

## La modelación matemática y los problemas de aplicación como promotores de la creatividad en la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría

Mathematical modeling and application problems as promoters of creativity in the teaching and learning of trigonometry

Modélisation mathématique et des problèmes de mise en œuvre en tant que promoteurs de la créativité dans l'enseignement et l'apprentissage trigonométrie

**Wilmer Jesús Méndez Burguillos** <sup>(1)</sup>

wilmermendez@gmail.com

**Sandra Virginia Leal Huise** <sup>(2)</sup>

sleal@usb.ve

<sup>(1)</sup> Universidad Politécnica Territorial de los Altos Mirandinos "Cecilio Acosta". Venezuela

<sup>(2)</sup> Universidad Simón Bolívar. Venezuela

Artículo recibido en mayo 2017 y publicado en mayo de 2018

### RESUMEN

*La estrategia que introduce la Trigonometría en el cuarto año de Educación Media General consiste en la solución de triángulos rectángulos, pero los problemas de aplicación asociados a ellos, al representar situaciones ficticias y no vinculadas al contexto real, no suscitan la participación del estudiante. Investigación cualitativa (investigación-acción participativa) cuyo propósito fue comprobar y valorar el impacto de la resolución de problemas en el aprendizaje de la Matemática al vincularse con la Trigonometría y al sustentarse en la modelación, la creatividad y las aplicaciones de la Matemática en el contexto real del estudiante. Se diseñaron y desarrollaron durante un trimestre escolar, un conjunto de estrategias que, orientadas por el docente-investigador del curso, permitieron a los estudiantes extraer de su ambiente escolar los elementos relevantes para comprender la esencia de la Trigonometría y con ello, participar de su propio aprendizaje y potenciar su creatividad.*

**Palabras clave:** Resolución de Problemas; Modelación Matemática; Aplicaciones de la Matemática; Creatividad; Trigonometría

## **ABSTRACT**

*The strategy introduced by Trigonometry in the fourth year of high school consists of the solution of rectangular triangles, but the application problems associated with them, when representing fictitious situations and not linked to the real context, do not provoke student participation. For this reason, a qualitative research was developed (participatory action research) whose purpose was to verify and evaluate the impact of problem solving in the learning of Mathematics by linking with Trigonometry and based on modeling, creativity and applications of Mathematics in the student's real context. A set of strategies were designed and developed during a school term that, guided by the teacher-researcher of the course, allowed the students to extract from their school environment the relevant elements to understand the essence of Trigonometry and with it, to participate in their learning and boost their creativity.*

**Key words:** *Problem solving; Mathematical modeling; Applications of Mathematics; Creativity; Trigonometry*

## **RÉSUMÉ**

*La stratégie présente trigonométrie dans la quatrième année de l'enseignement secondaire général consiste à résoudre des triangles rectangles, mais des problèmes de mise en œuvre qui leur sont associés, représentant fictifs et sans rapport avec les situations de contexte réel, ne pas augmenter la participation des étudiants. Pour cette raison, la recherche qualitative (recherche-action participative) dont le but était de tester et d'évaluer l'impact de la résolution de problèmes dans l'apprentissage des mathématiques en liant avec la trigonométrie et de soutien dans la modélisation, la créativité et les applications sont développées des mathématiques dans le contexte réel de l'étudiant. Ils ont été conçus et développés pour une période scolaire, un ensemble de stratégies, guidée par le cours-enseignant chercheur a permis aux élèves de tirer de leur milieu scolaire éléments pertinents pour comprendre l'essence de la trigonométrie et de participer ainsi à sa apprentissage et améliorer leur créativité.*

**Mots-clés:** *Résolution de problèmes; Modélisation mathématique; Applications des mathématiques; la créativité; Trigonométrie*

## **INTRODUCCIÓN**

En este artículo se integran: el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática, el estudio de la Trigonometría a nivel de bachillerato, el proceso de resolución de problemas, la estrategia de modelación matemática y el desarrollo de la creatividad. Esta amplia temática, además de representar los referentes teóricos de la investigación-acción que se reporta, constituye la fundamentación de las actividades diseñadas y desarrolladas con un grupo de estudiantes de cuarto año de Educación Media General (EMG), en una unidad educativa nacional ubicada en el estado Miranda (Venezuela), durante el año escolar 2010-2011.

Se presenta un análisis de la ejecución de la acción, del desempeño de los estudiantes y de las entrevistas realizadas a ellos, lo cual arroja como resultado una categoría central y seis categorías (con sus respectivas sub-categorías) que emergieron de la investigación. Finalmente, se plantean a modo de conclusión algunas sugerencias que se esperan contribuyan a potenciar la creatividad en el estudiante, a través de la resolución de problemas a la luz de la modelación Matemática.

En Venezuela, la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, en los niveles de educación primaria y secundaria, se ha enfocado en la repetición y la memorización de reglas y algoritmos durante el desarrollo de las clases, dejando de lado procesos y herramientas que induzcan al razonamiento de los estudiantes (Londoño, 1997; Terán y Pachano, 2005). A pesar de que la Matemática está presente en todos los niveles de la escolaridad obligatoria, los estudiantes no logran superar el analfabetismo numérico y no desarrollan habilidades que les permita desenvolverse en una sociedad cada vez más sumergida en una cultura Matemática traducida en uso de tecnología y avances científicos (González, 1997).

