Cómo los Estudiantes de la Escuela Media Argentina relacionan las Ecuaciones con los Gráficos: Un Estudio Transversal

How the Students in the middle school in Argentina relate the Equations to the Graphs: A Cross-sectional Study

Ana Corica (1), **Inés Elichiribehety** (2) **y María Rita Otero** (3)

Facultad de Ciencias Exactas-UNICEN. Grupo de Investigación en Enseñanza de las Ciencias. Tandil, ARGENTINA

1 acorica@exa.unicen.edu.ar 2 ielichi@exa.unicen.edu.ar

3 rotero@exa.unicen.edu.ar

RESÚMEN

El objetivo del trabajo fue describir el grado de habilidad algebraica- manifestado en la resolución de ecuaciones, la relación entre la solución analítica y la solución gráfica y la verificación del resultado, durante la escolaridad media en Argentina. El estudio forma parte de una investigación más amplia, que investiga la génesis del álgebra escolar enfatizando su carácter modelizador desde una perspectiva cognitiva y didáctica (Otero, 1998; Elichiribehety, Otero, 2001; Elichiribehety, Otero, Fanaro, 2002; Elichiribehety, 2002; Elichiribehety, Otero, Corica, 2003). En esta instancia, se presentan resultados parciales obtenidos en una prueba de lápiz y papel, que entre otros aspectos, evaluó la resolución analítica de diferentes clases de ecuaciones a lo largo de toda la escolaridad media, profundiza en aspectos concernientes al trabajo con ecuaciones lineales, realizado con 283 sujetos seleccionados al azar, perte-

necientes a tres escuelas de la ciudad de Tandil, Argentina, cuyas edades están comprendidas entre 13 y 18 años. En el momento en que se realizó la encuesta, los alumnos estaban cursando el tercer trimestre del año 2000. Los resultados obtenidos nos indicarían, que los sujetos pueden realizar una correcta resolución algebraica de ecuaciones lineales con una incógnita pero no de sistemas de ecuaciones lineales y menos aun la resolución gráfica de ecuaciones lineales con una incógnita así como de sistemas de ecuaciones lineales.

Palabras Clave*: Algebra escolar; ecuaciones y gráficas; educación media, verificación*

ABSTRACT

The aim of this work is to describe the algebraic ability of secondary school students in the resolution of equations, the relation between the analytic and graphic solutions, and the verification of the result.This study is part of a wider research which investigates the genesis of algebra at school, emphasizing its modeling character from a cognitive and didactic perspective (Otero, 1998; Elichiribehety, Otero, 2001; Elichiribehety, Otero, Fanaro, 2002; Elichiribehety, 2002; Elichiribehety, Otero, Corica, 2003). In this paper, partial results are obtained from a paper-and-pencil test which, among other aspects, evaluated the analytic resolution of different kinds of equations throughout all the secondary school. In this opportunity, aspects concerning the work with linear equations are deepened; this work was carried out with 283 students, aged between 13 and 18, selected at random from three schools of the city of Tandil. When the survey was made, the students were attending the third quarter of year 2000. The results obtained would indicate us that students can perform a correct algebraic resolution of linear equations in a single unknown but they cannot deal with systems of linear equations and even less with the graphic resolution of linear equations in a single unknown as well as of systems of linear equations.

Key Words: *Algebra at school, equations and graphs, secondary school, verification*

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se asume la tesis propuesta por Chevallard (1999), Gascón (1999); Bolea, Bosch y Gascón, 2001) que interpretan al Álgebra escolar, no como "aritmética generalizada" sino como un instrumento esencial de la "modelización matemática". Al entender al Álgebra de esta manera como instrumento al servicio del trabajo matemático, es fundamental el papel que juega la instrucción en la construcción de la génesis escolar de la actividad algebraica. Por esta razón, se analizaron las estrategias que emplean los estudiantes en la resolución de ecuaciones vinculadas a los aspectos funcionales y gráficos, entre otros posibles.

Los rasgos de algebrización que se manifiestan en el ámbito escolar remiten a la manipulación puramente formal de las expresiones algebraicas en la cual las letras juegan sólo el papel de incógnitas, mientras que los parámetros están ausentes. Así, en la organización matemática escolar es difícil encontrar una integración entre el lenguaje algebraico y funcional ni tampoco aparecen las demostraciones y justificaciones algebraicas.

Tal como señalan los trabajos de Bolea, Bosch, Gascón, (2001) "... Postulamos que este modelo epistemológico específico (el álgebra escolar como una especie de *"aritmética generalizada"*) provoca restricciones del proceso de algebrización que inciden sobre la estructura de las organizaciones matemáticas escolares y sobre las prácticas docentes que es posible llevar a cabo con ellas. (...) la tendencia a presentar el "álgebra escolar" como una especie de "lenguaje algebraico"; peso excesivo de las actividades algebraicas "formales" en detrimento de las "funcionales"; el tratamiento de las ecuaciones como "igualdades numéricas" con algunos términos desconocidos; la presentación del álgebra en continuidad muy privilegiada y casi exclusiva al "marco aritmético de referencia" (en detrimento, entre otros, del marco geométrico); y la tendencia a seguir identificando – tal como se hace en la aritmética escolar actual- la resolución de un problema algebraico con la obtención de un número, son algunos de los rasgos que provienen del modelo epistemológicos dominante citado...”

Por otro lado, también Janvier (1996) ha señalado que hay al menos tres formas de interpretar las letras del álgebra escolar - como iniciales en identidades, como incógnitas específicas en problemas y como variables en función – dando lugar a diferentes patrones de razonamiento (Mac Gregor M., Stacey K; 2000).

Para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra es fundamental el concepto de variable, sin embargo, la mayoría de las veces las variables se utilizan como si pudieran entenderse sin ningún problema, simplemente, después de una cierta práctica; el uso de las variables se confunde con el uso de las x, las y..., o de otras letras, manejándolas habitualmente con naturalidad, sin llegar a valorar ni la complejidad que tiene el concepto, ni los múltiples significados y usos que pueden tener las letras para los alumnos. (Grupo Azarquiel, 1993).

El uso del simbolismo permite la eliminación de información superflua y da lugar para empezar a generar otros conceptos matemáticos tales como el concepto de función. Precisamente en este ámbito se sitúa el análisis de nuestro trabajo, que investiga de qué manera los estudiantes de la escuela media consiguen relacionar las ecuaciones con las gráficas de las funciones que les dan origen.

