Quadrante*, 21(2), 111-137.Ministério da Educação

(ME). (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC. http://sitio.dgidc.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf. Acesso em 20 de junho de 2017.

Ministério da Educação e Ciência (MEC). (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC. http://www.dge.mec.pt/sites/.../Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf. Acesso em 15 de julho de 2017.

NCTM. (1980). *An Agenda for Action.* Reston; Va: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Nunes, C. B., Noguti, F. C. H, & Allevato, N. G. S. (2014). Espaço e Forma. In: L. R. Onuchic. et al. *Resolução de Problemas***:** teoria e pr*ática* (pp. 101-125). Jundiaí: Paco Editorial.

Nunes, C.B. (2010). *O processo ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática***.** Tese de doutoramento (não-publicada), Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, São Paulo, Brasil.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, 22(2), 1-25.

Onuchic, L.R. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: M. A. V. Bicudo, (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções & perspectiva* (pp. 199-220). São Paulo, SP: Editora UNESP.

Onuchic, L.R. (2013). A resolução de problemas na educação matemática. Onde estamos? E para onde iremos? *Espaço Pedagógico*, 20(01), 88-104.

Polya, G. (2014). O ensino por meio de Problemas. In: *Educação e Matemática*, 130, 44-50.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2015). É mesmo necessário fazer planos de aula? *Educação e Matemática*, *133*, 26-35.

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2015). Exercícios, problemas e explorações: Perspectivas de professoras num estudo de aula. *Quadrante*, 24(2), 111-134.

Ponte, J. P. (2014).Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 13-27). Lisboa: Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P., Brocado, J. & Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula***.** Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte J. P. & Matos, J. (1996). Processos cognitivos e interações sociais nas investigações matemáticas. In P. Abrantes, L.C. Leal, & J. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (textos selecionados). Lisboa: Associação dos Professores de Matemática.

Santos, L., Brocardo, J., Pires, M., & Rosendo, A. I. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2.º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In J.P. Ponte et al. *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação dos professores* (pp. 83-106). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação e Matemática.

Schroeder, T. L. & Lester Jr., F. K. (1989). Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving, In P. R. Trafton & A. P. Shulte (Eds.), *New Directions for Elementary School Mathematics* (pp. 31-42). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. H. (2007). Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics. *ZDM Mathematics Education*, *39*, 537–551.

Serrazina, L. (2017). Planificação do Ensino e Aprendizagem da Matemática. In GTI (Org.), *A prática dos professores: Planificação e discussão coletiva na sala de aula*, (pp. 9-31). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Stein, M. & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática (artigo original publicado em 1998). *Educação e Matemática*, 105, 22–28.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340.

Vale, I., Pimentel, T. (2016). Resolver Problemas – Criando Soluções, Vendo. *REMATEC – Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, *11*(21), 8-25.

Vale, I.; Pimentel, T.; Barbosa, A. (2015). Ensinar Matemática com Resolução de Problemas. *Quadrante*, *24* (02), 39-60.

Van de Walle, J. *A* (2001). *Elementary and Middle School Mathematics*, 4ª edição. New York: Logman.

Autores:

Célia Barros Nunes

Doutora em Educação Matemática (UNESP - Rio Claro, São Paulo - Brasil)

Coordenadora do Curso de Especialização em Educação Matemática (UNEB, Campus X, Bahia - Brasil)

Membro do Projeto de Pesquisa “Desenvolvimento Profissional e Estatística (D-Estat)” desde 2018

Professora do Departamento de Educação da Universidade do estado da Bahia (UNEB - DEDC X)

E-mail: celiabns@gmail.com

Lurdes Serrazina

PhD em Educação Matemática pela University of London (UK)

Membro integrado da UIDEF, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Professora Coordenadora aposentada da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa (ESELx/IPL), Lisboa, Portugal, Campus de Benfica do IPL, 1549 - 003, Lisboa, Portugal.

E-mail: lurdess@eselx.ipl.pt