Proyectando esta situación a un contexto escolar específico (unidad educativa nacional ubicada en el estado Miranda, donde se desarrolla la investigación que aquí se reporta), todos los profesores de matemática afirman que la actividad que ellos más desarrollan en sus clases es la

exposición, de manera que el uso del libro de texto y la repetición de algoritmos conducen los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Esta metodología de trabajo es común para todos los contenidos, aún para aquellos donde pueda utilizarse gráficos, modelos y representaciones geométricas, como es el caso de la Trigonometría.

Etimológicamente el término “Trigonometría” significa medida de triángulos y representa la rama de la Matemática que estudia la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo. Para Flores (2008), la Trigonometría resulta de particular interés porque permite abordar las aplicaciones de la Matemática en el mundo real, a través de su uso en situaciones y problemas de la realidad asociados a la construcción, la navegación y el cálculo de distancias inaccesibles.

Es por esto que Vílchez (2005), fundamentado en los aportes del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), sugiere que en el currículo de Matemática, a niveles básicos, debe estar presente el estudio de la Trigonometría tratada bajo dos concepciones: una, relacionada con la resolución de problemas donde intervengan triángulos; otra, como medio para interpretar situaciones de fenómenos periódicos reales a través de las funciones seno y coseno.

Bajo esta premisa, Usiskin citado por Piñeiro, Jalón y Ortega (1998), plantea que la enseñanza de la Geometría y la Trigonometría deben considerarse unidas por naturaleza y propone trabajar cuatro dimensiones:

- visualización, dibujo y construcción de figuras;
- estudio de aspectos espaciales del mundo físico;
- uso de algún medio para representar los conceptos matemáticos no visuales y sus relaciones;
- representación como un sistema matemático formal.

Por otra parte, Flores (ob.cit.) sostiene que la Trigonometría induce al estudiante a desarrollar competencias que están relacionadas con: (1) describir e interpretar hechos asociados a la realidad; (2) valorar la cultura y el arte a través de pinturas, esculturas, edificaciones y obras arquitectónicas que están construidas basadas en nociones trigonométricas; (3) formular

y expresar ideas, de forma oral y escrita, a través del uso de términos y conceptos propios de la Trigonometría; (4) incorporar, como recursos de aprendizaje, los avances tecnológicos (programas informáticos y calculadoras científicas, principalmente).

En Venezuela, la Trigonometría es tema fundamental en el cuarto año de EMG y a pesar de abarcar varios contenidos específicos en el programa de estudio de este año, la concepción de esta temática por parte de docentes y estudiantes pareciera estar limitada a las razones trigonométricas.

En este sentido Torres (2002), tras analizar diversas fuentes (programas de estudios, libros de texto, entrevistas a docentes, cuadernos de estudiantes, pruebas de cursos propedéuticos), concluye que: (1) la enseñanza de la Trigonometría se centra en el empleo de algoritmos y no se incorporan elementos relacionados con la realidad o la historia de este tema; (2) a pesar de que, tanto programas y libros de texto, presentan el estudio de las funciones trigonométricas, en las actividades de aula no se trabaja este contenido; (3) los estudiantes presentan notables dificultades para relacionar la Trigonometría con la resolución de problemas; (4) las escasas aplicaciones de la Trigonometría están vinculadas con la medida (altura) de edificios y monumentos.

Las deficiencias anteriores se proyectan para la prosecución de estudios en carreras técnicas y universitarias, en las cuales la Matemática y, en particular, la Trigonometría son importantes como ingeniería, electricidad, construcción civil, astronomía, entre otras (Torres, 2010).

Por otra parte, Biembengut y Hein (2004) plantean que las constantes transformaciones en la sociedad contemporánea exigen el conocimiento a profundidad sobre distintos tópicos con el fin de transmitirlos, aplicarlos y así atender situaciones relacionadas con el entorno social. Esta idea permite considerar la modelación matemática como un método de enseñanza que permite generar un modelo matemático, definido éste como un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representan

un fenómeno real o situación problema; este modelo se puede expresar a través de fórmulas o expresiones numéricas, gráficos o formas geométricas, ecuaciones algebraicas, programas computacionales, entre otros (Biembengut y Hein, s. f.).

La finalidad del modelo no sólo es dar solución a un problema de Matemática en particular, sino también servir de aplicación a áreas conexas; según Mora (2001) el problema a abordar, a primera vista, pareciera no tener relación con la Matemática, pero a través de la modelación se convierte en un problema matemático, de modo que las actividades generadas por la elaboración del modelo están relacionadas con contenidos matemáticos necesarios para la resolución de la situación problemática.