Las graficas, funciones, variables y álgebra escolar

En un principio, el concepto de función de otra magnitud fue geométrica y práctica. La ecuación de primer grado con dos incógnitas $ax+by+c=0$ representa a todas las rectas de un plano, dicha ecuación representa a todos los puntos de un plano cuyas coordenadas la satisfacen y únicamente a esos puntos: por eso se dice que es la ecuación de esos lugares geométricos: la recta. Según C. B. Boyer la Geometría

Analítica fue inventada independientemente por dos hombres, ninguno de los cuales era matemático de profesión: Fermat (1601 - 1655) era un abogado profundamente interesado por las obras clásicas de la antigüedad y Descartes (1596 - 1650), era un filósofo que encontró en la Matemática una base del pensamiento racional al tratar de hallar un “método para controlar debidamente la Razon y Verdad en las Ciencias”.

Se dice que Fermat realizó sus trabajos sobre Geometría Analítica en 1629, pero no los comunicó a otras personas hasta 1636, y como se publicaron en 1679 no es posible que influyeran sobre Descartes, cuya Geometría apareció en 1637 como un apéndice de su célebre Discurso del Método.

Por otra parte, Descartes fue capaz de expresar en términos de problemas algebraicos, para los que ya se conocían métodos de resolución, problemas geométricos que se consideraban extraordinariamente complicados. Con ello creó un nuevo campo de la matemática, la geometría analítica.

En los trabajos de Descartes y Fermat se comenzó a consolidar la geometría analítica como un método de expresión de las relaciones numéricas de las dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos, utilizando esencialmente el método de coordenadas.

Uno de los progresos de Descartes es que en una curva, todo punto de la curva queda unívocamente determinado por sus coordenadas x e y; y una ecuación $f(x,y)=0$ entre las coordenadas representa por completo la curva cuando se traduce en una relación la propiedad geométrica que la define, estando representada la relación por la función ***f***, entre las coordenadas x, y, del punto particular – general de la curva.

De esta forma se establece una correspondencia inequívoca entre las curvas planas y las ecuaciones de dos variables x, y: para cada curva hay una ecuación determinada *f(x , y)=0*, y para cada ecuación *f(x , y)=0* hay una curva determinada.

Recíprocamente, se puede hablar en análisis con el lenguaje de la geometría, y esto ha sido una fecunda fuente de progresos en análisis y en física matemática.

Descartes sabía que las letras de sus ecuaciones representaban variables y reconoció claramente la distinción entre variable y constantes arbitrarias, aunque no definió ninguna de ellas explícitamente. Clasificó las curvas algebraicas según sus grados, y reconoció que los puntos de intersección de dos curvas se obtienen resolviendo sus ecuaciones simultáneamente. Esto último presupone lo que en realidad es un progreso de la mayor importancia sobre todos los que habían usado coordenadas con anterioridad: Descartes se dio cuenta de la posibilidad de referir una infinidad de curvas sucedentes a un mismo sistema de coordenadas.

La independencia del álgebra y la geometría (en contra de las ideas de Descartes) se determinó ya a comienzos del siglo XVIII cuando en 1707 vio la luz la "Aritmética Universal" de Newton (1642-1727). En ella el álgebra se exponía en estrecha relación con el desarrollo de los métodos del cálculo, relegando las cuestiones geométricas al dominio de las aplicaciones. La esencia de la obra consiste en reducir cualquier problema a la formación de una ecuación algebraica, cuya raíz es la solución del problema. El libro culmina con los resultados de la teoría general de ecuaciones y además la resolución gráfica de éstas, mediante la construcción geométrica de las raíces.

Dentro de las investigaciones de los últimos veinte años sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra elemental el modelo dominante es que "el álgebra elemental es una especie de aritmética generalizada" (Vergnaud, 1988; Rojano, 1994; Kieran y Filloy, 1989), quedando de lado toda la "utilidad" e interpretación del álgebra que han dado origen a la Geometría Analítica.

Junto con el tratamiento simbólico de las relaciones funcionales, el planteamiento y resolución de sistemas de ecuaciones suele ser el punto de llegada del álgebra escolar. El conocimiento de su manejo permite enfrentarse a una gama más amplia de situaciones, en contextos de todo tipo, relacionados con la vida cotidiana, con aplicaciones de las matemáticas a otros campos de conocimiento, o con el análisis y resolución de problemas planteados desde otras partes de las propias matemáticas. Pero, para que sea efectivo ese aumento en la capacidad de resolver problemas que proporcionan los sistemas, es preciso que el que los utiliza sepa qué es un sistema de ecuaciones y que significa su solución, así como que sea capaz de resolverlos con ciertas garantías de éxito. Además de incluirlos en un proceso de algebrización permanente y en una redefinición de qué debe ser álgebra escolar.

En el estudio sólo se presentan los resultados obtenidos en ciertos ítems de una prueba que evaluó la resolución de diferentes clases de ecuaciones, la relación de la solución analítica con la solución gráfica y la capacidad de verificar el resultado. Frente a los resultados obtenidos en otros trabajos (Elichiribehety 2002; Elichiribehety, Otero y Corica 2003; Elichiribehety, Otero y Fanaro, 2003) nos interesa profundizar sobre la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, ya que se pudo advertir que de todos los tipos de ecuaciones propuestos sólo se obtuvieron resultados satisfactorios para el tipo de ecuaciones con que se va a trabajar. Nos interesa conocer ¿Qué estrategias emplean los sujetos para la resolución de ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales? ¿Son capaces de establecer la relación que existe entre la resolución analítica de una ecuación lineal y sistemas de ecuaciones lineales y su solución gráfica? ¿Demuestran conocimientos sobre la forma de establecer si sus actividades son correctas?

MÉTODO

Se trabajó con sujetos pertenecientes a Octavo y Noveno Año de la Educación General Básica, Primero y Segundo Año Polimodal y Quinto Año (último año del nivel medio en el Sistema Educativo Argentino, antes de la Reforma Educativa). Con este grupo de sujetos se efectuó un estudio transversal. Se diseño una prueba de lápiz y papel para estudiar cómo resolvían distintas clases de ecuaciones y cómo los estudiantes podían reconocer la solución que obtenían o no, en diferentes gráficas que se les proponían.