Para desarrollar la modelación matemática, Bienbemgut y Hein (ob.cit.) sugieren tomar en cuenta los siguientes aspectos: (1) elección de un tema, por parte del estudiante y/o el profesor, el cual se quiera estudiar para dar respuestas a preguntas, resolver o inferir situaciones que despierten su interés; (2) investigación sobre el tema y las herramientas matemáticas que puedan manejarse y que permitirán dar respuestas a las preguntas que se generen; (3) diseño de un modelo siguiendo las orientaciones del profesor.

Bajo estas consideraciones el estudiante es responsable de su aprendizaje, toda vez que se involucra activamente en la comprensión de la Matemática y su aplicación a otras áreas, construye conocimientos que tienen algún significado para él y se despierta su sentido crítico y creativo.

Según estos autores, con la aplicación de la modelación matemática, se logra: (a) incrementar el interés por la Matemática debido a su aplicabilidad; (b) mejorar la aprehensión de conceptos matemáticos; (c) incrementar la capacidad para leer, interpretar, formular y resolver situaciones-problemas; (d) incrementar la habilidad en el uso de la tecnología; (e) crear relaciones grupales; (f) estimular la creatividad en la formulación y la resolución de problemas.

En cuanto a la resolución de problemas, ella es de suma importancia en el hecho educativo ya que permite involucrar al estudiante en un aprendizaje activo, desarrolla su razonamiento y activa su creatividad. Respecto a la Matemática, la resolución de problemas permite emular el trabajo de un matemático y apreciar la utilidad de esta área en variados contextos de la vida cotidiana (González, ob.cit.; Mancera, 2000). Así mismo, una de las mejores prácticas para la enseñanza de la Matemática consiste en inducir a los estudiantes a plantear y resolver problemas relacionados con el contexto donde ellos se desenvuelven, para que puedan apreciar las estructuras matemáticas en los aspectos de sus vidas y así puedan aplicar Matemática a situaciones o fenómenos reales (Zemelman, Daniels y Hyde, 1998). En este sentido, la resolución de problemas es promovida por la modelación matemática.

Para Polya (1978) resolver un problema consiste en identificar vías para enfrentar una situación difícil, una forma de superar una limitación de modo que pueda lograrse un objetivo no alcanzable en lo inmediato. Según este autor, el profesor de Matemática posee una gran oportunidad para despertar la curiosidad en sus estudiantes, planteándoles problemas apropiados para el contexto de la clase y proponiéndoles preguntas estimulantes que favorezcan el agrado por el pensamiento independiente.

Mancera (ob.cit.) sostiene que existen múltiples posibilidades de emplear la resolución de problemas en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática; una de ellas es el uso de los problemas de aplicación los cuales consideran contenidos matemáticos para comprender y dar solución a planteamientos dentro o fuera de la Matemática, dentro de esta área, por ejemplo al usar la Geometría para resolver problemas de Álgebra o viceversa; fuera de ella cuando dichos contenidos permiten resolver problemas de Física, Química, Biología, entre otras.

El mismo autor afirma que lo característico de un problema es que no es posible aplicar un procedimiento que arroje una rápida solución y esto trae consigo dinamismo y búsqueda en el proceso de resolución pues, para transitar el camino a la solución, el resolutor debe activar un cúmulo de estrategias mentales relacionadas con sus estructuras cognitivas. Según

D'Amore (2006) es posible que alguna de estas estructuras formen parte de una sucesión de operaciones para ser usadas, pero son los elementos de la creatividad los que permiten lograr la conexión adecuada entre tales estructuras cognitivas. De manera que la resolución de problemas está estrechamente vinculada con la creatividad.

En relación con la creatividad, el primer planteamiento data de 1950 y lo presenta Guilford (1980) al definirla a través de las aptitudes características de los individuos creadores, como la fluidez, la flexibilidad, la originalidad y el pensamiento divergente. Para este autor las actitudes creadoras se definen en relación con la solución de problemas y en este sentido Guilford y Hoepfner (1971) afirman que la gente creativa muestra sensibilidad a los problemas, a lo inusual, a lo raro, a los defectos o deficiencias de las cosas, a la necesidad de cambio o de aplicar nuevos métodos. Otro experto en el tema, como Torrance (1970) asocia la creatividad con el proceso de: ser sensible a los problemas, identificar dificultades, buscar soluciones, formular y comprobar conjeturas, modificar hipótesis y comunicar resultados. Por su parte Ramos (2006) define la creatividad como la disposición para activar, asimilar y producir estímulos internos y externos que favorecen la receptividad a nuevas ideas; también la asocia a la capacidad de producir y comunicar nuevos elementos originales. Todos estos autores coinciden en definir como indicadores relativos a la creatividad:

- La flexibilidad (opuesta a la rigidez), que permite ver varias alternativas, elimina barreras, considera diferentes aristas de una situación planteada y busca soluciones inesperadas y novedosas;
- La fluidez, concerniente a la diversidad de alternativas que pueden manipularse en relación a un tema establecido, o a la producción de múltiples soluciones a un problema, o a la producción de muchas ideas con agilidad y rapidez;
- La originalidad, concebida como la capacidad de innovar o producir soluciones de manera no convencional, de forma diferente a lo usual;
- La elaboración, relacionada con la combinación de acciones teóricas-prácticas para obtener una producción definida, y se caracteriza y configura por la complejidad, la profundización de ideas y acciones, el perfeccionismo, el esfuerzo, la voluntad y la dedicación.

Sobre la base de los referentes anteriores, se planteó este estudio orientado por las siguientes interrogantes:

¿De qué forma la modelación matemática puede involucrar activamente al estudiante en la resolución de problemas?

¿Cómo la modelación matemática permite a los estudiantes resolver “problemas de aplicación” que conducen a la solución de triángulos rectángulos?

¿Cómo se manifiesta el interés por la matemática en los estudiantes al resolver “problemas de aplicación”?

¿De qué manera la resolución de problemas (asociados a triángulos rectángulos) potencia la creatividad de los estudiantes?

Con la finalidad de dar respuesta a estas preguntas, la investigación se planteó como objetivo general valorar cómo la modelación matemática, a través de la resolución de problemas de aplicación, potencia la creatividad en los estudiantes de cuarto año de Educación Media General.

Para alcanzar tal propósito se plantearon como objetivos específicos:

- Fomentar la participación activa del estudiante en la resolución de problemas, mediante los problemas de aplicación que conducen a la solución de triángulos rectángulos;
- Diseñar y aplicar un conjunto de estrategias basadas en la modelación matemática, que faciliten la resolución de problemas de aplicación relacionados con la solución de triángulos rectángulos;
- Identificar, en la resolución de los problemas de aplicación parte de los estudiantes, aspectos asociados a la creatividad.

## **MÉTODO**

Investigación de enfoque cualitativo, con el método de investigación-acción participativa, buscó intervenir en la realidad de un grupo de estudiantes de cuarto año de EMG con el objetivo de explicar, interpretar y valorar su desempeño en la resolución de problemas, tomando la modelación matemática como estrategia transformadora del trabajo de aula (específicamente los problemas de aplicación relacionados con la solución de triángulos rectángulos).

La experiencia docente del investigador (14 años de experiencia laborando en bachillerato) le permitió, en base a su praxis educativa y a la consulta con otros profesores de la institución, detectar la situación problemática y planificar las estrategias que podían cambiar la realidad en la cual está inmerso (caso particular: el estudio de la Trigonometría) y que le proporcionará información relevante para ser analizada.

El grupo de estudio estuvo formado por 19 estudiantes (12 hembras y 7 varones, con edades entre 15 y 18 años), integrantes de una sección de cuarto año de EMG de una Unidad Educativa Nacional dependiente del Ministerio del Poder Popular para la Educación, ubicada en el Municipio Carrizal del estado Miranda.

Se eligió una de las cuatro secciones de clase asignadas al profesor-investigador durante el año escolar 2010-2011, por la empatía existente entre los estudiantes y dicho docente, lo cual permitía suponer que el desarrollo de actividades poco usuales en la dinámica escolar tradicional, bajo las premisas de la modelación matemática, contaría con un ambiente distendido, lleno de confianza y propicio para que los estudiantes expresaran con libertad sus opiniones y el docente-investigador asumiera el rol de observador participante.

De esta manera, la observación participante se convirtió en la técnica de recolección de información privilegiada en esta investigación y se reforzó con entrevistas no estandarizadas a grupos de estudiantes, las cuales no contaron con un guión de preguntas porque el docente-investigador, en las secciones de trabajo, formuló preguntas dependiendo de las acciones de sus estudiantes; esto generó respuestas en forma fluida que fueron registradas e interpretadas.

También se utilizaron para recabar información: (a) los apuntes de campo del profesor (cuaderno o bitácora del investigador), donde fue describiendo las actividades y registrando sus observaciones y reflexiones durante la ejecución de la acción; (b) los diarios de los estudiantes en los cuales ellos escribían el desarrollo de las actividades y describían su percepción de las mismas; (c) una video-cámara para grabar la acción en

las sesiones de trabajo; (d) una grabadora de voz para las entrevistas. Ambas grabaciones (imagen y sonido) también permitieron registrar las discusiones entre profesor y estudiantes y así se tuvo acceso a la información no registrada en apuntes o diarios.

La investigación-acción se inició con un diagnóstico que consistió en tres actividades desarrolladas en la institución educativa mencionada (cuadro 1).

**Cuadro 1.** Diagnóstico de la investigación

ACTIVIDAD	APLICADA A	DESCRIPCIÓN Y RESULTADOS
<b>Entrevista</b>	Profesores de Matemática	Los docentes no resuelven problemas al trabajar la resolución de triángulos rectángulos porque consideran que es una tarea de alta exigencia, requiere motivación y conocimientos previos por parte de los estudiantes y consume mucho tiempo de clase.
<b>dos (2) Sesiones de clase</b>	Estudiantes de cuarto año seleccionados	Se repasaron las características del triángulo rectángulo; se definieron el seno, el coseno y la tangente de un ángulo en un triángulo rectángulo; se mostró el manejo de la calculadora para estas razones trigonométricas.
<b>Prueba Diagnóstica</b>	Estudiantes de cuarto año seleccionados	Se evaluó el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas de aplicación (cuadro 2) conducentes a la solución de triángulos rectángulos utilizando elementos de la Trigonometría; estos problemas fueron tomados de Hoffman (1999). Se observaron grandes debilidades conceptuales y procedimentales en los estudiantes, asociados a los conceptos geométricos, las razones trigonométricas y la resolución de problemas (cuadro 4).