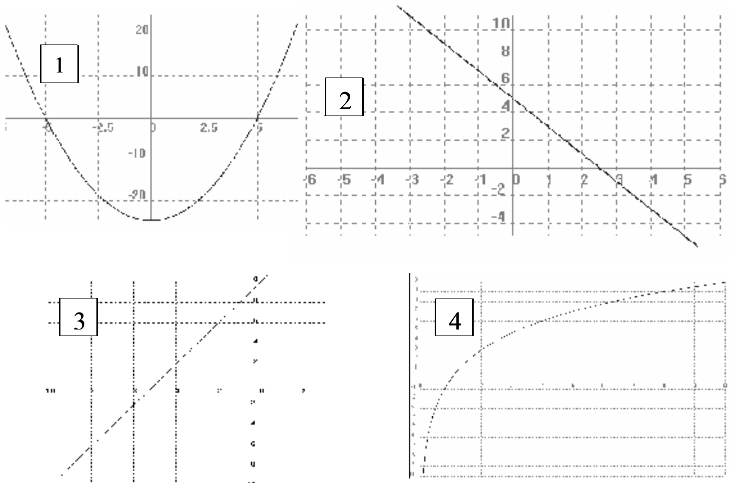
Se constituyó una población efectiva de N = 283 sujetos correspondientes a tres escuelas del radio céntrico de la ciudad de Tandil. Para la selección de las escuelas se tuvo en cuenta que funcionaran en la misma dependencia todos los niveles de escolaridad con que se pretendía trabajar y que los establecimientos tuvieran tradición escolar, fuesen numerosos y abiertos a los diferentes segmentos sociales. Se seleccionaron al azar tres divisiones de cada año y siete sujetos de cada una de ellas sin tener en cuenta su desempeño en Matemática. Se solicitó que realizaran las actividades en forma individual y anónima. En el momento en que se realizó la selección los alumnos estaban cursando el tercer trimestre.

Categorías de análisis, presentación, descripción y discusión de datos.

El análisis que realizamos hace referencia a las producciones que los sujetos (en todos los niveles encuestados) puedan efectuar sobre ecuaciones lineales con una incógnita y sistemas de ecuaciones

A continuación se presenta la Actividad 1, 2 y 3 con la que se evaluó las resoluciones algebraicas de ecuaciones lineales de los sujetos.

ACTIVIDAD 1 Los siguientes gráficos podrían ayudarte a encontrar el conjunto solución de la ecuación: -2x+5= 10



a) ¿Cuál de ellos utilizarías? Justifica tu respuesta.
b) ¿Podrías indicar dónde se encuentra la solución?
c) Resuelve la ecuación empleando el lenguaje algebraico.
d) Verifica el resultado obtenido.

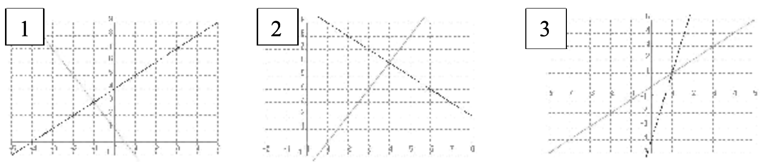
ACTIVIDAD 2

Encuentra el conjunto solución de la siguiente ecuación: $\frac{1}{2}x - 1 = \frac{3}{2}x$.

Verifica el resultado encontrado.

ACTIVIDAD 3:

Cada una de las siguientes gráficas corresponde a uno de los tres sistemas



A $\begin{cases} y - x = 4 \\ -2x + 1 = y \end{cases}$ B $\begin{cases} x - y = 0 \\ 5x - 4 = y \end{cases}$ C $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - 2 = y \end{cases}$

a) Encuentra la solución de cada sistema a partir del gráfico que le corresponda.
b) Relaciona cada una de las ecuaciones en A, B y C con la recta que le corresponda. c) Resuelve el sistema B empleando el lenguaje algebraico. d) Verifica el resultado encontrado en (c).

Las dos primeras actividades que se proponen corresponden a ecuaciones lineales con una incógnita, en la primera de ellas se propone una ecuación lineal con coeficientes enteros, mientras que la segunda se la propone con coeficientes fraccionarios.

En la primera de las actividades se requiere una interpretación gráfica de la ecuación, resolución algebraica y verificación, mientras que en la segunda solo se requiere una resolución algebraica de la ecuación y la verificación de la misma.
Esta segunda actividad serviría para diferenciar hasta que punto, la interpretación gráfica de una ecuación es desconocida por los sujetos, lo cual entorpecería obtener mejores resultados en la Actividad 1 que en la 2.

La Actividad 3 pretendía medir por un lado la relación entre los gráficos y los sistemas de ecuaciones y por otro, si se encuentra la solución a partir del gráfico. También, describe las respuestas de los sujetos en la resolución algebraica y verificación de sistemas de ecuaciones lineales.

La necesidad de una interpretación gráfica de las ecuaciones permitiría en la resolución de ecuaciones una desvalorización de la consideración de las letras de una ecuación como incógnitas y una revalorización de las mismas como variables, de esta forma se podría lograr una clara distinción entre variable y constante arbitraria y evitando que el álgebra elemental se transforme en una especie de "aritmética generalizada", propiciando de esta forma la vinculación del álgebra con el concepto de función permitiendo que el sujeto se enfrente a una gama más amplia de situaciones y permita el aprendizaje y resolución de problemas planteados desde otras partes de las propias matemáticas.