**Cuadro 2.** Problemas de la prueba diagnóstica

<b>Problemas Número 1 y 2</b>	<b>Problemas Número 3 y 4</b>
<p><b>PROBLEMA N° 1. LA ESCALERA</b></p> <p>Una escalera de 10 m de largo está apoyada contra una pared alcanzando sobre ella una altura de 8,19 m. ¿Qué ángulo forman la escalera y la pared?</p>	<p><b>PROBLEMA N° 3. LA GARROCHA</b></p> <p>Una garrocha de 6 m de largo está apoyada contra una pared formando con el suelo un ángulo de <math>42^\circ</math>. ¿A qué distancia de la pared se encuentra el pie de la garrocha?</p>
<p><b>PROBLEMA N° 2. EL ÁNGULO</b></p> <p>¿Con qué ángulo ve una persona la parte más alta de un edificio de 27,47 m de altura si se encuentra a 10 m de la base del edificio?</p>	<p><b>PROBLEMA N° 4. EL RÍO</b></p> <p>En la orilla de un río hay una roca que alcanza una altura de 27,33 m sobre el nivel del agua. Desde el punto opuesto a la roca en la otra orilla, se ve la parte más alta de la roca con un ángulo de elevación de <math>19^\circ</math>. ¿Cuál es la anchura del río?</p>

El plan de acción se organizó a través de un conjunto de estrategias didácticas con base en la modelación matemática (cuadro 3). Cada situación problemática fue desarrollada en una sesión de clase de noventa minutos.

---

**Cuadro 3.** Diseño del plan de acción

---

<b>Tema De Estudio</b>	Trigonometría. Resolución de problemas de aplicación conducen conducentes a la resolución de triángulos rectángulos		
<b>Familiarización</b>	Diferentes mediciones en el triángulo rectángulo usando escuadras y reglas. Uso de la calculadora para hallar las razones trigonométricas.		
<b>Delimitación de la Situación Problema</b>	<b>Nº1.</b> Medir la inclinación de las escaleras del liceo, para después decidir la construcción de una escalera de acceso al Centro Ecológico del liceo (ubicado en la parte posterior y donde el terreno es irregular).	<b>Nº2.</b> Obtener la medida de la inclinación de una calle adyacente al liceo.	<b>Nº3.</b> Calcular la altura de la fachada del edificio del liceo, a fin de conocer el área total de la pared que forma la misma, para calcular el presupuesto que permita repararla.
<b>Elaboración de Modelos</b>	Los estudiantes elaboran los modelos matemáticos que permitan traducir, comprender resolver cada situación.		
<b>Divulgación</b>	A través de informe y exposición desarrollados por los estudiantes.		

---

El análisis cualitativo de la información se realizó de manera continua y flexible, sin pasos mecánicamente establecidos pero registrando, describiendo y reflexionado sobre toda la acción. Los hallazgos productos de la observación, las grabaciones y las anotaciones, se organizaron y clasificaron adecuadamente, para ser procesados posteriormente a través del programa Atlasti, el cuál facilitó la interpretación de textos, la extracción de contenidos conceptuales de los documentos, los cuales se tradujeron en las categorías y sub-categorías resultantes.

## RESULTADOS

Para el desarrollo de la prueba diagnóstica, los estudiantes trabajaron en equipos de cuatro personas y contaron con noventa minutos. Los resultados de esta prueba (cuadro 4) evidenciaron algunas debilidades conceptuales y procedimentales de los estudiantes, traducidas en:

- confusión en la identificación de las incógnitas,
- establecimiento inadecuado de las relaciones entre las condiciones iniciales del problema y los elementos del triángulo rectángulo,
- interpretación incongruente del problema,
- dificultad en la elaboración de un modelo o dibujo de la situación planteada,
- a mayor cantidad de elementos en el enunciado del problema es menor la intención de resolver la situación.

Dos de los equipos (equivalentes al 50% de la clase) no lograron resolver ninguno de los problemas propuestos.

**Cuadro 4.** Resultados de la prueba diagnóstica

N° del PROBLEMA	N° del EQUIPO	Relación de las condiciones del problema con el triángulo rectángulo	Identificación de incógnitas	Empleo de las razones trigonométricas	Solución al problema
<b>N° 1</b>	1	Correcto,	Correcto	Correcto	Correcto
	2	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
	3	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto
	4	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto
<b>N° 2</b>	1	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
	2	Correcto	Correcto	Incorrecto	Incorrecto
	3	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto
	4	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto

En el cuadro 4 se omiten los resultados de los problemas N°3 y N°4 porque ninguno de los equipos los abordó ni resolvió; estos problemas estaban asociados al cálculo de la longitud de un cateto del triángulo rectángulo que quedaba determinado en cada caso.

Los resultados de la prueba diagnóstica permitieron al docente-investigador planificar (en términos de problemas, actividades, recursos y estrategias) las sesiones de trabajo con los estudiantes. Cada sesión se enfocó en una situación problemática (ver Cuadro 3) y se caracterizó por el trabajo constructivo y el descubrimiento de los estudiantes, siempre acompañados y orientados por el docente-investigador, quien trató de enfocar sus intervenciones en hacerles preguntas, presentarles sugerencias y propiciar la discusión entre ellos.

Una vez desarrolladas las experiencias propuestas, se procedió a analizar la información (desempeño de los estudiantes, observaciones y notas del docente-investigador, opiniones de los estudiantes, entrevistas, grabaciones), a luz de los supuestos teóricos considerados. De allí emergieron seis categorías, con sus respectivas subcategorías, y una categoría central (cuadro 5).

**Cuadro 5.** Categorías y subcategorías resultantes del análisis

CATEGORÍA CENTRAL	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
<b>LA MODELACIÓN MATEMÁTICA</b>	Actitud asociada a la creatividad	Iniciativa al abordar el problema Proponer varias ideas Ideas únicas Construyendo relaciones
	Participación del estudiante en la resolución de problemas	Empleo de las razones trigonométricas Reflexión como optimización Hallar incógnitas Realizar dibujo Manipulación de objetos matemáticos Identificación del triángulo rectángulo y sus elementos Reflexión sobre medidas Establecer comparaciones Uso de instrumentos, materiales y de la calculadora Tomar medidas
	Aplicaciones de la matemática	Asociar formas geométricas a objetos reales Aplicar razones trigonométricas Aplicar fórmulas de área
	Aprehensión de conceptos matemáticos	Manipulación de objetos matemáticos Aplicar razones trigonométricas Identificación de triángulos rectángulos y sus elementos Aplicar fórmulas de áreas
	Resolución de problemas	Realizar un dibujo Hallar incógnitas Establecer comparaciones Reflexión sobre medidas Solución al problema Manipulación de objetos matemáticos Reflexión como optimización Dificultad para resolver el problema Confianza en sí mismo Situación gratificante y placentera
	Orientaciones del profesor	Participación del docente investigador

De la categoría “actitud asociada a la creatividad” vale la pena destacar varios aspectos. La subcategoría “iniciativa al abordar el problema” se manifiesta en los estudiantes cuando proponen ideas de forma espontánea y al tomar medidas sobre objetos reales utilizando los instrumentos; todo esto favorece el surgimiento de ideas relacionadas con la fase que Polya (1978) propone para resolver problemas y que él denomina “concepción del plan” (p. 30) y que asocia al surgimiento de una “idea brillante” (p. 65). Esto se conecta con la flexibilidad propia de la creatividad, la cual consiste en proponer ideas novedosas para obtener soluciones inesperadas, rompiendo protocolos establecidos (Ramos, 2006). La fluidez, otro indicador de la creatividad, mantiene conexión con la subcategoría “proponer nuevas ideas” y según Torrance (1970) esto se asocia con la sensibilidad a los problemas y el número de alternativas que permiten abordar la situación problemática.

Adicionalmente, todas las descripciones de la subcategoría “construyendo relaciones” se enmarcan dentro de la modelación matemática que Biembengut y Hein (2004) definen como un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representan un fenómeno o situación problema.

En cuanto a la categoría “participación del estudiante en la resolución de problemas” ella se manifestó a través de múltiples procesos y acciones; de allí sus diversas subcategorías. Muchas de ellas se integran a través de la modelación matemática la cual exige el uso, aplicación o elaboración de fórmulas, expresiones numéricas, gráficos, formas geométricas, ecuaciones algebraicas, programas computacionales, entre otros, para representar la situación problemática. En las sesiones se observó cómo el alumno invocó formas geométricas elementales (triángulo rectángulo) como aproximación al modelo que le permitiría dar solución al problema. También se aprecia la relación de la modelación matemática con la subcategoría “uso de la calculadora” ya que según Biembengut y Hein (s.f.), esta modelación logra desarrollar la habilidad en el uso de la tecnología.

Por otra parte, la principal característica de la categoría “aplicaciones de la matemática” es la vinculación de la matemática con la realidad a través de la geometría. La aplicación de las razones trigonométricas surgió del trabajo en equipo cuando los estudiantes concibieron como figura geométrica el triángulo rectángulo, estableciendo asociaciones entre los lados del mismo y sus ángulos; esta situación está asociada con la resolución de triángulos rectángulos a la luz de la trigonometría. En este caso, según Mora (2001), la realidad funciona como un elemento didáctico y esto, a su vez, rompe con lo improcedente que resulta desarrollar las nociones geométricas como contenidos abstractos (De Guzmán, s.f.).