Los aspectos que resultaron de nuestro interés para la resolución de las actividades fueron: *Resolución algebraica de ecuaciones, Relación con las gráficas y verificación de resultados.*

A continuación se presenta las categorías y subcategorías que se definieron para describir el análisis

Cuadro 1. Categorías y subcategorías para el análisis

Actividad	Categoría	Subcategoría
Actividad 1	Resolución algebraica (**RA**)	- Resolución correcta (**RAC**) - Resolución incorrecta (**RI**) - No resuelve la ecuación (**NC**)
	Formas de abordar la resolución algebraica(**FARA**)	- Explicita operaciones a ambos miembros de la igualdad. (**EOAMI**) - No explicita operaciones a ambos miembros de la igualdad. (**NEOAMI**)
	Errores en la resolución algebraica (**ERA**)	- No resuelve la ecuación (**NC**) - Inverso multiplicativo (**IM**) - Inverso aditivo (**IA**)
	Resolución gráfica (**RG**)	- Resolución correcta (**RGC**) - Resolución incorrecta (**RGI**) - No resuelve la ecuación (**NCG**)
	Verificación (**V**)	- Verifica correctamente (**VC**) - Verifica incorrectamente (**VI**) - No verifica (**NV**)
Actividad 2	Resolución algebraica (**RG**)	- Resolución correcta - Resolución incorrecta - No resuelve la ecuación
	Formas de abordar la resolución algebraica (**RARA**)	- Explicita operaciones a ambos miembros de la igualdad. - No explicita operaciones a ambos miembros de la igualdad.
	Errores en la resolución algebraica (**ERA**)	- No resuelve la ecuación - Inverso multiplicativo - Inverso aditivo
	Verificación (**V**)	- Verifica correctamente - Verifica incorrectamente - No verifica
Actividad 3	Resolución algebraica (**RA**)	- Resolución correcta (**RAC**) - Resolución incorrecta (**RGI**) - No resuelve la ecuación (**NC**)
	Resolución gráfica (**RG**)	- Resolución correcta (**RGC**) - Resolución incorrecta (**RGI**) - No resuelve la ecuación (**NRG**)
	Verificación (**V**)	- Verifica correctamente (**VC**) - Verifica incorrectam ente (**VI**) - No verifica (**NV**)

RESULTADOS

Resolución de ecuaciones lineales

El análisis global sobre la resolución algebraica efectuada a la Actividad 1 por los sujetos encuestados arrojó los siguientes resultados: el 39% de los sujetos encuestados han resuelto correctamente la actividad, el 16% ha intentado resolverla, pero lo ha hecho incorrectamente y el 45% no ha dado respuesta a la consigna.

El Gráfico 1 describe los resultados obtenidos, para cada año escolar, respecto a la categoría Resolución algebraica de la ecuación de la Actividad 1

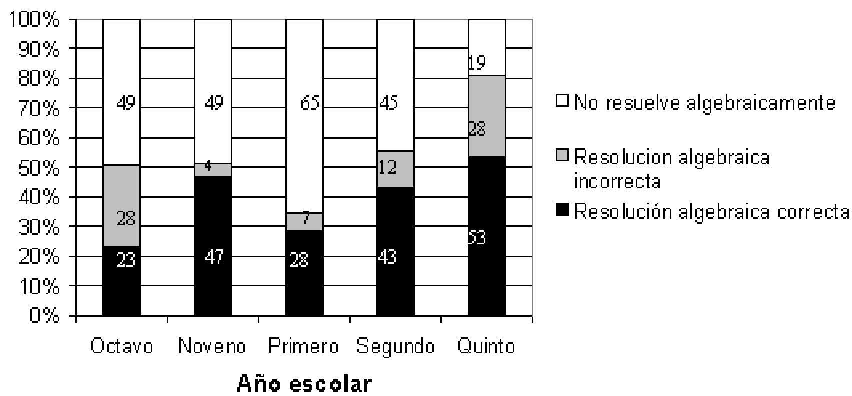


Gráfico 1. Resolución algebraica de la actividad 1(N=283)

En el Gráfico 1 se puede observar que hasta Segundo Año existe un alto porcentaje de sujetos que no han abordado la resolución algebraica de la ecuación, situación que se revierte en Quinto Año.

Con respecto a la subcategoría Resolución Algebraica Correcta (RAC), no se advierte una evolución favorable a lo largo de la escolaridad. A partir del Gráfico 1, se advierte que el porcentaje más bajo se registra en Primer Año, mientras que, el mayor porcentaje de sujetos que ha realizado una resolución algebraica correcta corresponde a Quinto año como era de esperarse.

A partir del análisis efectuado a la Actividad 2 sobre la categoría resolución algebraicamente de la ecuación se han obtenido como resultado global que el 54% de los sujetos encuestados ha resuelto algebraicamente la ecuación correctamente, el 25% lo ha hecho incorrectamente y el 21% no ha dado respuesta a la consigna.
El Gráfico 2 muestra los resultados obtenidos para cada año escolar:

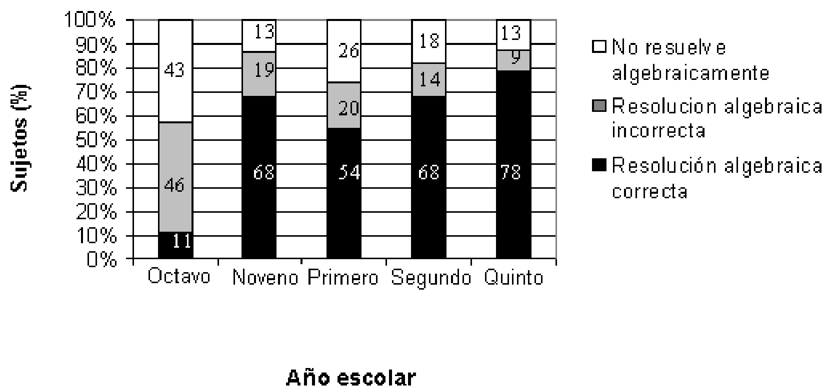


Grafico 2. Resolución algebraica de la actividad 2 (N=283)

Como se puede observar en el Gráfico 2, se advierte la paridad de resultados entre Noveno Año de la E.G.B y Segundo Año Polimodal. Si se comparan los resultados obtenidos en el Gráfico 1 con el Gráfico2, se observa que, a excepción de Octavo año, se han obtenido mejores resultados para la Actividad 2 que para la Actividad 1.

Para responder las cuestiones planteadas en este estudio transversal, se analizaron las formas de abordar la solución algebraica tanto para la Actividad 1 como para la Actividad 2. En el Gráfico 3 se describen los resultados obtenidos para cada año escolar sobre las distintas formas que los sujetos han abordado la resolución algebraica de la ecuación.

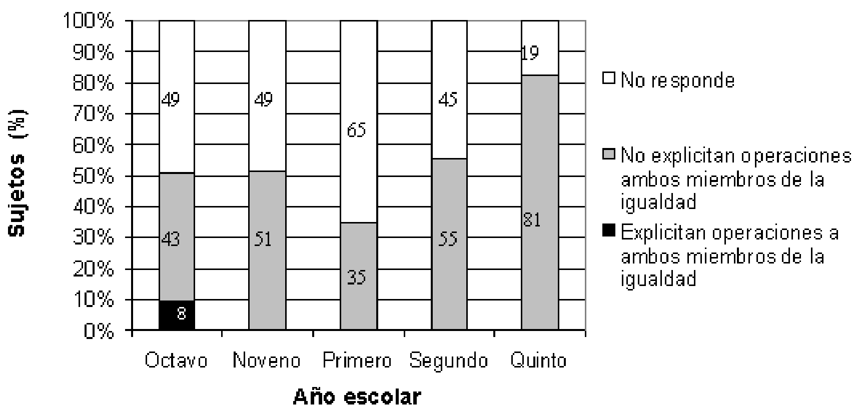


Grafico 3. Formas de abordar la Solución de la Actividad 1(N=283)

A excepción de Octavo Año, en los restantes años escolares las resoluciones algebraicas que se presentan no se hallan explícitas en ellas las operaciones a ambos miembros de la igualdad. No se cuenta con herramientas suficientes como para poder asegurar si los alumnos que han podido realizar una resolución algebraica correcta de este tipo, por simplificar sus actividades, obvian pasos y no explicitan las operaciones a ambos miembros de la igualdad, o bien, desconocen operar aplicando propiedades.

Se puede advertir que solo en Octavo año, un bajo porcentaje de sujetos ha intentado resolver la ecuación explicitando la realización de operaciones a ambos miembros de la igualdad, tal vez esto se deba a que en este año escolar se comienza con la enseñanza de resolución algebraica de ecuaciones lineales. Cabe recordar que en la mayoría de los casos sólo se ha observado que se realiza esta tarea para el inverso aditivo pero no para el inverso multiplicativo.

En el Gráfico 4 se muestran los resultados obtenidos para la Actividad 2, sobre las distintas formas de abordar la solución de la ecuación que han optado los sujetos de cada año escolar.

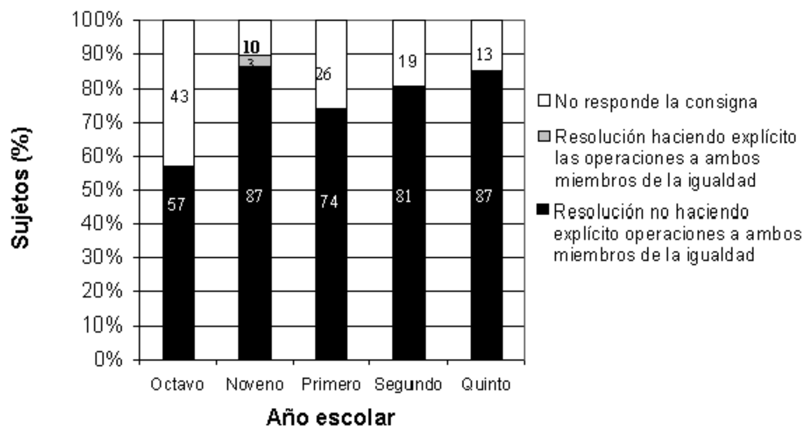


Grafico 4. Formas de abordar la Resolución Algebraica de la Actividad 2 (N=283)

A partir del Gráfico 4 se puede advertir que en todos los años escolares, la mayoría de los sujetos han optado por resolver la ecuación algebraicamente ignorando expresar las operaciones a ambos miembros de la igualdad. Sólo en Noveno Año se registra un muy bajo porcentaje de sujetos que ha optado por trabajar la ecuación haciendo explícito en la resolución, multiplicar ambos miembros de la expresión. Cabe destacar que sólo se observa esta actividad para el inverso multiplicativo pero no para el inverso aditivo.

Si se comparan los resultados obtenidos para la categoría Resolución Algebraica (RA) de la Actividad 1 y 2 (ver Gráfico 1 y 2) se puede apreciar que los resultados obtenidos en la subcategoría Resolución Algebraica Correcta (RAC), a excepción de Octavo Año, el porcentaje de alumnos es notablemente menor a los que han efectuado la resolución algebraica correcta de la Actividad 2 a pesar de que la resolución algebraica de esta última es más compleja que la resolución algebraica de la Actividad 1, lo cual puede deberse a lo que suponíamos en un principio, el requisito de la interpretación gráfica de la solución de la ecuación en la Actividad 1. Este requisito parecería haber generado una complejidad adicional a los estudiantes que no estarían familiarizados con la relación entre gráficos y ecuaciones. Esto indicaría la pobreza de marcos representacionales de los que los estudiantes disponen, quizás, porque estos no se utilizan durante la instrucción.

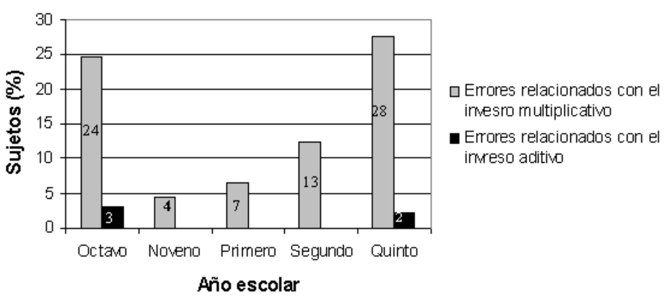


Grafico 5. Errores Relacionados con la Resolución Algebraica de la Actividad 1 (N=283)

Frente a los resultados obtenidos se consideró pertinente estudiar los tipos de errores que presentan los sujetos al tratar de resolver las ecuaciones propuestas. En el Gráfico 5 se presentan los resultados obtenidos de la Actividad 1 para cada año escolar y en el Gráfico 6 se describen los resultados obtenidos de la Actividad 2 para cada año escolar.