La categoría “aprehensión de conceptos matemáticos” evidencia la aplicación de los aprendizajes previos (como las fórmulas de áreas) y actuales (como las razones trigonométricas) a las nuevas experiencias; en este sentido, Biembengut y Hein (s.f.) manifiestan que mediante la modelación matemática se induce al estudiante a incrementar su capacidad de interpretación y formulación para resolver situaciones problemas. Con esta categoría se aprecia la congruencia entre realidad (entorno del estudiante), objetos matemáticos (formas geométricas, triángulo rectángulo) y conocimientos del estudiante (razones trigonométricas, relaciones que pueda establecer), para dar respuesta a un problema.

Al respecto, Usiskin citado por Piñeiro, Jalón y Ortega, (1998), plantea que en la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría, la geometría juega un papel fundamental, de tal forma que son necesarias la visualización, la elaboración de dibujos (que en algunos casos pueden representar conceptos matemáticos no visuales y/o sus relaciones) y la construcción de figuras geométricas.

La “resolución de problemas” es una categoría amplia en la investigación; en general se relaciona con la resolución de problemas prácticos mencionados por Polya (1978), los cuales están inmersos en situaciones reales, pero además esto no desdice de las fases que distintos autores describen en el proceso de resolución. En particular, se aprecia como “realizar un dibujo” se relaciona con la modelación matemática propuesta por Biembengut y Hein (s.f.) y es a partir de allí que surgen

relaciones importantes que permitieron generar las otras subcategorías en cuestión.

Adicionalmente, la resolución de problemas, según Arreaza, Calderín, Dominguez, Longa y Rada (1998), tiene impactos en las emociones de los estudiantes y por eso emergen las subcategorías “confianza en sí mismo” y “situación gratificante y placentera”, asociadas al incremento de la autoestima, la motivación al logro y la participación activa de los estudiantes; ellos mismos expresaron que se atrevían a proponer sus ideas con agrado, sin temores y aun sabiendo que podían equivocarse.

Así mismo, De Guzmán (s.f.) explica que la resolución de problemas induce la activación de procesos mentales diversos y tiene impactos sobre aspectos afectivos, lo cual puede considerarse ventajoso para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática mediante la resolución de problemas, porque permite que el trabajo matemático sea apreciado como atrayente, divertido, satisfactorio, autorrealizador y creativo.

La categoría “orientaciones del profesor”, se evidenció cada vez que el estudiante mostró ideas para obtener los resultados deseables en cada situación problemática. Esto confirma lo expuesto por Biembengut y Hein (s.f.) en cuanto a la necesidad de la intervención del docente en la construcción de un modelo que, según D`Amore (2006) no se concibe de forma totalmente acabada, sino como la sucesión de modelos previos hasta llegar al definitivo. Esto puede darse con relación a un concepto cuando el individuo suele hacerse imágenes que van de lo más general a lo particular, considerando detalles, información más precisa, hasta llegar al modelo mental adecuado o estable, y esto está condicionado además por multiplicidad de factores, entre los cuales destacan, los estímulos del docente y los conflictos cognitivos.

Finalmente, se considera a “la modelación matemática” como categoría central de la investigación porque ella logra condensar en un todo congruente, los diversos indicadores emergentes de la investigación, traducidos estos en las categorías y subcategorías anteriormente

descritas. Ya lo sostienen Biembengut y Hein (s.f.) al afirmar que, entre los elementos intervinientes en la modelación se encuentran: (a) el interés por la matemática frente a su aplicabilidad, (b) la mejoría de la aprehensión de conceptos matemáticos, (c) la estimulación de la creatividad a través de la formulación y la resolución de problemas, (d) el desarrollo de la capacidad para actuar en grupos. Además se considera importante la intervención del docente como orientador para la construcción del modelo que permitirá darle solución a la situación problema. Todos estos aspectos se evidenciaron en el presente estudio.

## **CONCLUSIONES**

El desarrollo de la experiencia reportada permitió alcanzar los objetivos propuestos en la investigación. La integración, a través de estrategias, de la modelación matemática y la resolución de problemas, favoreció la participación y la creatividad de los estudiantes. En particular puede concluirse que:

- El uso de materiales para la medición, aplicados en objetos del entorno del estudiante, favorece la construcción de modelos matemáticos que inducen al alumno a la resolución de problemas prácticos, y lo coloca en sintonía con la satisfacción de necesidades de su contexto, permitiéndole apreciar la utilidad de la matemática en espacios distintos al aula de clase.
- La recolección de información, mediante instrumentos y materiales, promueve la participación del estudiante en la resolución de problemas a la luz de la modelación matemática, buscando establecer relaciones de los objetos de la realidad, con figuras geométricas y la relación con otros objetos matemáticos. Además de este proceso emergen indicadores de la creatividad tales como, la flexibilidad, la originalidad, la fluidez, la elaboración. De lo anterior se desprende que la resolución de problemas de aplicación conducentes a la solución de triángulos rectángulos, promueve la creatividad en los estudiantes.
- La modelación matemática promueve la resolución de problemas y, por ende, la participación del estudiante al propiciar la discusión entre ellos para encontrar vías de solución. Y por otra parte, como método

de enseñanza y aprendizaje, permite la construcción de estrategias centradas en el estudiante haciéndolo consciente de su desempeño.