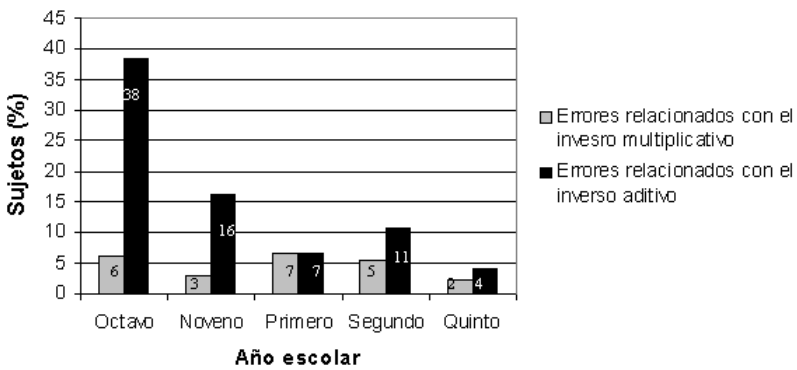


Grafico 6 Errores relacionados con la resolución algebraica de la actividad 2 (N=283)

Con respecto a la Actividad 1, el error que prevalece en la resolución algebraica de la ecuación, en todos los años escolares, se encuentra relacionada con el inverso multiplicativo, mientras que para la Actividad 2 el error que prevalece en las resoluciones algebraicas esta relacionado con el inverso aditivo (a excepción de Primer Año que el porcentaje de los tipos de errores hallados son iguales)

Posibles causas por las que se presentan estas diferencias de errores en las dos primeras actividades

Una resolución algebraica correcta de la Actividad 1 puede ser la siguiente:

$$
\begin{aligned}
-2x+5&=10\\
-2x+5-5&=10-5\\
-2x&=5\\
-2x:(-2)&=5:(-2)\\
x&=-2{,}5
\end{aligned}
$$

En esta instancia de la resolución es donde se puede presentar mayor dificultad

Una resolución algebraica correcta para la Actividad 2 puede ser:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}x-1&=\frac{3}{2}x+4\\
\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}x-1&=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}x+4\\
-\frac{2}{2}x-1+1&=4+1\\
-\frac{2}{2}x&=5\\
-x&=5\\
x&=5:(-1)\\
x&=-5
\end{aligned}
$$

En este momento se puede dar la respuesta de la solución y no seguir operando mientras que la actividad 1 exige seguir operando para dar la respuesta

Si se comparan las dos resoluciones, en la Actividad 1 es necesario tener conocimiento del inverso multiplicativo para operar correctamente y obtener la solución de la ecuación, en cambio para la resolución de la Actividad 2, esta exigencia no es tan importante como lo es para la 1, ya que el resultado se puede obtener obviando el procedimiento con el inverso multiplicativo.

Con relación a los errores en el inverso aditivo, se observan mayores inconvenientes en la Actividad 2 que en la Actividad 1. Pareciera que esta dificultad se debe a que no sólo se corresponde buscar el inverso aditivo de números sino que también se deben buscar expresiones algebraicas opuestas.

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Del análisis de las resoluciones algebraicas efectuadas por los sujetos a la Actividad 3 se han encontrado resoluciones donde los sujetos efectuaban la resolución algebraica de 1, 2 ó 3 sistemas (recordemos que sólo se requería una resolución algebraica para el sistema 2). Frente a esta situación, se consideró como resolución algebraica correcta de un sistema de ecuaciones lineales si el sujeto, de todas sus resoluciones, lograba hacer una correctamente de cualquiera de los sistemas propuestos.

Se consideró como resolución algebraica incorrecta a todas aquellas resoluciones en las que el sujeto presentaba en su resolución problemas relacionados con las operaciones o bien, operaba correctamente pero no explicitaba la solución. A partir de nuestro análisis, se obtuvieron los siguientes resultados de manera global: el 81% no ha resuelto el sistema de ecuaciones, el 12% ha realizado intentos de resolución algebraica pero han sido erróneos y el 7% ha realizado una resolución algebraica correcta.

A continuación se presenta el Gráfico 7 que describe los resultados obtenidos para cada año escolar.

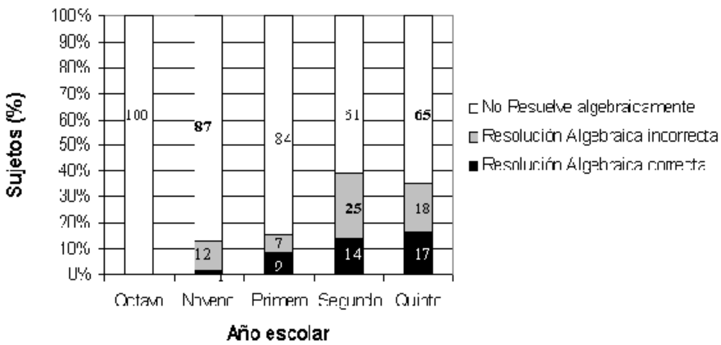


Grafico 7 Resolución algebraica de la actividad 3 (N=283)

En el Gráfico se observan intentos de resolución a partir de Noveno año. Cabe recordar que en Octavo año no se registraron intentos de resolución algebraica porque, según el curriculum, estos contenidos no se trabajan en el mencionado año, sino que se lo realiza a partir de Noveno año.

Frente al insignificante porcentaje de sujetos de cada año escolar que ha realizado una resolución algebraica correcta, se observa que las resoluciones algebraicas correctas evolucionan favorablemente de un año a otro, pero dicho resultado no es significativo.

Los resultados obtenidos para la Actividad 3 son previsibles, ya que el tipo de resolución que involucra esta actividad es más complejo que el de las actividades anteriores. Con lo cual, si no se obtienen buenos resultados para la Actividad 1, menos aun podemos pretenderlo para la Actividad 3.

Verificación de ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales

Con respecto a la categoría Verificación (V) de la resolución algebraica de la ecuación de la Actividad 1, de todos los sujetos encuestados un muy bajo porcentaje ha podido realizar correctamente la misma. Para la subcategoría Verifica Correctamente (VC) sólo el 10% de los sujetos lo ha hecho afirmativamente. El 9% Verificar Incorrectamente (VI). Mientras que, el 81% no ha dado respuesta.

A continuación se describen los resultados de la categoría Verificación (V), para cada año escolar.

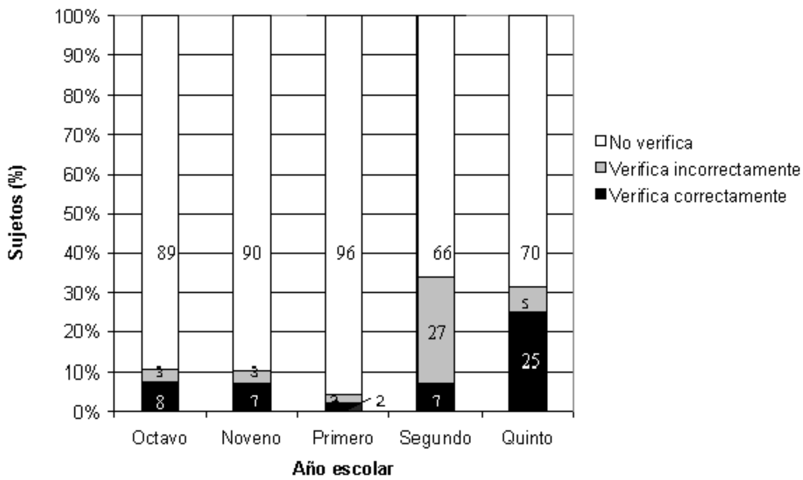


Grafico 8. Verificación de la resolucion algebraica de la actividad 1 (N=283)

Observando el Gráfico 8 se puede advertir que a lo largo de la escolaridad los sujetos han intentado verificar la resolución algebraica de la ecuación, aunque debe destacarse que son pocos los sujetos que han dado respuesta a la consigna, es notablemente menor a los que no lo han hecho. En todos los años escolares se registran intentos de verificación incorrectos, los cuales se deben a cálculos erróneos al realizar la verificación o por la mala resolución de la ecuación, pero en ambos casos no se ha observado ningún alumno que indique que como la verificación no es correcta haya un error en sus resoluciones. Siguen tomando el valor arribado en la resolución algebraica como correcto.

Si se comparan los resultados obtenidos con relación a la resolución algebraica correcta (ver Gráfico 1) y la verificación correcta de la resolución algebraica (ver Gráfico 8) se puede advertir que en todos los años escolares el porcentaje de sujetos que han realizado la resolución algebraica correcta es considerablemente mayor a los que han realizado la verificación correcta de la misma. La ausencia de verificación se encuentra relacionado con el hecho de que el tratamiento del álgebra escolar reduce la resolución de ecuaciones a la obtención de un único resultado numérico.

Con relación a la categoría Verificación (V) de la Actividad 2, se registraron globalmente los siguientes resultados: el 25% de los sujetos encuestados ha verificado la ecuación correctamente, el 8% lo ha hecho incorrectamente y el 67% no ha dado respuesta alguna.

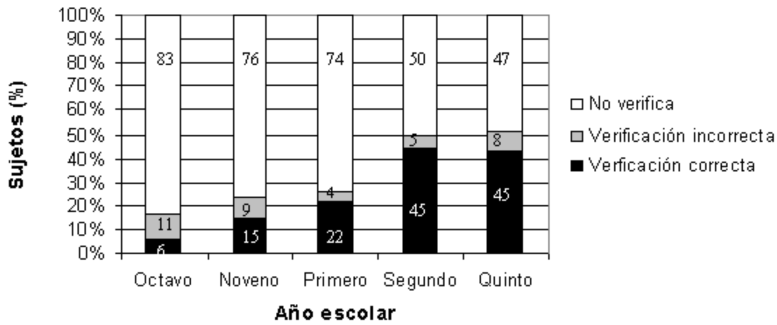


Grafico 9. Verificación de la resolución algebraica de la actividad 2 (N=283)

El Gráfico 9 describe el porcentaje de sujetos de cada año escolar que ha realizado la verificación de la resolución algebraica de la Actividad 2. Se puede advertir una evolución favorable en cuanto a la realización de la verificación correcta desde Octavo a Quinto Año. Si se comparan los resultados obtenidos en cuanto a la verificación de las ecuaciones, se advierte una notable mejoría de la Actividad 2 con relación a la Actividad 1.

En la verificación de la Actividad 3 se observaron resoluciones donde los sujetos no lo hacían para el sistema requerido sino que lo hacían para otro, entonces, frente a esta situación, se consideró como verificación correcta cuando se presentaba la del sistema requerido o de todas las que se presentaban, había una correcta. Sobre la base de esto, se obtuvieron los siguientes resultados globales: sólo el 3% de los sujetos encuestados ha realizado la verificación correctamente. El 3% lo ha intentado pero erróneamente y el 94% no ha dado respuesta a la consigna. Las verificaciones correctas como así los intentos erróneos se registran a partir de Noveno año.

Interpretación gráfica de la solución de ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales

Con respecto a la consigna de encontrar la solución gráficamente en la Actividad 1, del total de sujetos encuestados, se ha registrado que sólo el 8% ha podido efectuar la resolución gráfica de la ecuación correctamente, mientras que el 5% lo ha hecho erróneamente y el 87% no ha dado respuesta a la consigna.

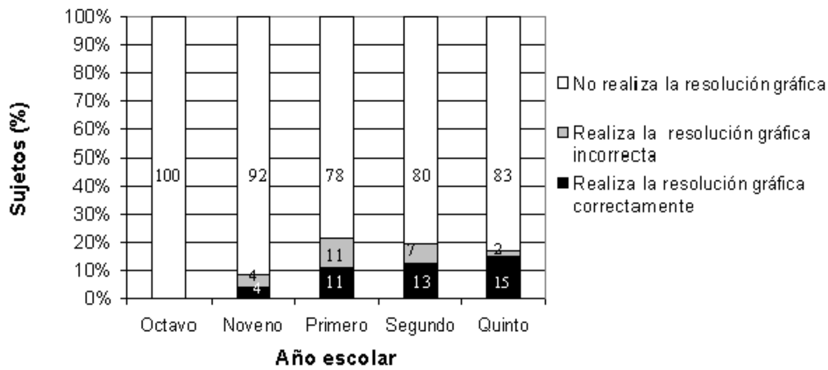


Grafico 10. Resolución Gráfica de la actividad 1(N=283)

El gráfico 10 describe los resultados obtenidos para cada año escolar. Se observa que son muy pocos los sujetos que encuentran la solución a través del gráfico. A pesar de que en Octavo Año el Programa indica el trabajo con funciones lineales, en este grupo de sujetos no se ha advertido ningún intento por darle solución a la ecuación. A pesar de la simplicidad de la ecuación propuesta, los resultados indicarían que es elevado el número de sujetos que no responden. Es posible que una causa agravante del bajo rendimiento, se relacione con el hecho de que se está solicitando realizar algo que los alumnos nunca hicieron, como por ejemplo, encontrar la solución de una ecuación a partir de un gráfico. Este requerimiento parecería haber generado una complejidad adicional a los estudiantes que no estarían familiarizados con la relación entre gráficos y ecuaciones. Se puede observar que la resolución gráfica evoluciona favorablemente desde Noveno a Quinto Año, pero este avance no es significativo.