- Mediante la resolución de problemas de aplicación en el marco de la modelación matemática, se le proporciona al estudiante experiencias de aprendizaje con información que convierte en nuevos conocimientos, afianzando los ya existentes para ser aplicados en situaciones novedosas.
- La terna contexto real del estudiante-geometría-trigonometría es un componente que optimiza la enseñanza y el aprendizaje de la matemática a través de la resolución de problemas de aplicación, porque induce al estudiante a participar, considerando aspectos que generalmente no se trabajan en un aula de clase, como lo es el tomar medidas sobre objetos reales que le rodean, estableciendo conexión sobre esos cuerpos y sus formas geométricas, para luego establecer relaciones matemáticas.
- Recolectar y organizar información de situaciones reales, favorece la clasificación de datos en conocidos y desconocidos, llevando estos últimos a los estudiantes a plantearse preguntas y a identificar incógnitas, elementos claves para el proceso de resolución de problemas.
- El estudiante se desinhibe en su acción mediante la resolución de problemas de aplicación cuando estos surgen de la recolección y la organización de información de situaciones y objetos reales, porque participa espontáneamente sin temor a las equivocaciones, generándose la confianza en sí mismo, además de participar de un trabajo gratificante y placentero.

## REFERENCIAS

- Arreaza, T. Calderín, T., Dominguez. M., Longa J. y Rada S. (1998). Desarrollo del pensamiento y Matemática. Educación: *Revista para el Magisterio*. N° 183
- Bienbemgut, M. y Hein N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. Redalyc. [Revista en línea]. Disponible: <https://redalyc.uaemex.mx/redalyc/405/40516206/40516206.html> [Consulta: 2011, Abril 20]

- Bienbemgut, M. y Hein N. (s.f.). Modelo, modelación y modelaje: Métodos de enseñanza – aprendizaje de matemáticas. [Documento en línea.] Disponible: [matesup.utaica.cl/modelos/articulos/modelacion\\_mate2.pdf](http://matesup.utaica.cl/modelos/articulos/modelacion_mate2.pdf) [Consulta: 2011, agosto 29]
- D'Amore, B. (2006). Didáctica de la matemática. Bogotá: Magisterio
- De Guzmán, M. (s.f.). Enseñanza de las ciencias y la matemática. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. [Documento en línea.] Disponible: <https://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm> [Consulta: 2011, Abril 23]
- Flores, F. (2008). Historia y didáctica de la trigonometría. [Libro en línea] Publicatuslibros.com. Disponible en: [www.publicatuslibros.com/.../Francisco\\_Luis\\_Flores\\_Gil\\_Historia\\_y\\_Didactica\\_de\\_la\\_Trigonometria.pdf](http://www.publicatuslibros.com/.../Francisco_Luis_Flores_Gil_Historia_y_Didactica_de_la_Trigonometria.pdf) [Consulta 2011, Septiembre 07]
- González, F. (1997). Paradigmas de la enseñanza de la matemática. Maracay: IMPREUPEL
- Guilford, J.P. (1980). La Creatividad. Madrid: Narcea
- Guilford, J.P. y Hoepfner, R. (1971). The Analysis of Intelligence. New York: McGraw Hill
- Hoffmann, J. (1999). Selección de temas de matemática. Caracas: Gráficas Monfort
- Londoño, P (1997). ¿De qué se trata la matemática? Educere. Año 1, N° 1, pp. 44-48
- Mancera, E. (2000). Saber matemáticas es saber resolver problemas. México: Iberoamericana
- Mora, C. (2001). Aprendizaje y enseñanza de la matemática enfocada en aplicaciones. Revista Enseñanza de la Matemática, 10, (1), 3-22.
- Piñeiro, E., Jalón, M. y Ortega, T. (1998). Trigonometría. Educación matemática en secundaria. Madrid: Síntesis
- Polya, G. (1978). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas
- Ramos, M. (2006). Teoría y práctica de la creatividad. Educadores creativos, alumnos creadores. Caracas: San Pablo
- Terán, M. y Pachano, L. (2005). La investigación-acción en el aula: tendencias y propuestas para la enseñanza de la matemática en sexto grado. Educere. Año 9, N° 29, pp. 171-179

- Torrance, E. (1970). Desarrollo de la creatividad del alumno. Buenos Aires: Librería de Colegio
- Torres, C. (2002). Enseñanza de la trigonometría basada en proyectos. Trabajo de grado de maestría. Instituto Pedagógico de Caracas. Caracas. Venezuela
- Torres, C. (2010). La trigonometría de los techos de cartón. Nro. 9. Caracas: Fondo editorial IPASME
- Vílchez, J. (2005). La enseñanza de las funciones trigonométricas en el quinto grado de educación secundaria. Trabajo de grado de maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú. [Documento en línea] Disponible: <https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/105> [Consulta: 2011, Octubre 07]
- Zemelman, S., Daniels H. y Hyde A. (1998). Best practice: New standars for teaching and learning in America's school. [Documento en línea] Disponible: <https://www.eduteka.org/mejorespracticass.php> [Consulta: 2011, Abril 10]