Si se comparan los resultados obtenidos en la resolución algebraica correcta (ver Gráfico 1) con los resultados logrados en la obtención de la solución a partir del gráfico (ver Gráfico 10), se puede apreciar el bajo rendimiento de este ultimo a lo largo de toda la escolaridad, con respecto a la resolución algebraica correcta.

En relación a la resolución gráfica de los sistemas de ecuaciones lineales se ha considerado como resolución gráfica correcta si el sujeto era capaz de al menos dar los valores de las variables correctos para uno de los gráficos. Se consideró como resolución gráfica incorrecta a la ubicación de puntos erróneas o bien faltante de la solución de una de las coordenadas. Del análisis global sólo el 1% de los sujetos encuestados ha realizado la consigan correctamente, el 8% ha dado respuestas incorrectas y el 91% no ha dado respuesta a la cuestión.

A partir de los resultados obtenidos, se puede advertir que la interpretación gráfica correcta de la ecuación de la Actividad 1 la han podido realizar un muy bajo porcentaje de sujetos, y este porcentaje es aun menor para la Actividad 3. No se puede pretende obtener mejores resultados para la última actividad ya que si el sujeto no lo sabe hacer para una ecuación lineal con una incógnita menos aun lo podemos esperar para un sistemas de ecuaciones.

Con estos resultados parecería que los estudiantes poseen la idea de que resolver una ecuación consiste en determinar un valor que la satisfaga y nada más, quedando a un lado estudiar no sólo como dependen las variables “desconocidas” de las “conocidas”, sino también cómo dependen las variables “conocidas” de las “desconocidas”.

En todas las actividades, para todas las consignas presentes en ellas, se observa que el rendimiento disminuye de Noveno a Primero y aumenta en Segundo Año, lo cual puede deberse a que es el momento de cambio de nivel escolar, de Tercer Ciclo de EGB a Polimodal.

CONCLUSIONES

Los datos indican que los sujetos encuestados pueden manipular formalmente una ecuación lineal con una incógnita, pero poseen dificultades para relacionar la gráfica con la ecuación, sin distinción del año escolar al que pertenezcan. Además esto permite inferir que los sujetos no conciben una ecuación lineal con dos variables como una estructura que define un conjunto infinito de pares de números, ni que un valor específico de una de las variables, determina el valor de la otra variable. Posiblemente el trabajo realizado alrededor de la "ecuación de la recta", parece no ser suficiente para que los alumnos puedan establecer una relación entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación correspondiente.

Los resultados son coherentes con lo señalado por Gascón (1999) acerca del hecho de que en la enseñanza de la matemática escolar se da gran importancia a la manipulación puramente formal de las expresiones algebraicas, lo cual no parece precisar de ningún tipo de "justificación" ni "demostración" algebraica y provoca la separación entre los usos de las fórmulas y del lenguaje funcional. Estas tendencias son dificultades que no sólo no favorecen sino que impiden la necesaria algebrización de la actividad matemática escolar y señalan la necesidad de la modificación de las prácticas didácticas y de las concepciones docentes que les dan origen.

REFERENCIAS

Bell E. (1995). *Historia de las Matemáticas.* Ed Fondo de Cultura Económica. México

Bolea P., Bosch M., Gascón J. (1995). *La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad*. Recherches en Didactique des Mathèmatiques. Ed La Penseè Sauvage. Vol 21 (3) pp. 247 - 304

Boyer C. (1994). *Historia de la Matemática.* Ed Alianza Universidad Textos. Madrid. España

Chevallard (1999). *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico.* Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 19 (2) pp. 221-266

Elichiribehety, I.; Otero, M.; Corica A. (2003) *¿Cómo resuelven ecuaciones los estudiantes de la educación media?: un estudio transversal* V Simposio Internacional de Educación Matemática. I.S.B.N. Nº 987-20239-1-3. U.N.L. Argentina

Elichiribehety, I.; Otero, M. (2002) *La Relación entre los Marcos de Resolución y los Modelos Mentales en la Enseñanza del Álgebra*. En prensa. Revista de Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamericana

Elichiribehety, I.; Otero, M.; Fanaro, M (2002) *Los Modelos Mentales que subyacen a la resolución de problemas algebraicos: un estudio transversal*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. V5 (2) pp.169-198

Elichiribehety, I. (2002). Tesis de Maestría en Educación, orientación Psicología de la Educación:"Génesis escolar de formulaciones algebraicas y modelos mentales: Un estudio cognitivo" Director: Prof. Dra. María Rita Otero. Facultad de Ciencias Humanas UNCP-BA en convenio con la Universidad Estadual de Campinas (UNICAMP-Brasil)

Gascón, Joseph (1999); *La naturaleza prealgebráica de la matamática escolar.* Educación Matemática. Vol 11 nº 1 pag 77 – 88. Grupo Editorial Iberoamericana

Grupo Azarquiel (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Ed SINTESIS

Kieran, C. Y Filloy Yague, E.(1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica*. Enseñanza de las Ciencias, 7(3) pp 229 – 240

Mec Gregor M., Stacey K. (2002); *Incógnitas con valores cambiantes y múltiples referentes en el álgebra de alumnos*. Revista Educación Matemática. Vol 12 nº3

Otero, M. R. (1998) Buscando Modelos Mentales. Disertación de Maestría. Facultad de Ciencias Humanas. UNICEN - UNICAMP

Rojano, T. (1994). *La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de Investigación y Enseñanza*. Enseñanza de las Ciencias 12 (1) pp. 45 – 56

Vergnaud, G. (1988). *Long terme et court terme dans l´ algèbre,* in Laborde, C (ed) Actes du premier colloque frnaco-allemand de didactique, pp. 189-199. La Pensèe Sauvage-Èditions